Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 – 2017/1 (04/04/2017)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 4 (quatro) questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a qualquer material, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda a resposta deve estar contida no espaço reservado para cada questão. Folhas de rascunho serão distribuídas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Uma bala de diversas cores era distribuída na seguinte proporção nos sacos, 30% marrons, 20% amarelas, 20% vermelhas, 10% verdes, 10% laranjas e 10% brancas. A partir de 2017, foi introduzida uma nova bala, azul, e a distribuição nos sacos passou a ser 24% azuis, 20% verdes, 16% laranjas, 14% amarelas, 13% vermelhas e 13% marrons.

a) Ao se retirar uma bala amarela, qual a probabilidade de ela ter sido retirada de um saco fabricado antes de 2017? Considere que temos a mesma quantidade de sacos fabricados antes e depois de 2017.

b) Por um problema na fabricação, após 2017, algumas balas vêm estragadas. Sabendo que 10% das balas azuis e 5% das balas vermelhas vêm estragadas, qual a probabilidade de se pegar uma bala estragada de um saco fabricado em 2017?

c) Com o resultado anterior, em um saco de 20 balas, qual a probabilidade de termos no máximo 2 balas estragadas?

a)

$$P(ano < 2017|amarela) = \frac{P(amarela|ano < 2017)P(ano < 2017)}{P(amarela)}$$

$$\begin{aligned} P(amarela) &= P(amarela|ano < 2017)P(ano < 2017) \\ &\quad + P(amarela|ano \geq 2017)P(ano \geq 2017) \\ &= 0{,}2\ (0{,}5) + 0{,}14(0{,}5) = 0{,}17 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(ano < 2017|amarela) = \frac{0{,}2(0{,}5)}{0{,}17} = \frac{10}{17} =$$

b)

$$\begin{aligned} P(estragada) &= P(estragada|azul)P(azul) \\ &\quad + P(estragada|vermelha)P(vermelha) \\ &= 0{,}1(0{,}24) + 0{,}05(0{,}13) = 0{,}0305 \end{aligned}$$

d) Chamando $p = P(estragada) = 0{,}0305$

$$\begin{aligned} P(\leq 2\ estragadas) &= \binom{20}{0}(1-p)^{20} + \binom{20}{1}p(1-p)^{19} + \binom{20}{2}p^2(1-p)^{18} \\ &= 0{,}978 \end{aligned}$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Duas variáveis aleatórias x e y tem função densidade de probabilidade (pdf) conjunta dada por

$$p_{\mathrm{x,y}}(x,y) = A\sin(x+y)\,, 0 < x, y \leq \pi/2$$

a) Qual o valor de A?
b) Qual a pdf da variável aleatória x? Qual sua variância?
c) Qual $\Pr(\mathrm{x} < 1)$?
d) Qual a pdf condicional $p_{\mathrm{x}|y}(x|y)$?

a) Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x,y)dydx = 1$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\sin(x+y)\,dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A[-\cos(x+y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} A\left[\cos(x) - \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,[\cos(x)+\sin(x)]dx$$

$$= A[\sin(x) - \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

b)

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_{\mathrm{x,y}}(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A\sin(x+y)\,dy$$

que já foi calculado acima

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{2}[\cos(x)+\sin(x)]$$

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,[\cos(x)) + \sin(x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}[(1+x)\sin(x) = (1-x)\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(ou observando-se que $p_{\mathrm{x}}(x)$ é simétrica em torno de $\frac{\pi}{4}$)

$$E\{\mathrm{x}^2\} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,[\cos(x)) + \sin(x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2+2x-2)\sin(x) - (x^2-2x-2)\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$= 0{,}8045$$

$$\mathrm{var}\{\mathrm{x}\} = E\{\mathrm{x}^2\} - \bar{\mathrm{x}}^2 = 0{,}1876$$

c)

$$\Pr[x < 1] = \int_0^1 p_{\mathrm{x}}(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [\cos(x)+\sin(x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x) - \cos(x)]_0^1 = \frac{1}{2}(\sin(1) - \cos(1) + 1) = 0{,}6506$$

d)

$$p_{\mathrm{x|y}}(x|y) = \frac{p_{\mathrm{x,y}}(x,y)}{p_{\mathrm{y}}(y)} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(y)+\cos(y)}$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Em uma cidade de 10.000 residências, sabe-se que o consumo mensal de água de cada residência é uma variável aleatória uniforme com média 10 m^3/mês. Sabe-se ainda que o consumo total da cidade passa de 101.000 m^3/mês com probabilidade 0,1%.
Qual o consumo mínimo e máximo mensal de cada residência?

