

Apostila de Comunicações Digitais

Capítulo 3

Transmissão Digital em Canais com Ruído

Prof. André Noll Barreto

Universidade de Brasília

Rev. 1.0

Abril/2017

1. Introdução

Como visto anteriormente, todo equipamento de recepção apresenta um ruído térmico, aditivo, branco e Gaussiano. Ou seja, não recebemos exatamente o sinal $x(t)$ que foi gerado nas Seções anteriores, mas sim um sinal ruidoso $r(t) = x(t) + w(t)$, em que $w(t)$ é o componente de ruído branco Gaussiano. Podemos ver na Figura 1 um enlace de transmissão digital em um canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*).

Uma sequência de bits b_k é enviada a uma taxa R_b e é convertida em uma forma de onda $x(t)$ pelo transmissor (TX), com potência recebida P_{RX} e largura de banda B_T . Considerando o uso de pulsos de Nyquist **em banda base**, podemos caracterizar este sinal pela energia de bit

$$E_b = \frac{P_{RX}}{R_b} = \frac{P_{RX}}{R_s \log_2 M} = \frac{(1 + \rho)P_{RX}}{2B_T \log_2 M} \quad (1)$$

que, como vemos, é proporcional à potência do sinal.

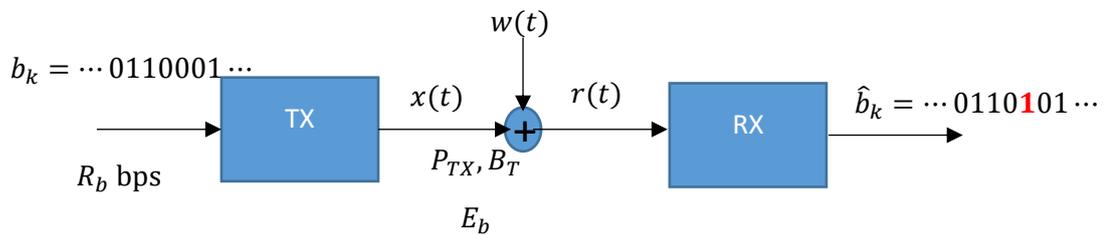


Figura 1. Exemplo de enlace de transmissão digital

O sinal ruidoso é processado pelo receptor (RX), a fim de se estimarem os bits enviados, mas, por conta do ruído, podemos estimar alguns bits de forma errada. Estes erros ocorrem a uma certa taxa, chamada de taxa de erro de bit, ou BER (*bit error rate*), definida como

$$BER = \frac{1}{N_b} \sum_{n=-N/2}^{N/2} (\hat{b}_k \neq b_k) \quad (2)$$

ou seja, é a razão do número de bits errados em relação ao número de bits enviados N_b .

Podemos ainda definir a probabilidade de erro de bit P_b

$$P_b = \Pr(\hat{b}_k \neq b_k) = \lim_{N_b \rightarrow \infty} BER \quad (3)$$

2. Transmissão binária polar

Iremos inicialmente determinar um receptor adequado para uma transmissão binária polar, e depois iremos achar um receptor genérico.

Lembremos que, se o bit for igual a **0**, transmitimos o sinal $-p(t)$, e se o bit for igual a **1**, $+p(t)$. O receptor implementa um detector por limiar, ou seja, o sinal é amostrado uma vez a cada símbolo, a uma taxa R_s , e o sinal amostrado $r_k = r(kT_s + \Delta t)$ é comparado com um limiar λ , para se decidir se o bit é **0** ou **1**. Podemos ver esta abordagem na Figura 2.

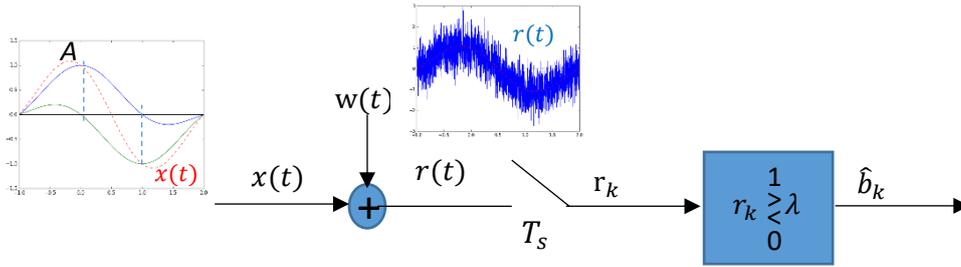


Figura 2. Modelo de receptor sem filtragem

Agora, supondo que o pulso tem amplitude A no instante de amostragem, ou seja, $p(\Delta t) = A$, teremos que o sinal amostrado é

$$r_k = \pm A + w_k \quad (4)$$

em que w_k é uma variável aleatória Gaussiana com média nula e variância σ_w^2 , ou usando uma notação comum, $w_k \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$. Deste modo, o sinal amostrado também é uma variável aleatória Gaussiana, porém com média $\pm A$, ou seja, $r_k \rightarrow \mathcal{N}(\pm A, \sigma_w^2)$, dependendo do bit que foi enviado, como vemos na Figura 3.

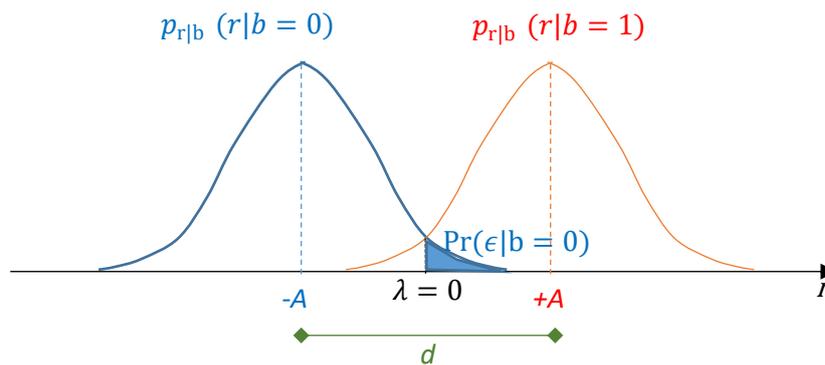


Figura 3. PDF do sinal recebido no receptor com transmissão polar

Podemos fazer o limiar de decisão $\lambda = 0$, já que está entre as amplitudes $+A$ e $-A$, e chamamos a distância entre os dois pontos $d = 2A$. Deixando o índice k de lado por simplificação, e chamando de ϵ o evento de erro temos que a probabilidade de erro de bit é dada por

$$\begin{aligned} P_b &= \Pr(b = 0) \Pr(\epsilon | b = 0) + \Pr(b = 1) \Pr(\epsilon | b = 1) \\ &= \Pr(b = 0) \Pr(r > 0 | b = 0) + \Pr(b = 1) \Pr(r < 0 | b = 1) \\ &= \Pr(r > 0 | b = 0) \\ &= Q\left(\frac{A}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_w}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

A segunda linha da equação acima é obtida verificando que, se enviarmos um bit 0 (ou 1), temos um erro de detecção se o sinal recebido for maior (ou menor) que o limiar 0. A terceira linha pode ser obtida verificando-se que, pela simetria da distribuição Gaussiana, $\Pr(r > 0 | b = 0) = \Pr(r < 0 | b = 1)$. Já a quarta linha é obtida supondo que o sinal recebido y é uma variável aleatória Gaussiana.

Entretanto, sabemos que se o ruído for branco a potência do ruído¹ será infinita, $P_w = \sigma_w^2 = \infty$, e, conseqüentemente, neste caso, $P_b = Q(0) = 0,5$, ou seja, erramos metade dos bits. Por este motivo devemos filtrar o sinal antes de amostrá-lo, a fim de reduzirmos a potência do ruído.

Ou seja a Figura 2 pode ser estendida com a inclusão de um filtro de recepção, como vemos na Figura 4, e iremos agora verificar qual seria o melhor filtro possível. Ainda na Figura 4 podemos ver que, se enviarmos $p(t)$ na saída do filtro temos

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t) * h(t) = (p(t) + w(t)) * h(t) \\ &= p(t) * h(t) + w(t) * h(t) = p_o(t) + n(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ou seja, teremos na saída um pulso modificado $p_o(t)$ e o ruído filtrado $n(t)$, que tem uma potência bem menor que o ruído original $w(t)$. A análise é equivalente à realizada anteriormente sem o filtro em (5), a única mudança é que teremos agora, em vez da amplitude A do pulso $p(t)$, a amplitude do pulso filtrado $p(\Delta t) = A_o$, e em vez do ruído branco $w(t)$, o ruído filtrado $w(t)$ com variância σ_n^2

$$P_b = Q\left(\frac{A_o}{\sigma_n}\right) \quad (7)$$

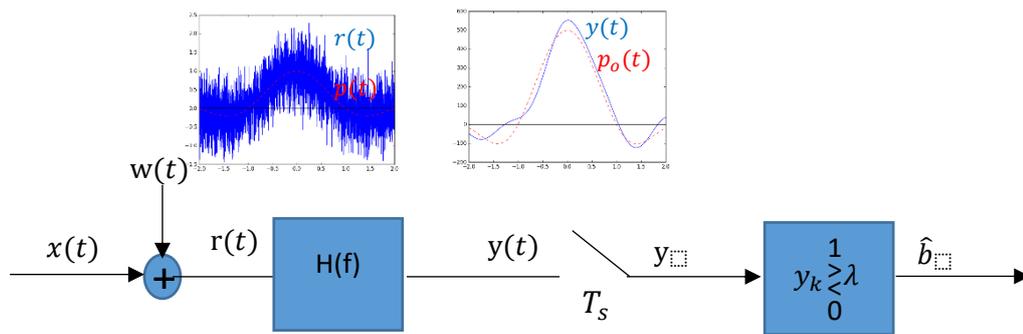


Figura 4. Modelo de receptor com filtragem

Queremos achar o filtro $H(f)$ que maximiza a razão $\gamma = \frac{A_o}{\sigma_n}$, e, conseqüentemente, minimiza a probabilidade de erro de bit P_b . A dedução do filtro ótimo é mostrada no Apêndice A, e o filtro é dado por

$$H(f) = \frac{kP(-f)e^{-j2\pi f\Delta t}}{S_w(f)}, \quad (8)$$

em que k é uma constante qualquer.

