Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2017/2 (17/10/2017)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Considere um pulso $p(t) = \mathrm{sinc}(2\pi\, a\, t)\,\mathrm{sinc}(2\pi\, b\, t)$, com $|a| \geq |b|$

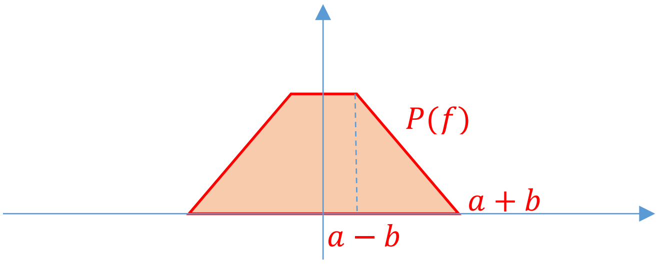
(a) Esboce a resposta na frequência $P(f)$ deste pulso. Dica: Lembre-se que a convolução de dois pulsos retangulares de larguras diferentes é um trapézio.

(b) Suponha que este pulso seja utilizado em um canal de banda base com largura de banda de 400Hz, e que queiramos transmitir a uma taxa de 1,2kbps utilizando 4-PAM. Quais os valores de a e b para que o pulso seja de Nyquist?

a)

$$P(f) = \frac{1}{4|ab|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2b}\right)$$

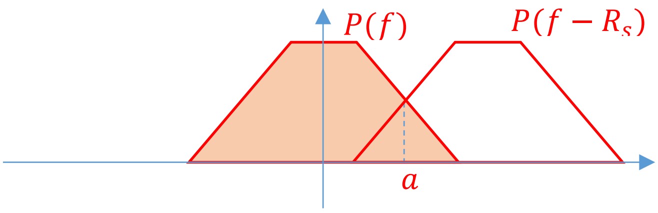
Ou seja, será a convolução de um pulso retangular em $[-a, a]$ e um outro em $[-b, b]$, resultando no trapézio abaixo



b)

Podemos ver na figura abaixo que para satisfazer o critério de Nyquist de ISI zero, devemos ter

$$a = \frac{R_s}{2} = \frac{R_b}{2\log_2 M} = \frac{1{,}2\mathrm{k}}{2(2)} = 300\mathrm{Hz}$$



E sabemos também que $B_T = a + b = 400\mathrm{Hz} \Rightarrow b = 100\mathrm{Hz}$

Questão 2 (2,5 ponto)

Em um sistema de comunicações digitais, sabemos que o sinal enviado é dado por

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k\, p(t - kT_s)$$

Consideremos agora que as amplitudes dos pulsos sejam dadas por $a_k = b_k - b_{k-1}$, em que $b_k = 0$ ou 1é o k-ésimo bit de informação.
Ache uma expressão para a densidade espectral de potência deste sinal. Ele possui componente DC?

$$R_n = E\{a_k a_{k+n}\} = E\{(b_k - b_{k-1})(b_{k+n} - b_{k+n-1})\}$$
$$= E\{b_k b_{k+n}\} - E\{b_k b_{k+n-1}\} - E\{b_{k-1} b_{k+n}\} + E\{b_{k-1} b_{k+n-1}\}$$

Sabemos ainda que

$$E\{b_k^2\} = \frac{1}{2}0^2 + \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}$$

$$E\{b_k b_{k+n}\} = \frac{1}{4}[0(0) + 0(1) + 1(0) + 1(1)] = \frac{1}{4}, \qquad n \neq 0$$

Ou seja,

$$R_0 = E\{b_k^2\} - E\{b_k b_{k-1}\} - E\{b_{k-1} b_k\} + E\{b_{k-1}^2\} = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = E\{b_k b_{k+1}\} - E\{b_k b_k^2\} - E\{b_{k-1} b_{k+1}\} + E\{b_{k-1} b_k\}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = R_{-1}$$

$$R_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0, \quad |n| \geq 2$$

e a densidade espectral de potência é

$$S(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{j2\pi f T_s} + e^{-j2\pi f T_s}\right)\right) = \frac{|P(f)|^2}{2\,T_s}(1 - \cos(2\pi f T_s))$$
$$= \frac{|P(f)|^2}{T_s}\sin^2(\pi f T_s)$$

Como $S(0) = 0$, este sinal não possui componente DC.

Digite a equação aqui.