Seja x_i o consumo de cada residência, o consumo da cidade é

$$y = \sum_{i=1}^{10000} x_i$$

Sabemos que $\bar{y} = 10.000\,\bar{x} = 100.000$, e que

$$Q\left(\frac{101.000 - \bar{y}}{\sigma_y}\right) = 0{,}001 \Rightarrow \frac{1.000}{\sigma_y} = 3{,}1 \Rightarrow 322{,}58$$

Sabemos ainda que

$$\sigma_y^2 = 10.000\,\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = 10{,}41$$

Como x_i é variável aleatória uniforme, sabemos que

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow b - a = 11{,}17$$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} = 10$$

e, portanto, o consumo residêncial mínimo é

$$a = 10 - \frac{11{,}17}{2} = 4{,}41$$

e o máximo

$$b = 10 + \frac{11{,}17}{2} = 15{,}59$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sinal com densidade espectral de potência $S_x(f) = A\Delta\left(\frac{f}{2000}\right)$ W/Hz, em que $\Delta(x)$ é um sinal triangular no intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, é alimentado em um receptor com resistência 100Ω operando a uma temperatura de 27ºC.

O sinal ruidoso é filtrado por um filtro com resposta na frequência igual a $H(f) = \sqrt{\Delta\left(\frac{f}{2000}\right)}$.

Qual o valor de A e qual a potência do sinal recebido (em dBm), de modo que na saída do filtro tenhamos uma razão sinal-ruído (potência do sinal / potência do ruído) de 10dB?

A densidade espectral de potência do sinal após o filtro será dada por

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = A\,\Delta^2\left(\frac{f}{2000}\right)$$

e sua potência será

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = 2A\int_0^{1000}\left(1-\frac{f}{1000}\right)^2 df = 2A\int_0^1 1000g^2dg = \frac{2000\,A}{3}$$

(na integral acima fizemos $g = 1 - f/1000$)

A densidade espectral de potência do ruído na saída do filtro será

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\Delta\left(\frac{f}{2000}\right)$$

E sua potência será

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)df = N_0\int_0^{1000}\left(1-\frac{f}{1000}\right)df = N_0\int_0^1 1000g\,dg = 500\,N_0$$

em que

$$N_0 = 4kTR = 1{,}380649\times 10^{-23}(300)(100) = 1{,}65678\times 10^{-18}$$

A RSR na saída do filtro será, portanto,

$$RSR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{2000\,A}{3}\,\frac{1}{500\,N_0} \geq 10$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{15}{2}N_0 = 4{,}97\times 10^{-17}$$

e

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = 2A\int_0^{1000}\left(1-\frac{f}{1000}\right)df = 1000\,A = 4{,}97\times 10^{-14}\text{W} \approx -163\text{dBW}$$

Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Identidades Trigonométricas

$$\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \sin(x \pm y) = \sin x\,\cos y \pm \cos x\,\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y \qquad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\,\tan y}$$

$$a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

Integrais

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4 + x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Probabilidade

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$ – Regra de Bayes

eventos são independentes se $P(B \mid A) = P(B)$.

se $A_i, 1 \leq i \leq N$são eventos disjuntos e $\cup\, i = 1_N A_i = S \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)$

Variáveis Aleatórias

CDF $F_{\mathrm{X}}(x) = Pr(\mathrm{x} \leq x)$

PDF $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{dF_{\mathrm{x}}(x)}{dx}$

v.a exponencial: $p_{\mathrm{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$

v.a. Gaussiana: $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

$E\{f(\mathrm{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\mathrm{x}}(x) dx p_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x,y) dy$

Teorema Central do Limite

$$\mathrm{y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{x}_i - \mu}{\sigma} \rightarrow Normal(0,1)$$

Probabilidade Marginal $P_{\mathrm{y}}(y) = \sum_{x_i} P_{\mathrm{x,y}}(x_i, y)$ ou $p_{\mathrm{y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x,y) dx$

Covariância: $\sigma_{\mathrm{xy}} = E\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})\}$

Coeficiente de correlação $\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{\sigma_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}}$

Processos Estocásticos

Autocorrelação: $R_{\mathrm{x}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\}$

Densidade Espectral de Pot.: $S_{\mathrm{x}}(f) = F_{\tau}\{R_{\mathrm{x}}(\tau)\}$

$\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) * h(t) \Rightarrow S_{\mathrm{y}}(f) = |H(f)|^2 S_{\mathrm{x}}(f)$ e $\bar{\mathrm{y}} = H(0)\bar{\mathrm{x}}$

$R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t+\tau)\}$

x e y são descorrelatados se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = \bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}$ e são ortogonais se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = 0$

Ruído Térmico: $\frac{N_0}{2} = 2kTR$, com e $k = 1{,}380649 \times 10^{-23}\mathrm{J/K}$

Filtro de Wiener

$H_{opt}(f) = \frac{S_{\mathrm{m}}(f)}{S_{\mathrm{m}}(f)+S_{\mathrm{n}}(f)},\ P_N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(f)S_n(f)}{(S)_m(f)+S_n(f)} df$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	*X*	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010