O caso mais comum é termos um ruído branco, ou seja, $S_w(f) = N_0/2$, e, neste caso, com $k = 2/N_0$, o filtro ótimo é dado por

$$H(f) = P(-f)e^{-j2\pi f\Delta t} \quad (9)$$

e, no domínio do tempo,

$$h(t) = p(\Delta t - t). \quad (10)$$

¹ Podemos lembrar que para um processo estocástico w , a potência é dada por $P_w = E\{w^2\}$, e, supondo uma média nula, $E\{w^2\} = E\{(w - \bar{w})^2\} = \sigma_w^2$

Este é chamado de filtro casado (*matched filter*), e, como podemos ver na Figura 5, a resposta impulsional do filtro consiste no pulso de transmissão invertido no tempo e deslocado. O fator Δt é a princípio necessário apenas para que o filtro seja não causal e, conseqüentemente, realizável, e, usualmente, consideramos $\Delta t = 0$, sem diferença na análise.



Figura 5. Resposta impulsional de filtro casado

A razão sinal-ruído na saída do filtro é dada neste caso, para ruído branco, por

$$\gamma^2 = \frac{A_o^2}{\sigma_n^2} = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi f\Delta t} df|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)|H(f)|^2 df} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_p}{N_0} \quad (11)$$

Com E_p a energia do pulso $p(t)$. A probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_b = Q(\gamma) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right). \quad (12)$$

Usualmente o que nos interessa é o desempenho do sistema em relação à potência do sinal na entrada do receptor P_{RX} . A métrica de interesse é a chamada razão sinal-ruído (RSR, ou em inglês, SNR – *signal-to-noise ratio*), que representa a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído P_N , dada por

$$RSR = \frac{P_{RX}}{P_N} = \frac{R_b E_b}{B_T N_0}. \quad (13)$$

Como vemos acima a RSR é proporcional à relação entre a energia por bit e a densidade espectral de potência do ruído, E_b/N_0 , e este é o parâmetro usualmente utilizado para a análise da probabilidade de erro.

A energia por bit E_b é a energia média de cada bit, e, supondo que para cada bit 0 consumimos uma energia E_0 e para cada bit 1, uma energia E_1 , no caso de transmissão polar,

$$E_b = \Pr(b = 0) E_0 + \Pr(b = 1) E_1 = E_p \quad (14)$$

já que $E_0 = E_1 = \int (\pm p(t))^2 dt = E_p$. Desta forma, podemos escrever a probabilidade de erro de bit como

$$P_{b,polar} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \quad (15)$$

É importante notarmos que a probabilidade de erro não depende da forma do pulso, mas apenas da potência do sinal, desde que seja utilizado o filtro casado no receptor.

Tipicamente, a probabilidade de erro é traçada em relação à razão sinal-ruído em dB, com o eixo da BER em escala logarítmica, como vemos na Figura 6 à direita.

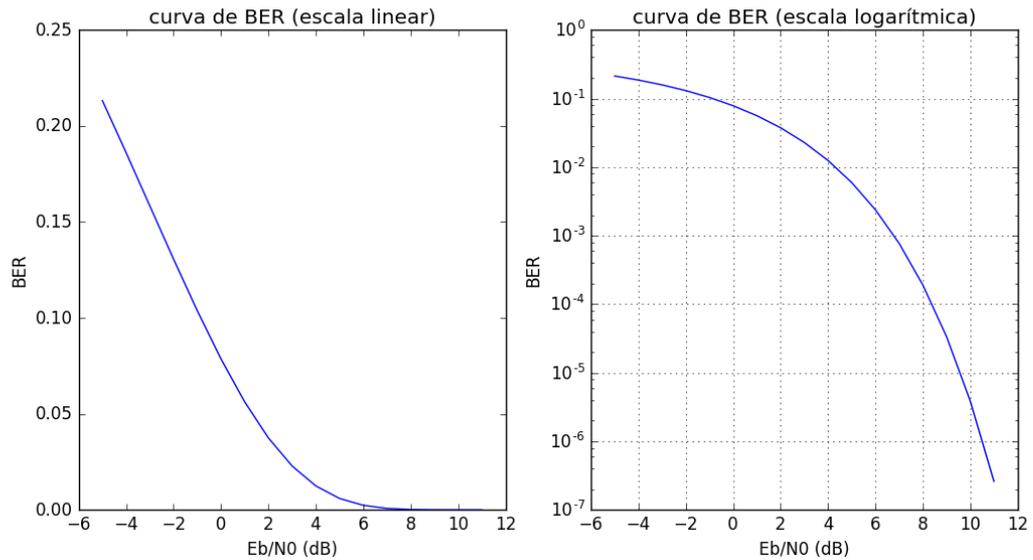


Figura 6. Curva de BER para transmissão polar

Exemplo 1 Análise de enlace com codificação polar

Em um enlace de transmissão digital é utilizada codificação polar com uma potência de transmissão de 33dBm. Sabemos que entre o transmissor e o receptor temos uma perda de 100dB, e que no receptor, que tem uma resistência de 240kΩ e opera a uma temperatura de 27°C, temos um componente de ruído térmico. Se quisermos uma probabilidade de erro de bit melhor que 10⁻⁵, qual a taxa de transmissão que podemos atingir?

Queremos que

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \geq 4,2649 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq 9,09$$

Sabemos ainda que a DEP do ruído é dada por

$$\frac{N_0}{2} = 2kTR = 2(1,38047 \times 10^{23})(300)(240 \times 10^3) = 2 \times 10^{-15} \frac{W}{Hz}$$

e, portanto,

$$E_b \geq 9,09(4 \times 10^{-15}) = 3,64 \times 10^{-14} J$$

O sinal sofre atenuação de 100dB, e, portanto a potência recebida é

$$P_{RX} = P_{TX,dB} - L_{dB} = 33dBm - 100dB = 2 \times 10^{-10} W$$

A taxa de bits que podemos alcançar é então

$$R_b = \frac{P_{RX}}{E_b} = \frac{2 \times 10^{-10}}{3,64 \times 10^{-14}} = 5,5 \text{ kbps}$$

3. Transmissão Binária Genérica

Suponhamos agora um esquema de transmissão binário genérico, em que o bit 0 é representado por um pulso $q(t)$ e o bit 1 por um pulso $p(t)$. Vamos encontrar agora qual o receptor ideal.

Novamente, como na Figura 4, aplicamos um filtro no sinal recebido e o amostramos. Considerando novamente apenas um símbolo por simplicidade, neste caso o sinal recebido será

$$y(t) = \begin{cases} q_o(t) + n(t) & , \text{ se } b=0 \\ p_o(t) + n(t) & , \text{ se } b=1 \end{cases} \quad (16)$$

com $p_o(t) = p(t) * h(t)$ e $q_o(t) = q(t) * h(t)$

e a decisão será tomada com base no sinal amostrado

$$y = y(\Delta t) \quad (17)$$

A decisão ótima se o bit é 0 ou 1 é achar aquele que tem a maior probabilidade de ocorrer, dado o sinal observado y . Este é chamado o **critério de máxima probabilidade a posteriori (MAP – maximum a posteriori probability)**, em que a estimativa do bit é dada por

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \operatorname{argmax}_b \Pr(b|y) = \operatorname{argmax}_b \frac{p_y(y|b)P_b(b)}{p_y(y)} \\ &= \operatorname{argmax}_b p_y(y|b)P_b(b). \end{aligned} \quad (18)$$

Na equação acima argmax é a função que retorna o argumento que maximiza a função, ou seja, o bit b que maximiza a probabilidade de b dado o sinal amostrado y . A segunda igualdade é obtida pela regra de Bayes, e na segunda linha, notando que $p_y(y)$ não depende do bit b , podemos desconsiderar o denominador.

Usualmente os bits são equiprováveis, e, conseqüentemente, $P_b(b) = \frac{1}{2}$ e não influencia na decisão. Neste caso o critério acima se torna

$$\boxed{\hat{b} = \operatorname{argmax}_b p_y(y|b)}. \quad (19)$$

Este é chamado o **critério de máxima verossimilhança (ML – maximum likelihood)**, e a partir deste critério vamos obter o receptor ótimo.

Receptor ML

A partir da descrição do sistema em (10), vemos que os pulsos amostrados na saída do filtro serão

$$\begin{aligned} p_o(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi f\Delta t} df \\ q_o(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)H(f)e^{j2\pi f\Delta t} df \end{aligned} \quad (20)$$

caso tenham sido enviados os bits 1 e 0, respectivamente.