Questão 3 (2,5 pontos)

Um espaço de sinais é definido pelas funções base

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} A & ,0 \le t < \frac{T_s}{2} \\ 0 & c.c. \end{cases},\quad \varphi_2(t) = \begin{cases} -A & ,\frac{T_s}{2} \le t < T_s \\ 0 & c.c. \end{cases},$$

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} B & ,\frac{T_s}{4} \le t < \frac{3T_s}{4} \\ -B & ,0 \le t \le \frac{T_s}{4},\ \text{ou}\ \frac{3T_s}{4} \le t < T_s \\ 0 & ,c.c. \end{cases}$$

Suponha um sistema de transmissão quaternário, cujos sinais são representados pelo seguinte mapeamento de bits em vetores

$00 \to s_1 = [1,1,0],\quad 01 \to s_2 = [1,0,1],$
$10 \to s_3 = [-1,1,0],\ 11 \to s_4 = [1,0,2]$

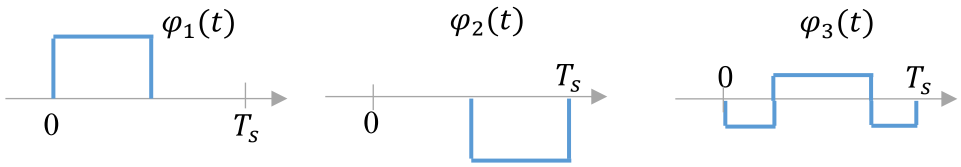
a) Quais os valores de A e B?
b) Esboce o sinal transmitido para a sequência 01000111
c) Dentre s_1, s_2, s_3 e s_4, algum par de sinais é ortogonal? Justifique.
d) Por meio da representação em vetores, qual a energia média de símbolo?
e) Qual o produto interno entre s_1 e s_3?

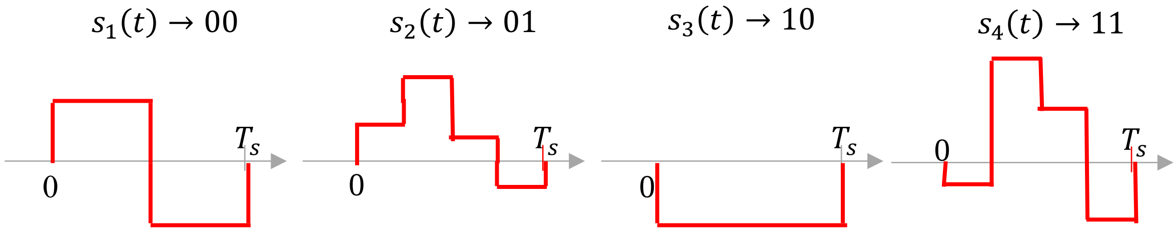
a)

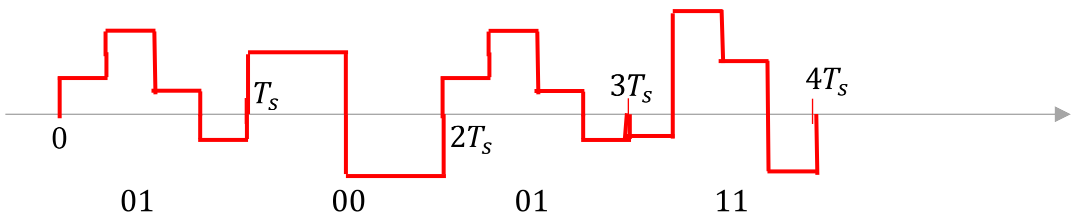
$$E_{\varphi_1} = E_{\varphi_1} = \int_{\infty}^{\infty} \varphi_1^2(t)dt = \frac{A^2T_s}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{T_s}}$$

$$E_{\varphi_3} = \int_{\infty}^{\infty} \varphi_3^2(t)dt = B^2T_s = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\frac{1}{T_s}}$$

b)







c) Sim, podemos ver que s_1 e s_3 são ortogonais, já que seu produto interno é

$$\langle s_1, s_3 \rangle = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 0$$

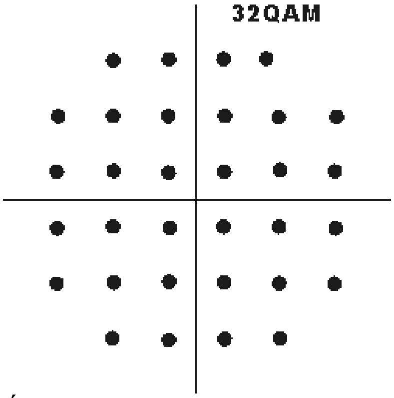
d)

$$E_1 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$
$$E_2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$$
$$E_3 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$
$$E_4 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$$
$$E_s = \frac{1}{4}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) = \frac{11}{4}$$

f) Já resolvido no item (c)

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão digital utiliza 32-QAM com a constelação em cruz abaixo



