Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 – 2017/2 (23/11/2017)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão em banda passante utiliza um esquema de modulação com $M = 64$ pontos na constelação em uma banda de 10MHz, e consegue enviar dados a uma taxa de 24 Mbps com uma probabilidade de erro de 10^{-7}.

1) Qual a taxa de codificação empregada?
2) Supondo que o código e o esquema de modulação empregados apresentam uma perda de 1dB em relação ao limite de Shannon para a BER desejada, qual a potência recebida necessária, em dBm, supondo um ruído branco com $\frac{N_0}{2} = -170\ \text{dBm/Hz}$?

a)

$$R_b = R \log_2 M \;\; R_s = 6\, R\, B_T = 60 \times 10^6 R = 24\ \text{Mbps}$$
$$R = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

b)
Pelo limite de Shannon

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{P_C}{N_0 B}\right)$$
$$\Rightarrow P_C = \left(2^{\frac{C}{B}} - 1\right) N_0 B = (2^{2,4} - 1)(2 \times 10^{-17})(10 \times 10^6)$$
$$= 8{,}56 \times 10^{-10}\text{mW=-90,7 dBm}$$

Considerando que há perda de 1dB

$$P_{RX} = -89{,}7\ \text{dBm}$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Em um canal de comunicação enviamos sinais quaternários, A,B, C ou D, mas, recebemos apenas três valores diferentes, E, F, G de modo que

$$\Pr(E|A) = \Pr(G|D) = 1$$
$$\Pr(E|B) = \Pr(G|C) = 0{,}9$$
$$\Pr(F|B) = \Pr(F|C) = 0{,}1$$

Supondo que todas as mensagens de entrada são equiprováveis, calcule a informação mútua deste canal.

$$\Pr(\mathrm{Y} = E) = \Pr(\mathrm{Y} = E|\mathrm{X} = A)\Pr(\mathrm{X} = A) + \Pr(\mathrm{Y} = E|\mathrm{X} = B)\Pr(\mathrm{X} = B)$$
$$= 1\left(\frac{1}{4}\right) + 0{,}9\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}475$$
$$\Pr(G) = \Pr(E) = 0{,}475$$
$$\Pr(F) = 1 - \Pr(G) - \Pr(E) = 0{,}05$$

$$H(\mathrm{Y}) = -2(0{,}475)\log_2 0{,}475 - 0{,}05\log_2 0{,}05 = 1{,}2364$$

$$H(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = H(\mathrm{Y}|A)\Pr(A) + H(\mathrm{Y}|B)\Pr(B) + H(\mathrm{Y}|\mathrm{C})\Pr(C) + H(\mathrm{Y}|\mathrm{D})\Pr(D)$$

Pela simetria do problema, vemos que,

$$H(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = 0{,}5\,H(\mathrm{Y}|A) + 0{,}5\,H(\mathrm{Y}|B) = 0{,}5\,H(\mathrm{Y}|B)$$
$$= H_2(0{,}9) = -0{,}9\log_2 0{,}9 - 0{,}1\log_2 0{,}1 = 0{,}469$$

E a informação mútua é

$$I(\mathrm{X};\mathrm{Y}) = H(\mathrm{Y}) - H(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = 1{,}2364 - 0{,}469 = 0{,}6 = 0{,}7674 \text{ bits}$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Em uma turma de Comunicações Digitais, os alunos obtém notas de 0 a 7, seguindo uma distribuição binomial com parâmetro $p = 0{,}75$.

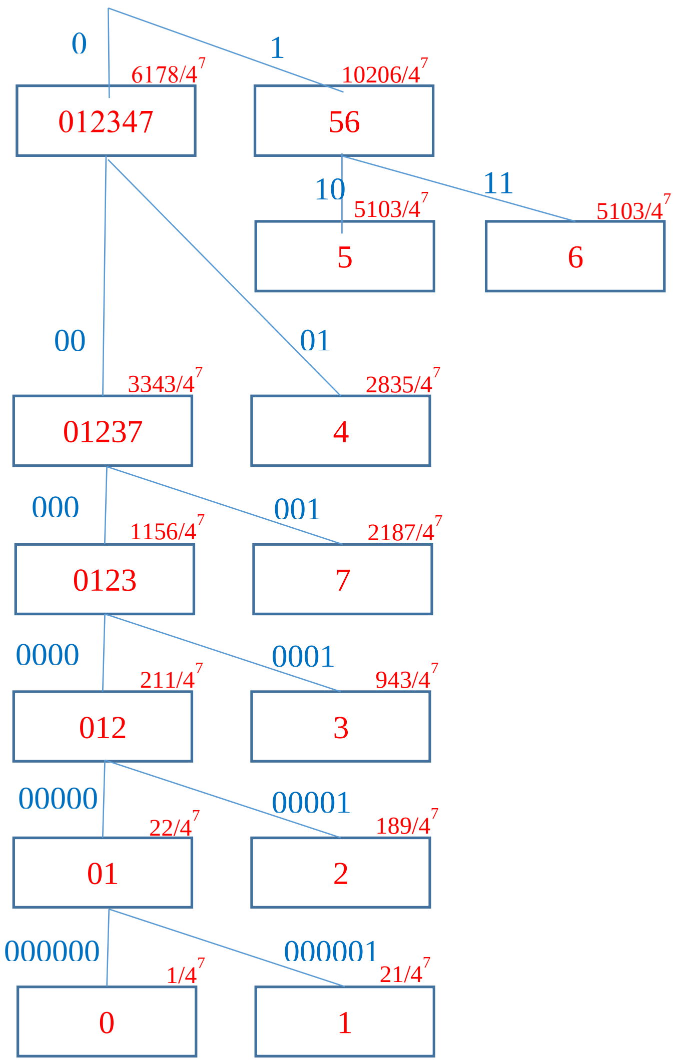
a) Qual a entropia das notas?
b) Projete um código de Huffman para armazená-las. Qual a taxa de compressão deste código (tamanho dos dados não comprimidos/tamanho comprimidos), para um número muito grande de amostras? Qual sua eficiência em relação à máxima compressão teórica?