A potência do ruído na saída do filtro é dada por

$$\sigma_n^2 = E \left\{ (n(t))^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(f)|^2 df \quad (21)$$

Sabendo que o ruído é Gaussiano, a PDF do sinal amostrado na saída do filtro é dada por

$$p_{y|b}(y|0) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-q_o(\Delta t))^2}{2\sigma_n^2}}, \quad (22)$$

$$p_{y|b}(y|1) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-p_o(\Delta t))^2}{2\sigma_n^2}},$$

caso sejam enviados os bits 0 e 1, respectivamente, ou seja, são variáveis aleatórias Gaussianas com média $q_o(\Delta t)$ e $p_o(\Delta t)$, e mesma variância σ_n^2 , como vemos na Figura 7.

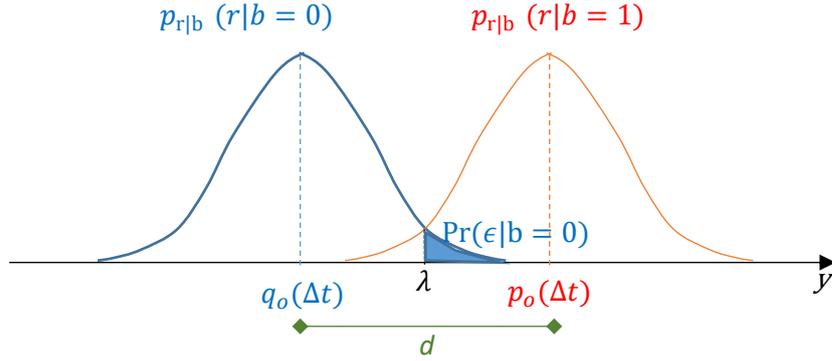


Figura 7. PDF do sinal recebido no receptor com transmissão binária

Vemos que, como as duas PDFs têm a mesma forma, apenas deslocadas, o limiar de decisão é

$$\lambda = \frac{p_o(\Delta t) + q_o(\Delta t)}{2} \quad (23)$$

e a probabilidade de erro é dada por

$$\begin{aligned} P_b &= \Pr(\epsilon|b=0) \Pr(b=0) + \Pr(\epsilon|b=1) \Pr(b=1) \\ &= \frac{1}{2} [\Pr(\epsilon|b=0) + \Pr(\epsilon|b=1)] = \Pr(\epsilon|0) = \Pr(\epsilon|1) \\ &= Q\left(\frac{\lambda - q_o(\Delta t)}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{p_o(\Delta t) - q_o(\Delta t)}{2\sigma_n}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$P_b = Q\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Seguindo a mesma abordagem utilizada para a codificação polar, vista no Apêndice A, pode ser mostrado que o filtro que maximiza β , e, conseqüentemente, minimiza P_b é dado por

$$H(f) = \frac{k[P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f \Delta t}}{S_n(f)}, \quad (25)$$

, e o valor de β maximizado é tal que

$$\beta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f) - Q(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (26)$$

Agora, supondo ruído branco, ou seja $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$, o filtro ótimo pode ser reescrito como

$$H(f) = [P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f \Delta t} \quad (27)$$

e, no domínio do tempo,

$$h(t) = p(\Delta t - t) - q(\Delta t - t). \quad (28)$$

O receptor ótimo pode ser visualizado na Figura 8

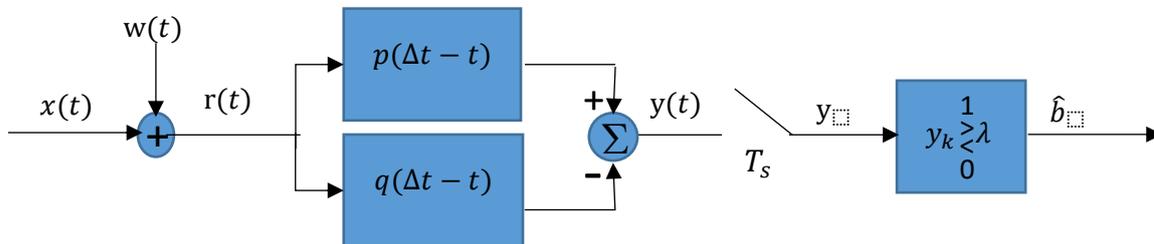


Figura 8. Receptor ótimo para sinal binário

O valor de β^2 neste caso é dado por

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f) - Q(f)|^2 df \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} [p(t) - q(t)]^2 dt \\ &= \frac{2}{N_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} q^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t) dt \right].\end{aligned}\quad (29)$$

Podemos verificar que os dois primeiros termos correspondem às energias dos pulsos $p(t)$ e $q(t)$, E_p e E_q , respectivamente, e, chamando de $E_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t) dt$ a correlação entre os dois pulsos, podemos reescrever a equação acima como

$$\beta^2 = \frac{2}{N_0} (E_p + E_q - 2E_{pq}) \quad (30)$$

Substituindo o filtro ótimo em (20), o pulso amostrado na saída do filtro, sem ruído será dado por

$$\begin{aligned}p_o(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f)[P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f\Delta t} e^{j2\pi f\Delta t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df - \int_{-\infty}^{\infty} P(f)Q^*(f)df = E_p - \int_{-\infty}^{\infty} P(f)Q^*(f)df \\ q_o(\Delta t) &= E_q - \int_{-\infty}^{\infty} P^*(f)Q(f)df\end{aligned}\quad (31)$$

caso tenha sido enviado o bit 1 ou 0, respectivamente.

Substituindo em (23), temos que o limiar ótimo é dado por

$$\lambda = \frac{E_p - E_q}{2} \quad (32)$$

Vamos ver o exemplo agora para alguns esquemas de transmissão.

Sinalização on-off

Neste caso, temos que para o bit 0 enviamos $q(t) = 0$, e para o bit 1, enviamos $p(t)$. Consequentemente $E_q = 0$. O limiar é dado por

$$\lambda_{on-off} = \frac{E_p}{2}, \quad (33)$$

o que representa uma desvantagem, já que precisamos conhecer o valor de E_p .

A correlação entre $p(t)$ e $q(t)$ é $E_{pq} = 0$, e, portanto,

$$\beta_{on-off}^2 = \frac{2E_p}{N_0} \quad (34)$$

A probabilidade de erro é dada por

$$P_b = Q\left(\frac{\beta}{2}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{2N_0}}\right) \quad (35)$$

Queremos novamente saber a probabilidade de erro em função de E_b , cuja relação com E_p é, supondo bits equiprováveis, dada por

$$E_b = \Pr(b = 0) E_q + \Pr(b = 1) E_p = \frac{E_p}{2} \quad (36)$$

A probabilidade de erro é dada, conseqüentemente, por

$$P_{b,on-off} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (37)$$

Comparando com o desempenho da codificação polar, vemos que, para uma mesma probabilidade de erro, devemos ter

$$\begin{aligned} P_{b,polar} &= P_{b,on-off} \\ \Rightarrow Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,polar}}{N_0}}\right) &= Q\left(\sqrt{\frac{E_{b,on-off}}{N_0}}\right) \\ \Rightarrow E_{b,on-off} &= 2E_{b,polar}. \end{aligned} \quad (38)$$

Ou seja, com codificação on-off precisamos de ter o dobro da energia que com a codificação polar, e, conseqüentemente, o dobro da potência, para uma mesma taxa de bits.

Isso pode ser entendido visualizando que um sinal on-off é igual à soma de um sinal polar com um sinal periódico, como já visto no Capítulo 2, de modo que apenas metade da potência do sinal é utilizada para se transmitir informações. Embora a codificação on-off tenha um desempenho pior que a polar, em termos de BER, em algumas ocasiões não é possível diferenciarmos a polaridade de um sinal, ou seja, se ele é positivo e negativo, e nestes casos precisamos utilizar a codificação on-off. Este é o caso, por exemplo, em diversos sistemas de comunicação óptica.

Exemplo 2 Análise de enlace com codificação on-off

Supondo os mesmos dados do Exemplo 1, ou seja, $P_{TX} = 33\text{dBm}$, perda $L = 100\text{dB}$, resistência $R = 240\text{k}\Omega$, temperatura $T = 300\text{K}$, e $BER \leq 10^{-5}$, qual a taxa que podemos atingir com codificação on-off?

Já calculamos no Exemplo 1 a taxa com codificação polar. Agora, basta lembrar que, com on-off precisaremos do dobro da energia por bit que com polar, e, conseqüentemente,

$$R_{b,on-off} = \frac{P_{RX}}{E_{b,on-off}} = \frac{P_{RX}}{2E_{b,polar}} = \frac{R_{b,polar}}{2} = 2,75\text{kbps}$$

Sinalização Bipolar

A sinalização bipolar é semelhante ao caso on-off, já que o bit 0 é sinalizado com um pulso $q(t) = 0$. A diferença é que, quando enviamos um bit 0, o erro pode ocorrer tanto pra um valor maior ($+A$) quanto pra um valor menor ($-A$), como vemos na Figura 9, e $\Pr(\epsilon|b = 0) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$.

Por este motivo, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$\begin{aligned} P_b &= \Pr(b = 0) \Pr(\epsilon|b = 0) + \Pr(b = 1) \Pr(\epsilon|b = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} \times Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

Devemos lembrar porém que com codificação bipolar podemos identificar a ocorrência de erros.