É utilizado um canal com largura de banda 1MHz, utilizando pulsos de Nyquist com fator de roll-off $\rho = 0{,}25$. Qual a taxa de bits alcançada?
Este esquema é utilizado em um sistema ruidoso, com densidade espectral de potência do ruído igual a $\frac{N_0}{2} = -170\ \mathrm{dBm/Hz}$. Sabemos ainda que o sinal sofre uma atenuação de 123dB entre o transmissor e o receptor. São enviados pacotes de 100 bytes, qual a **potência de transmissão** necessária, em dBm, se quisermos uma **probabilidade de erro de pacotes** $PER = 0{,}1$?

$$R_b = R_s \log_2 32 = \frac{5B_T}{1+\rho} = \frac{5\mathrm{M}}{1{,}25} = 4\ \mathrm{Mbps}$$

A probabilidade de erro será

$P_e = \overline{N_{viz}}\, Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$, e $P_b \approx \frac{1}{\log_2 M} P_e = \frac{P_e}{5}$

com

$$\overline{N_{viz}} = \frac{1}{32}\big(16(4) + 8(3) + 8(2)\big) = \frac{13}{4}$$

Considerando as amplitudes $A, 3A$ e $5A$, temos que $d_{min} = 2A$.
A energia de símbolo será

$$E_s = \frac{1}{32}\big(4(2A^2) + 8(10A^2) + 4(18A^2) + 8(26A^2) + 8(34A^2)\big) = 20A^2$$

e, consequentemente,

$$P_b = \frac{13}{20} Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right) = \frac{13}{20} Q\left(\sqrt{\frac{1}{10}\frac{E_s}{N_0}}\right) = \frac{13}{20} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Queremos uma probabilidade de erro de bit

$$1 - (1-P_b)^{800} = 0{,}1 \Rightarrow P_b = 1{,}36169 \times 10^{-4}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{1}{10}\frac{E_s}{N_0}}\right) = \frac{20}{13}(1{,}36169 \times 10^{-4}) = 2{,}03 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{10}\frac{E_s}{N_0}} \geq 3{,}6 \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 129{,}6$$

$$P_{Rx} = E_s R_s = 129{,}6\, N_0 (8 \times 10^5) = 129{,}6(2 \times 10^{-17})(8 \times 10^5)\mathrm{mW} = 2{,}07 \times 10^{-9}$$

$$P_{Tx} = P_{Rx}(2 \times 10^{12}) = 4{,}14 \times 10^3 \mathrm{mW} \approx 36\ \mathrm{dBm}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Tabela de Transformadas de Fourier

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a + j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f - f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\,\tau\,| \operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\,2B\,|}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t) + k_2 g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f) + k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\,a\,|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t - t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f - f_0)$$

$$g_1(t) * g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f) * G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Algumas Integrais

$$\int x\sin(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax\cos(ax))$$
$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax\sin(ax))$$
$$\int x^2\sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax))$$
$$\int x^2\cos(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos(ax) - 2\sin(ax) + a^2x^2\sin(ax))$$
$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$
$$\int x^2e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

Processos Estocásticos

Autocorrelação: $R_{\mathrm{x}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\}$

Densidade Espectral de Pot.: $S_{\mathrm{x}}(f) = F_\tau\{R_{\mathrm{x}}(\tau)\}$

$\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) * h(t) \Rightarrow S_{\mathrm{y}}(f) = |H(f)|^2 S_{\mathrm{x}}(f)$ e $\bar{\mathrm{y}} = H(0)\bar{\mathrm{x}}$

$R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t+\tau)\}$

x e y são descorrelatados se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = \bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}$ e são ortogonais se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = 0$

Transmissão Digital

Densidade espectral de potência $S(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi nfT_s}$

filtro de recepção ótimo $H(f) = k\frac{P(-f)e^{-j2\pi fT_m}}{S_n(f)}$

$P_e = Q\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $\beta^2 = \frac{E_p+E_q-2E_{pq}}{N_0/2}$, com $E_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt$

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$B = (1+r)R_s$ para sistemas em banda passante, $B = (1+r)\frac{R_s}{2}$ em banda base

Probabilidade de Erro de Símbolo (P_e) e de Bit (P_b) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,ortogonal} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\mathrm{sinc}(2\pi\Delta fT_s))}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,OOK,não-coerente} = P_{b,2-FSK,não-coerente} = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

$$P_{e,M-PAM} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$ apenas para QAM quadrado (M=4^n)

$$P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{M}\right)$$

Caso seja usada codificação de Gray $P_b \approx P_e/\log_2 M$, para codificação ortogonal $P_b \approx \frac{P_e}{2}$

Probabilidade de Erro Aproximada pelo limitante da união

$$P_e = \overline{N_{viz}}\, Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$$

Transmissão de pacotes com erros de bits independentes

$$P_{e,pac} = 1 - (1 - P_b)^{N_b}$$

Função Q

x	Q(x)	X	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010

UnB

departamento de engenharia elétrica