a)

$$\Pr(0) = \binom{7}{0}(1-p)^7 = \left(\frac{1}{4}\right)^7 = \frac{1}{4^7}$$
$$\Pr(1) = \binom{7}{1}p(1-p)^6 = 7\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{21}{4^7}$$
$$\Pr(2) = \binom{7}{2}p^2(1-p)^5 = 21\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{189}{4^7}$$
$$\Pr(3) = \binom{7}{3}p^3(1-p)^4 = 35\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{945}{4^7}$$
$$\Pr(4) = \binom{7}{4}p^4(1-p)^3 = 35\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{2835}{4^7}$$
$$\Pr(5) = \binom{7}{5}p^5(1-p)^2 = 21\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5103}{4^7}$$
$$\Pr(6) = \binom{7}{6}p^6(1-p) = 7\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5103}{4^7}$$
$$\Pr(7) = \binom{7}{7}p^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{2187}{4^7}$$

$$H(X) = -\frac{1}{16384}\left[\log_2\frac{1}{16384} + 21\log_2\frac{21}{16384} + 189\log_2\frac{189}{16384} + 945\log_2\frac{945}{16384} + 2835\log_2\frac{2835}{16384} + 2(5103)\log_2\frac{5103}{16384} + 2187\log_2\frac{2187}{16384}\right]$$
$$2{,}199 \text{ bits}$$

b)



O número médio de bits com o código de Huffman será

$$N_{Huff} = 6\left(\frac{1}{4^7}\right) + 6\left(\frac{21}{4^7}\right) + 5\left(\frac{189}{4^7}\right) + 4\left(\frac{943}{4^7}\right) + 3\left(\frac{2187}{4^7}\right) + 2\left(\frac{2835}{4^7}\right) + 2\left(\frac{5103}{4^7}\right) + 2\left(\frac{5103}{4^7}\right) = 2{,}288$$

Sem compressão precisamos de 3 bits/nota, e a taxa de compressão será

$$R_{comp} = \frac{3}{N_{Huff}} = 1{,}31$$

A eficiência será

$$\eta = \frac{H(\mathrm{X})}{N_{Huff}} = \frac{2{,}199}{2{,}35} = 0{,}96$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 4 (2,5 pontos)

Um código corretor de erros é definido por sua matriz de verificação de paridade:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Qual sua taxa de codificação? Qual sua matriz geradora?
b) Qual sua distância mínima? Quantos erros ele pode corrigir e detectar?
c) Qual seu ganho de codificação aproximado, com decodificadores hard e BPSK, para uma BER=10^{-6}?

a)

$$R = \frac{4}{9}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Verificando-se todas as palavras possíveis

m	c	$w_H(c)$		m	c	$w_H(c)$
0000	0000 00000	-		1000	1000 01110	4
0001	0001 11101	5		1001	0001 10011	4
0010	0010 11010	4		1010	1010 10100	4
0011	0011 00111	5		1011	1011 01001	5
0100	0100 10010	3		1100	1100 11100	5
0101	0101 01111	6		1101	1101 00001	3
0110	0110 01000	3		1110	1110 00110	4
0111	0111 10101	6		1111	1111 11011	8

Vemos que $d_{min} = 3$.
Podemos detectar $d_{min} - 1 = 2$ bits e corrigir $t = 1$ bit

c)
sem codificação

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4{,}8 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 11{,}52 = 10{,}61 \text{ dB}$$

Com codificação

$$p_{b,c} \approx \binom{8}{1}(p_c)^2 = 8p_c^2 = 10^{-6} \Rightarrow p_c = 3{,}53 \times 10^{-4}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{8\,E_b}{9\,N_0}}\right) = 3{,}53 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8\,E_b}{9\,N_0}} = 3{,}5 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 13{,}78 = 11{,}4\text{dB}$$

Ou seja, o código na verdade apresenta uma perda de 0,8 dB para esta BER (mas deve apresentar ganho com decodificação soft para BER menores)

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Transmissão Digital
$B_T = R_s(1+\rho)$ em banda passante

$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{M}\right)$

$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$ apenas para QAM quadrado (M=4^n)

Teoria da Informação

$$h(x) = -\log_2 P(x)$$

$$H(\mathrm{x}) = -\sum P_{\mathrm{x}}(x)\log_2 P_{\mathrm{x}}(x)$$

$$I(\mathrm{x},\mathrm{y}) = H(\mathrm{x}) - H(\mathrm{x}|\mathrm{y}) = H(\mathrm{y}) - H(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = H(\mathrm{x}) + H(\mathrm{y}) - H(\mathrm{x,y})$$

$$\text{Capacidade de canal } C = \max\big(I(x,y)\big)$$

Capacidade de canal AWGN:

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_s}{P_N}\right) \text{ bits/uso do canal}$$

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 B}\right) \text{ bps}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{\eta}-1}{\eta}, \; \eta = \frac{R_b}{B}\frac{\text{bps}}{\text{Hz}}$$

Códigos de bloco

Probabilidade de erro com decodificação *hard*

$p_{b,c} \approx \binom{n-1}{t}(p_c)^{t+1}$, em que, para BPSK, $p_c = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$

com decodificação *soft*

$p_{b,c} \approx N_{min}\frac{d_{min}}{N} Q\left(\sqrt{\frac{2Rd_{min}E_b}{N_0}}\right)$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	X	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010