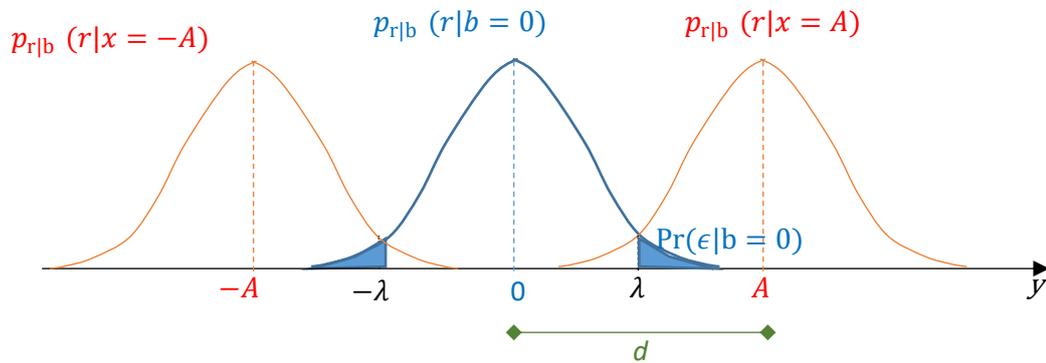


Figura 9. PDF do sinal recebido no receptor com codificação bipolar

Na Figura 10 vemos a taxa de erro de bit para codificação polar, on-off e bipolar. Podemos ver que para uma mesma BER, precisamos de 3dB a mais de energia de bit para a codificação on-off que para a codificação polar, ou seja, do dobro da energia. A diferença entre o desempenho da codificação on-off e a bipolar tende a ficar insignificante com uma redução da BER. De modo geral o argumento da função $Q()$ é muito mais significativo que o fator multiplicador na frente da função, particularmente para valores altos de E_b/N_0 .

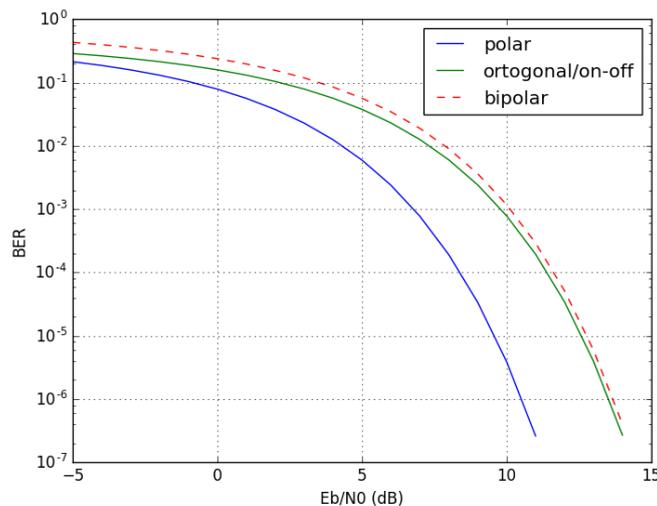


Figura 10. BER para sinalização on-off e bipolar

Sinalização Ortogonal

Uma sinalização ortogonal binária é tal que os pulsos $p(t)$ e $q(t)$ são ortogonais, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt = E_{pq} = 0 \quad (40)$$

Neste caso, (30) se resume a

$$\beta^2 = \frac{2}{N_0} (E_p + E_q) \quad (41)$$

e (24) se torna

$$P_b = Q\left(\frac{\beta}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q}{2N_0}}\right) \quad (42)$$

$$\Rightarrow P_{b,orth} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Vejam agora alguns exemplos de sinalização ortogonal.

Exemplo 3 Pulse Position Modulation (PPM)

No PPM a posição do pulso indica se o bit é 0 ou 1, como vemos na Figura 11

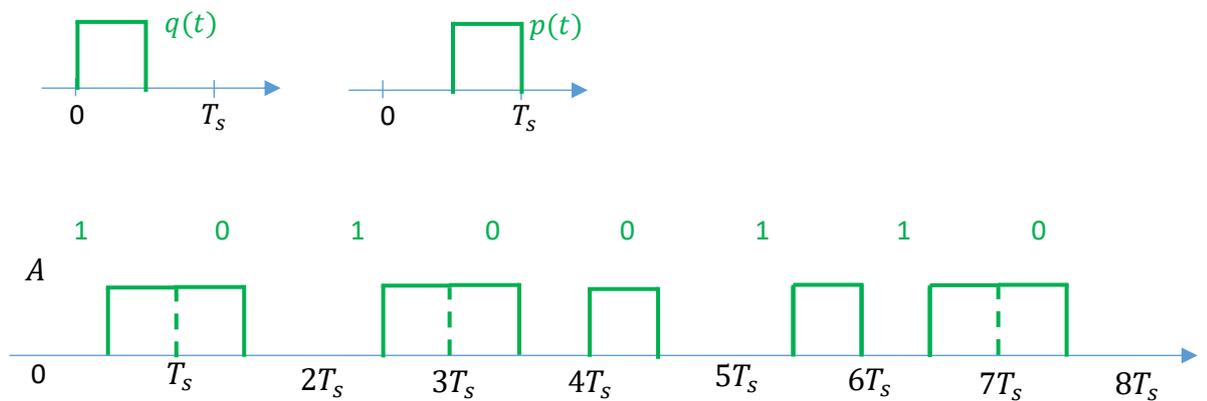


Figura 11. PPM

Exemplo 4

Podemos verificar que os seguintes pulsos $p(t)$ e $q(t)$ também são ortogonais.

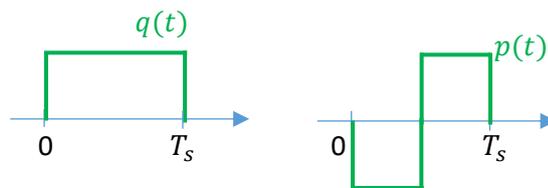


Figura 12. Sinalização ortogonal binária

Sinalização binária genérica

A abordagem pode ser utilizada para qualquer outro par de pulsos $p(t)$ e $q(t)$, como no exemplo abaixo.

Exemplo 5 Pulse Width Modulation (PWM)

No PWM, a largura do pulso é que transmite a informação, como visto na Figura 13.

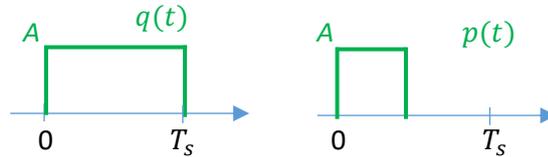


Figura 13. Pulse width modulation

Neste caso temos pulsos com energia

$$E_p = \frac{A^2 T_s}{2}, \quad E_q = A^2 T_s \quad \Rightarrow \quad E_b = \frac{1}{2}(E_p + E_q) = \frac{3}{4} A^2 T_s$$

e correlação

$$E_{pq} = E_p = \frac{A^2 T_s}{2}$$

Portanto,

$$\beta^2 = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N_0/2} = \frac{2}{N_0}(E_q - E_p) = \frac{A^2 T_s}{N_0}$$

e

$$P_b = Q\left(\frac{\beta}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{4N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{3N_0}}\right)$$

Vemos que o desempenho do PWM é bastante inferior ao desempenho da codificação polar ou mesmo da on-off, o que pode ser compreendido verificando que metade do pulso, e grande parte de sua energia, é transmitida sem enviar nenhuma informação.

a. Modulação Digital

Para gerarmos um sinal em banda passante devemos realizarmos a modulação digital em uma portadora de frequência f_c . Veremos alguns esquemas de modulação binária comuns.

BPSK (Binary Phase Shift Keying)

Podemos gerar um sinal polar em que o pulso enviado no caso de um bit $b = 1$ é

$$p(t) = \sqrt{2}Ag(t)\cos(2\pi f_c t) \tag{43}$$

em que $g(t)$ é um pulso em banda base de energia unitária, tipicamente satisfazendo o critério de Nyquist.

No caso de um bit $b=0$, enviamos um pulso

$$\begin{aligned} q(t) &= -p(t) = -\sqrt{2}Ag(t) \cos(2\pi f_c t) \\ &= \sqrt{2}Ag(t) \cos(2\pi f_c t + \pi) \end{aligned} \quad (44)$$

Ou seja, no caso de termos uma portadora, a codificação polar pode ser vista também como um esquema em que a informação está na fase. O sinal enviado será

$$x(t) = \sqrt{2}Ag(t) \cos(2\pi f_c t + \theta), \quad \theta = \begin{cases} 0 & , b = 1 \\ \pi & , b = 0 \end{cases} \quad (45)$$

e por isso o nome, chaveamento por deslocamento de fase binário BPSK (*binary phase shift keying*).

Na Figura 14 vemos um exemplo de um sinal modulado por BPSK, supondo um pulso retangular $g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$.

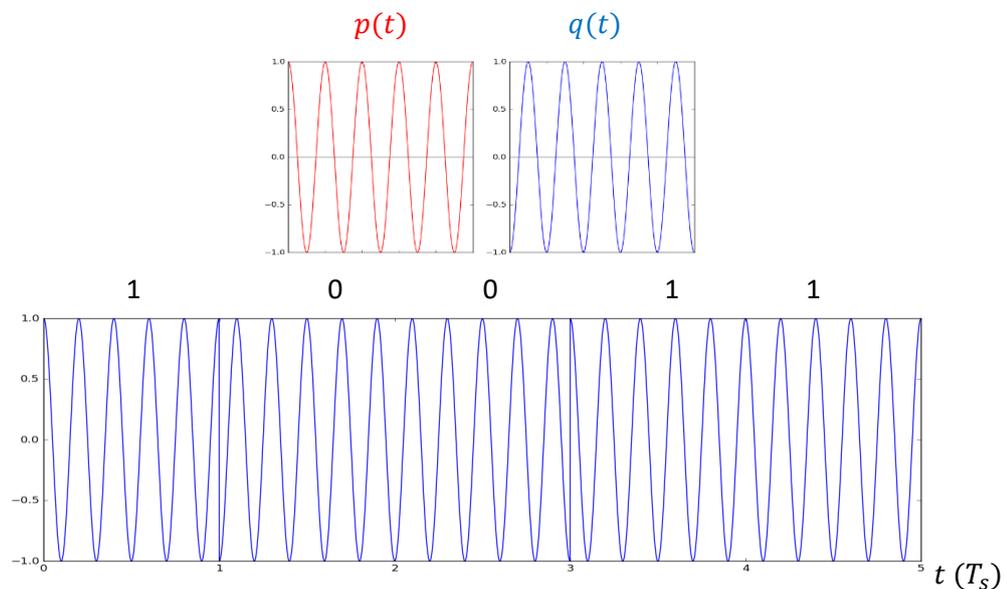


Figura 14. Exemplo de sinal BPSK

Como no fundo o BPSK é uma transmissão polar, e vimos que a probabilidade de erro de bit não depende da forma do pulso, ela é dada por

$$P_{b,BPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (46)$$

A modulação BPSK pode ser entendida também como um sinal polar em banda base modulado em AM-DSB-SC, como podemos ver na Figura 15.

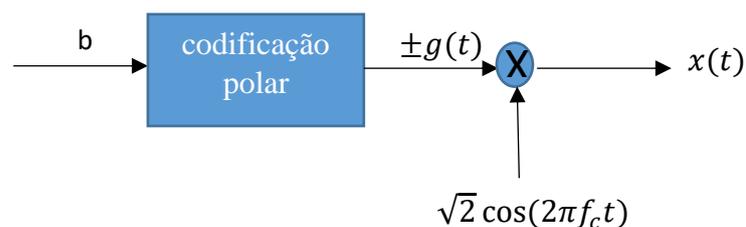


Figura 15. Modulação BPSK

Sabemos ainda que se o sinal em banda base tem uma largura de banda $B_{T, BB}$, o sinal modulado tem uma largura de banda $B_T = 2B_{T, BB}$. De modo geral, considerando o uso de pulsos de Nyquist, sistemas **em banda passante** têm uma largura de banda

$$B_T = R_s(1 + \rho) \quad (47)$$

Exemplo 6

Um sinal BPSK utilizando pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0,25$ ocupa uma banda de 200kHz. No receptor temos ruído térmico com densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2} = 170 \text{ dBm/Hz}$ e o sinal sofre uma atenuação de $L = 120 \text{ dB}$. Se desejarmos uma $BER \leq 10^{-4}$, qual a potência de transmissão necessária?

Solução:

A taxa de bits é dada por

$$R_b = R_s = \frac{B_T}{1 + \rho} = \frac{200 \times 10^3}{1,25} = 160 \text{ kbps}$$

e, baseado no requisito de BER , achamos a potência recebida necessária

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq 6,915$$

$$E_b = 6,915(N_0) = 6,915(2 \times 10^{-20}) = 1,38 \times 10^{-19}$$

$$P_{RX} = R_b E_b = 2,2 \times 10^{-14} \text{ W}$$

Levando-se em conta a atenuação do canal, a potência transmitida necessária é, portanto,

$$P_{TX} = L P_{RX} = 10^{12}(2,2 \times 10^{-14}) = 2,2 \times 10^{-2} \text{ W} = 13,4 \text{ dBm}$$

ASK (Amplitude Shift Keying) binário

Assim como geramos um sinal em banda passante modulando um sinal polar em banda base, podemos também modular um sinal on-off em banda base. Este método é chamado também de chaveamento por deslocamento da amplitude (ASK – *amplitude shift keying*) binário, além de OOK (*on-off keying*).

Assim teremos os pulsos

$$\begin{aligned} q(t) &= 0, & \text{se } b = 0 \\ p(t) &= \sqrt{2}Ag(t) \cos(2\pi f_c t), & \text{se } b = 1 \end{aligned} \quad (48)$$

O desempenho é o mesmo que já vimos para o OOK, ou seja,

$$P_{b, BASK} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (49)$$

Um exemplo de sinal ASK binário (B-ASK) pode ser visto na Figura 16

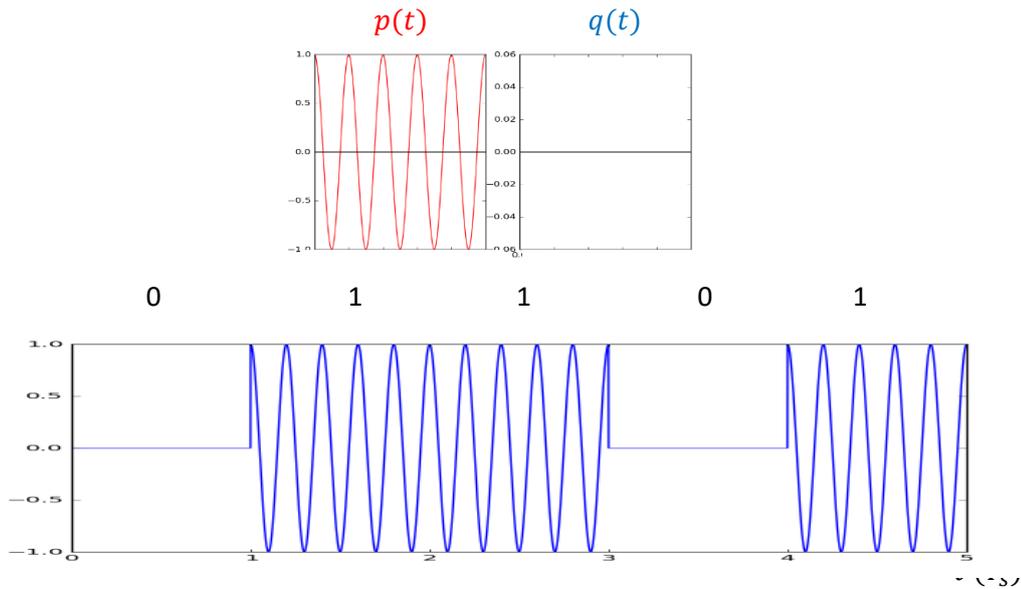


Figura 16. Exemplo de sinal ASK

Receptor de modulação digital

Para um sistema com modulação digital, a princípio o receptor é igual ao de um sistema com código de linha, devemos apenas incluir o filtro casado, como por exemplo, no BPSK e B-ASK,

$$h(t) = p(-t) = \sqrt{2}g(-t)\cos(2\pi f_c t) \quad (50)$$

Como já pode ser visto na equação acima, isto pode ser implementado em dois passos, primeiramente multiplicamos o sinal recebido pela portadora, levando o sinal para banda base, como em um receptor DSB-SC, e, posteriormente, filtrando-o pelo filtro casado a $g(t)$. Como este filtro é tipicamente passa-baixa, ele já elimina o componente em $2f_c$ que obteríamos após a multiplicação pela portadora.

Este receptor pode ser visto na Figura 17.

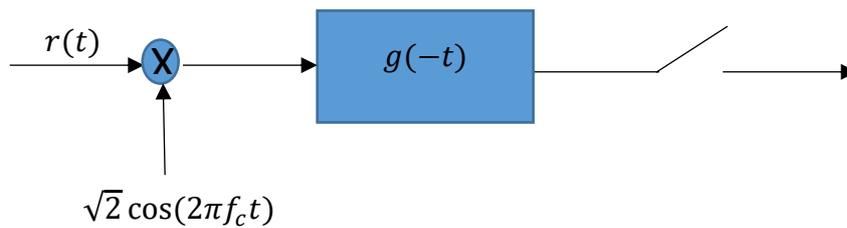


Figura 17. Receptor de sinal modulado

b. Transmissão de Pacotes

Usualmente em sistemas de comunicação digitais a informação é enviada em pacotes. Se tivermos algum mecanismo de detecção de erros, como no caso da codificação bipolar ou, como veremos posteriormente, com códigos detectores de erro, podemos solicitar a retransmissão do pacote caso seja identificado um erro, obtendo uma transmissão praticamente² livre de erros.

Supondo que um pacote contém N_b bits, e que os erros ocorram independentemente com probabilidade P_b , a probabilidade de que todos os bits sejam enviados corretamente é

$$\Pr\{C\} = (1 - P_b)^{N_b} \quad (51)$$

e, conseqüentemente, a probabilidade de que ocorra ao menos um erro no pacote é dada por

$$P_{e,pac} = 1 - \Pr\{C\} \quad (52)$$

$$\Rightarrow P_{e,pac} = 1 - (1 - P_b)^{N_b}$$

$P_{e,pac}$ é também chamada de taxa de erro de pacote (PER – *packet error rate*). “Pacote” é usualmente um termo mais relacionado às camadas superiores de protocolo. Em muitos sistemas, na camada física (PHY) o agrupamento de bits é feito em unidades chamadas quadros (*frames*) ou blocos, dependendo da tecnologia, e queremos calcular a FER (*frame error rate*) ou a BLER (*block error rate*), mas a abordagem é a mesma

Exemplo 7 Transmissão de pacote

Um pacote de 100 bytes é enviado usando um esquema de codificação polar. Se quisermos uma probabilidade de erro de pacote de 10%, qual a razão E_b/N_0 que devemos ter?

Queremos $1 - (1 - P_b)^{N_b} = 0,1 \Rightarrow P_b = 1 - 0,9^{\frac{1}{N_b}}$, com $N_b = 800$ bits. Portanto, devemos ter $P_b = 1,317 \times 10^{-4}$. Com codificação polar temos $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = P_b$, e, conseqüentemente, $\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \geq 3,65 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq 6,7 = 8,2\text{dB}$.

Uma medida bastante utilizada em sistemas de transmissão por pacotes é o **throughput**, ou vazão, que representa a taxa de bits efetivamente entregue do transmissor ao receptor, ou seja, considerando que os pacotes com erros são descartados, é a taxa considerando apenas os pacotes sem erro. Além disso, sabemos que as diferentes camadas de protocolo incluem diversos overheads de sinalização, reduzindo a taxa efetiva. Em particular, na camada física (PHY), que implementa o código de linha ou modulação são usualmente incluídos alguns bits de referência, já conhecidos pelo receptor, e que permitem a aquisição do sinal, controle automático de ganho, sincronização e estimação de canal. Estes bits de referência não transmitem informação e devem ser desconsiderados no cálculo do *throughput*.

Podemos ver o cálculo do *throughput* no exemplo abaixo.

² “Praticamente”, pois ainda podem ocorrer erros não detectados com alguma probabilidade.

Exemplo 8 Cálculo do throughput

Um sistema de comunicações ocupa uma banda de 200kHz e utiliza modulação BPSK, usando pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0,4$. O sistema envia pacotes com duração de 5ms, sendo que em cada pacote é enviado um sinal de referência de 100 bits. Sabendo que no receptor temos uma potência recebida de $P_{RX} = -87\text{dBm}$ e que o ruído tem uma densidade espectral de potência de $\frac{N_0}{2} = -150\text{dBm/Hz}$, calcule o throughput.

Solução:

$$R_b = R_s = \frac{B_T}{1 + \rho} = 160\text{kbps}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_{RX}}{R_b} \frac{1}{N_0} = \frac{2 \times 10^{-12}}{1,6 \times 10^5} \frac{1}{2 \times 10^{-18}} = 6,25$$

Portanto, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_b = Q\left(\sqrt{2(6,25)}\right) = 2,03 \times 10^{-4}$$

Em um intervalo de 5ms, enviamos no total

$$N_{b,tot} = R_b T = 1,6 \times 10^5 (5 \times 10^{-3}) = 800 \text{ bits}$$

A probabilidade de erro de pacotes é

$$P_{e,pac} = 1 - (1 - 2,03 \times 10^{-4})^{800} = 0,15$$

Lembrando que em cada pacote enviamos $N_{b,eff} = N_{b,tot} - 100 = 700$ bits de informação a cada 5ms, e destes 15% são perdidos, o throughput é dado por

$$T_{put} = \frac{N_{b,eff}}{T} (1 - P_{e,pac}) = \frac{700}{5 \times 10^{-3}} 0,85 = 119\text{kbps}$$

4. Espaço de Sinais

Para analisarmos o desempenho em ruído de esquemas de transmissão M-ários, ou seja, esquemas com M sinais diferentes, que transmitem $n_b = \log_2 M$ bits/símbolo, é conveniente trabalharmos em um espaço de sinais.

Dado um conjunto de N sinais ortonormais $\varphi_i(t)$, ou seja, sinais que sejam ortogonais entre si e tenham energia unitária,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & , l \neq m \\ 1 & , l = m \end{cases} \quad (53)$$

um **espaço de sinais N -dimensional** com base $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$ é o conjunto de todas as combinações lineares deste sinais base, ou seja, todos os sinais

$$g(t) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(t) \quad (54)$$

em que

$$g_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi_i^*(t) dt \quad (55)$$

é o componente de $x(t)$ em $\varphi_i(t)$.

Este é um conceito semelhante ao de um espaço vetorial, como o espaço Cartesiano, em que, a partir de três vetores ortonormais $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ podemos definir qualquer vetor \vec{g} no espaço tridimensional como uma combinação linear

$$\vec{g} = g_x \vec{x} + g_y \vec{y} + g_z \vec{z} \quad (56)$$

como podemos ver na Figura 18.

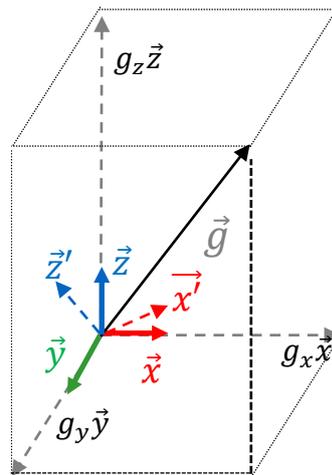


Figura 18. Espaço Cartesiano tridimensional

Desta forma, uma vez conhecidas funções base $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$ podemos representar todos os sinais $g(t)$ em um espaço de sinais pelos seus componentes, que podem estar listados em um vetor N -dimensional, ou seja

$$g(t) \equiv \mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3, \dots, g_N] \quad (57)$$

Note que a representação de um sinal periódico pelos coeficientes de uma série de Fourier, ou seja, pelo seu espectro, é um caso particular em que temos um espaço de sinais de infinitas dimensões.

Um dado espaço de sinais pode ser representado por diferentes funções base ortonormais. Podemos entender isso visualizando novamente o espaço Cartesiano na Figura 18, em que uma rotação $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ dos vetores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ também forma uma base pro mesmo espaço.

Um exemplo de espaço de sinais de 2 dimensões pode ser visto no Exemplo 9.

Exemplo 9 Espaço de sinais de 2 dimensões

Suponha que temos um sistema de transmissão quaternário, com os 4 sinais $s_0(t), s_1(t), s_2(t)$ e $s_3(t)$ mostrados na Figura 19.

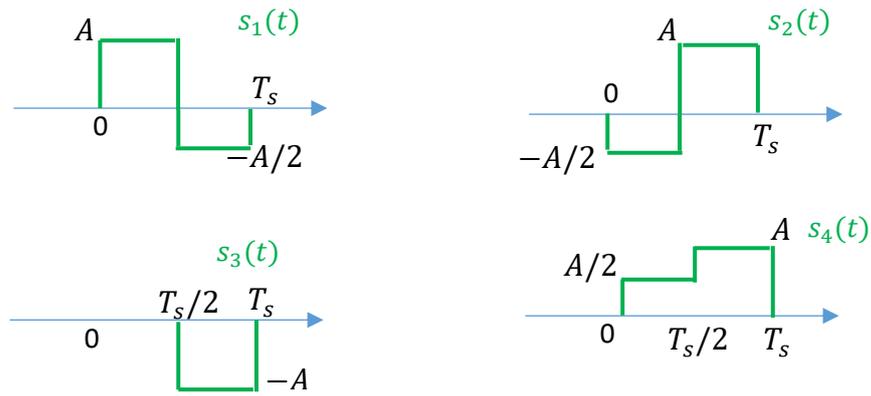


Figura 19. Exemplo de sinal quaternário

Podemos facilmente ver que estes sinais podem ser representados em um espaço de sinais de 2 dimensões definido pelas duas funções base $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ mostradas na Figura 20, que satisfazem os critérios em (53).

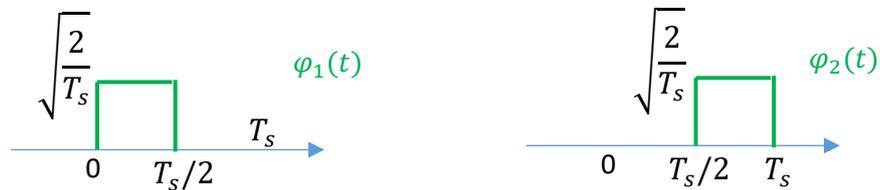


Figura 20. Exemplo de base bidimensional

Os quatro sinais podem ser escritos como

$$s_1(t) = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_1(t) - \frac{A}{2}\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_2(t), \quad s_2(t) = -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_1(t) + A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_2(t)$$

$$s_3(t) = -A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_2(t), \quad s_4(t) = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_1(t) + A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\varphi_2(t)$$

e, considerando esta base $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$, eles podem ser representados na forma vetorial como

$$s_1(t) \equiv \mathbf{s}_1 = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\begin{bmatrix} 1; -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad s_2(t) \equiv \mathbf{s}_2 = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}; 1 \end{bmatrix}$$

$$s_3(t) \equiv \mathbf{s}_3 = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\begin{bmatrix} 0; -1 \end{bmatrix}, \quad s_4(t) \equiv \mathbf{s}_4 = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}; 1 \end{bmatrix}$$

Podemos também representar os 4 sinais usando outras bases ortonormais, como por exemplo as funções $\varphi_1'(t)$ e $\varphi_2'(t)$ da Figura 21.



Figura 21. Exemplo de base alternativa

Nesta base os sinais podem ser representados como

$$s_1(t) \equiv \mathbf{s}_1' = A\sqrt{T_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad s_2(t) \equiv \mathbf{s}_2' = A\sqrt{T_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$s_3(t) \equiv \mathbf{s}_3' = A\sqrt{T_s} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s_4(t) \equiv \mathbf{s}_4' = A\sqrt{T_s} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Estes sinais podem ser representados também graficamente no plano Cartesiano, como vemos na Figura 22 para os sinais do Exemplo 9. A representação do conjunto de sinais desta forma é conhecida como **constelação**.

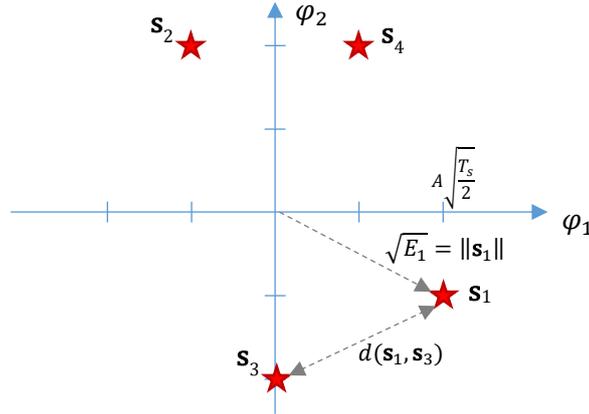


Figura 22. Exemplo de constelação

A vantagem da representação de um sinal pelos seus coeficientes no espaço de sinais é que diversos parâmetros pelos seus equivalentes vetoriais como por exemplo o produto interno

$$\begin{aligned} \langle x(t), y(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i\varphi_i(t)y_k^*\varphi_k^*(t) dt \\ \Rightarrow \langle x(t), y(t) \rangle &= \sum_{i=1}^N x_i y_i^* = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned} \quad (58)$$

ou seja, o produto interno de dois sinais é igual ao produto interno de seus vetores correspondentes.

A partir daí podemos obter também a energia de um sinal

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \langle x(t), x(t) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^N |x_i|^2, \quad (59)$$

ou a distância entre dois sinais $d(x(t), y(t))$, definida como

$$d^2(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2. \quad (60)$$

O quadrado da distância entre dois sinais representa a energia da diferença entre eles, e vemos que esta distância é igual à distância Euclideana entre os vetores correspondentes.

Exemplo 10

Tendo como referência o Exemplo 9, vamos calcular alguns parâmetros.

A energia do sinal $s_1(t)$ é dada

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) dt = \int_0^{\frac{T_s}{2}} A^2 dt + \int_{\frac{T_s}{2}}^{T_s} \left(-\frac{A}{2}\right)^2 dt = \frac{5A^2T_s}{8} \\ &= s_{1,1}^2 + s_{1,2}^2 = \frac{A^2T_s}{2} \left(1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{5A^2T_s}{8} \\ &= s'_{1,1}{}^2 + s'_{1,2}{}^2 = A^2T_s \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{5A^2T_s}{8}, \end{aligned}$$

onde a energia é calculada de três diferentes maneiras, pela definição do sinal, pelos coeficientes dos vetores na primeira base ortonormal, e pelos coeficientes da segunda base, todos resultando no mesmo resultado.

Da mesma forma, podemos calcular o produto interno entre dois sinais

$$\langle s_1(t), s_4(t) \rangle = s_{1,1}s_{4,1} + s_{1,2}s_{4,2} = A \frac{T_s}{2} \left(1 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) 1\right) = 0$$

ou seja, os sinais $s_1(t)$ e $s_4(t)$ são ortogonais.

A distância entre os sinais $s_1(t)$ e $s_3(t)$ é dada por

$$d(s_1(t), s_2(t)) = \sqrt{(s_{1,1} - s_{3,1})^2 + (s_{1,2} - s_{3,2})^2} = A \sqrt{\frac{T_s}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{5T_s}{2}}$$

Processo de Gram-Schmidt

Nos exemplos acima podemos determinar visualmente quais seriam as bases ortonormais, mas nem sempre isto é possível facilmente. Existe um algoritmo que, a partir de um conjunto de sinais, nos fornece uma base ortonormal possível. Este algoritmo, conhecido como processo de ortogonalização de Gram-Schmidt é descrito a seguir.

Dados os sinais $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$, e considerando funções base reais, escolhemos as seguintes função base iterativamente

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{s_1(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t))^2 dt}} \\ \varphi_2(t) &= \frac{\phi_2(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\phi_2(t))^2 dt}}, \quad \text{com } \phi_2(t) = s_2(t) - s_{2,1}\varphi_1(t) \\ &\vdots \\ \varphi_k(t) &= \frac{\phi_k(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\phi_k(t))^2 dt}}, \quad \text{com } \phi_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} s_{k,i}\varphi_i(t) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{61}$$

em que $s_{k,i} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t)\varphi_i(t) dt$ é o componente de $s_k(t)$ em $\varphi_i(t)$.

Notem que a base ortonormal obtida depende da ordem que os sinais são considerados.

Exemplo 11 Processo de Gram-Schmidt

Podemos usar o processo para encontrar uma base ortonormal adequada para os sinais do Exemplo 9. Assim

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{s_1(t)}{A\sqrt{\frac{5T_s}{8}}} = \frac{2\sqrt{2}s_1(t)}{A\sqrt{5T_s}} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5T_s}} & 0 \leq t \leq \frac{T_s}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5T_s}} & \frac{T_s}{2} \leq t \leq T_s \end{cases}$$

$$s_{2,1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t)\varphi_i(t) dt = -A\sqrt{\frac{2T_s}{5}}$$

$$\phi_2(t) = s_2(t) - s_{2,1}\varphi_1(t) = \begin{cases} -\frac{3A}{10} & 0 \leq t \leq \frac{T_s}{2} \\ \frac{3A}{5} & \frac{T_s}{2} \leq t \leq T_s \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\phi_2(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\phi_2(t))^2 dt}} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5T_s}} & 0 \leq t \leq \frac{T_s}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5T_s}} & \frac{T_s}{2} \leq t \leq T_s \end{cases}$$

Podemos ver que tanto $s_3(t)$ pode ser construídos a partir de combinações lineares de $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$, ou seja, $s_3(t) = s_{3,1}\varphi_1(t) + s_{3,2}\varphi_2(t)$, e, conseqüentemente, $\phi_3(t) = \varphi_3(t) = 0$. O mesmo ocorre com $s_4(t)$.



Figura 23. Base ortonormal obtida por Gram-Schmidt

5. Sistemas de Transmissão M-ários

Já vimos que em um sistema de comunicações estes M sinais podem representar $n_b = \log_2 M$ bits, em que M é chamada de **ordem de modulação**. Já vimos ainda que este conjunto de M sinais pode ser representado exatamente pelos seus coeficientes no espaço de sinais.

Dado que enviamos um dos sinais possíveis $s_m(t)$, o sinal recebido em um sistema de comunicações com ruído é dado por

$$r(t) = s_m(t) + w(t) \tag{62}$$

No receptor podemos obter os componentes do sinal recebido nas funções base do espaço de sinais

$$\begin{aligned}
 y_k &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\varphi_k(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\varphi_k(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\varphi_k(t) dt \\
 &= s_{m,k} + n_k
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

ou seja, temos em cada componente do sinal recebido a componente do sinal transmitido adicionada de um componente de ruído. Este receptor pode ser visto na Figura 24.

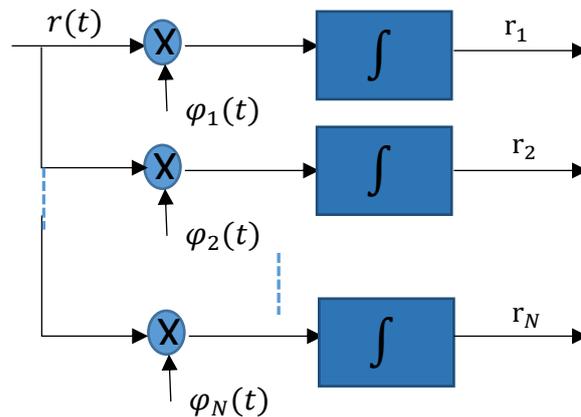


Figura 24. Receptor em espaço de sinais por correlação

A correlação acima pode ser também realizada por meio de um filtro casado. Supondo um filtro casado $h_k(t) = \varphi_k(-t)$ no receptor, o sinal na sua saída será

$$y_k(t) = r(t) * h_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h_k(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\varphi_k(\tau - t)d\tau
 \tag{64}$$

Se amostrarmos este sinal em $t = 0$, temos

$$y_k \equiv y_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau
 \tag{65}$$

que é o componente do sinal recebido, como em (63).

O receptor implementado com filtros casados pode ser visto na Figura 25.

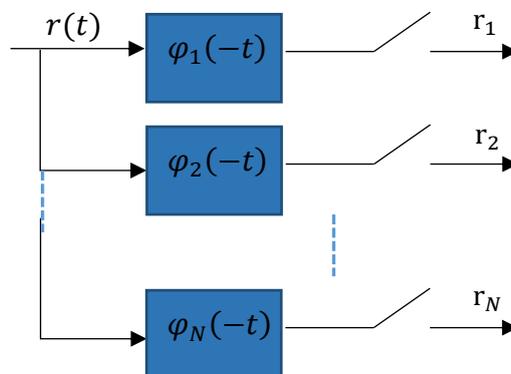


Figura 25. Receptor em espaço de sinais por filtro casado

Supondo ruído branco na entrada, a componente de ruído n_k , para qualquer k , tem variância dada por

$$\sigma_n^2 = E\{n_k^2\} = P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |\Phi_k(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2}, \quad (66)$$

em que $\Phi_k(f) = \mathcal{F}\{\varphi_k(t)\}$, e podemos mostrar ainda que³, para $k \neq l$

$$\begin{aligned} E\{n_k n_l\} &= E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \varphi_k(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha) \varphi_l(\alpha) d\alpha \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{w(t)w(\alpha)\} \varphi_k(t) \varphi_l(\alpha) d\alpha dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

ou seja, componentes de ruído em funções base diferentes são decorrelatados.

O ruído $w(t)$ não pode ser descrito inteiramente pelos seus componentes de sinal, ou seja,

$$w(t) = \sum_{k=1}^N n_k \varphi_k(t) + w_{\text{ort}}(t) \quad (68)$$

em que $w_{\text{ort}}(t)$ representa a parte do ruído ortogonal ao espaço de sinais. Como é ortogonal também a todos os sinais possíveis, esta parte do ruído não influencia na detecção do sinal e pode ser ignorada.

Portanto, dada a transmissão de um sinal O sinal recebido pode ser representado no espaço de sinais portanto por um vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{s}_m + \mathbf{n} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_{m,1} \\ s_{m,2} \\ \vdots \\ s_{m,N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

a. Receptor Ótimo

Assim como para um receptor binário, também em um sistema M-ário utilizamos o critério de **máxima probabilidade a posteriori (MAP)**. Dado um vetor recebido \mathbf{y} , queremos achar o sinal \mathbf{s}_m mais provável, ou apenas o índice m . Desta forma, a estimativa do sinal enviado o é

$$\hat{m} = \underset{m}{\operatorname{argmax}} \Pr(m|\mathbf{y}) = \underset{m}{\operatorname{argmax}} \Pr(m)p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) \quad (70)$$

Supondo que todos os símbolos são todos equiprováveis, ou seja $\Pr(m) = 1/M$, recaímos no caso da **máxima verossimilhança (ML)**, ou seja, $\Pr(m)$ é igual para todos os símbolos e não influencia a decisão. Deste modo, a decisão se reduz a

$$\hat{m} = \underset{m}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m). \quad (71)$$

Sabendo que os componentes de ruído são variável aleatória Gaussiana, os componentes do sinal recebido tem uma densidade de probabilidade conjunta

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0}\right) \quad (72)$$

³ Supondo ruído branco, já que, neste caso $E\{w(t)w(\alpha)\} = \frac{N_0}{2} \delta(t - \alpha)$

e, portanto, lembrando que apenas os fatores que dependem de m vão influenciar na detecção, e que a função exponencial é crescente, a estimativa ML é dada por

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \underset{m}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = \underset{m}{\operatorname{argmax}} \exp(-\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2) \\ &= \underset{m}{\operatorname{argmax}} (-\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2)\end{aligned}\quad (73)$$

Agora,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 &= \langle \mathbf{y} - \mathbf{s}_m, \mathbf{y} - \mathbf{s}_m \rangle = (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m)^T (\mathbf{y} - \mathbf{s}_m) \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{s}_m\|^2 - 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle\end{aligned}\quad (74)$$

e lembrando que a energia do sinal $s_m(t)$ é dada por $E_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt = \|\mathbf{s}_m\|^2$, podemos reescrever (73) como

$$\hat{m} = \underset{m}{\operatorname{argmax}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2} \right) = \underset{m}{\operatorname{argmax}} \left(\sum_{n=1}^N y_n s_{m,n} - \frac{E_m}{2} \right)\quad (75)$$

Ou seja, a cada símbolo, calculamos os componentes do sinal recebido no espaço de sinais \mathbf{y} , de dimensão N , como na Figura 24 ou Figura 25, e calculamos o valor de $\mu_m = \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2}$ para todos os $M \geq N$ sinais $s_m(t) \equiv \mathbf{s}_m$ possíveis, escolhendo o que der o maior resultado. Isto pode ser visto na Figura 26.

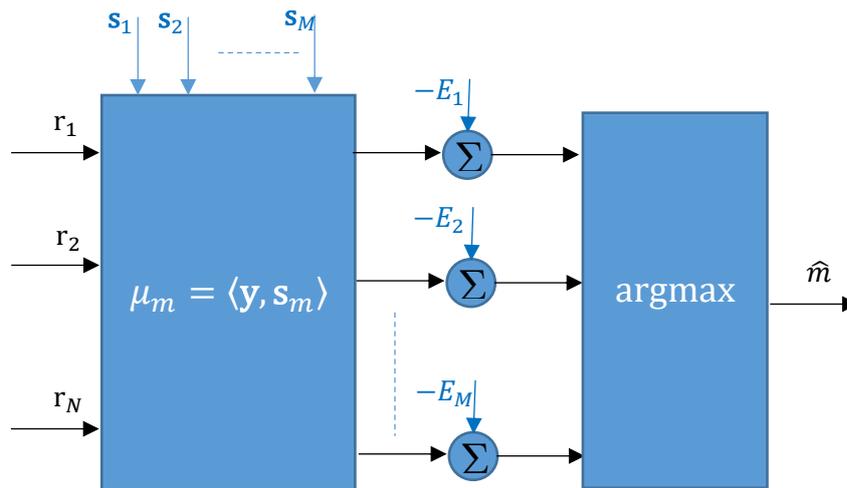


Figura 26. Receptor ML

Uma outra maneira de entendermos o receptor ótimo, considerando ruído branco Gaussiano, é reescrever (73) como⁴

$$\hat{m} = \underset{m}{\operatorname{argmax}} (-\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2) = \underset{m}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|\quad (76)$$

$$\hat{m} = \underset{m}{\operatorname{argmin}} d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m).$$

Ou seja, o receptor ótimo é aquele que minimiza a distância entre o sinal recebido e todos os possíveis sinais transmitidos, e esta abordagem será utilizada para obtermos as probabilidades de erro de diferentes esquemas de modulação.

⁴ Lembrando que $\|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\| \geq 0$ e que $-x^2$ é decrescente para $x \geq 0$

Como vemos na Figura 27, podemos particionar todo o espaço de sinais em regiões de decisão \mathcal{R}_k , de modo que cada região contém todos os pontos mais próximos de \mathbf{s}_k que de qualquer outro ponto, ou seja, se $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_k \Rightarrow d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_k) < d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m)$, para qualquer $k \neq l$.

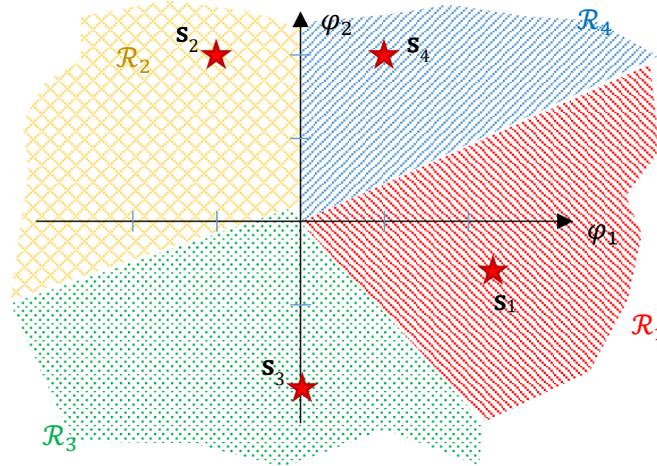


Figura 27. Regiões de decisão

Conseqüentemente o processo de decisão se resume a verificar em que região cai o sinal recebido \mathbf{y} , ou seja, se $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_k \Rightarrow \hat{m} = k$.

Sendo assim, a probabilidade de erro, dado que enviamos o símbolo m é dada por

$$\Pr(\epsilon | m) = \Pr(\mathbf{y} \notin \mathcal{R}_m | \mathbf{s}_m) \quad (77)$$

e a probabilidade de erro média, considerando símbolos equiprováveis é

$$P_e = \sum_{m=1}^M P(m) \Pr(\epsilon | m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(\epsilon | m) \quad (78)$$

Vamos agora ver alguns esquemas de modulação comuns e suas probabilidades de erro.

b. PAM (Pulse Amplitude Modulation)

Um sinal M-PAM é gerado variando-se a amplitude de um único pulso, dependendo dos bits de entrada. Considerando um pulso normalizado $\varphi(t)$, podemos ver na Figura 28 um exemplo de 4-PAM, em que o mapeamento de bits em sinais é dado por

$$\begin{aligned} 00 &\rightarrow s_0(t) = -A\varphi(t) \\ 01 &\rightarrow s_1(t) = -3A\varphi(t) \\ 10 &\rightarrow s_2(t) = A\varphi(t) \\ 11 &\rightarrow s_3(t) = 3A\varphi(t) \end{aligned} \quad (79)$$

Este sinal pode ser representado em apenas uma dimensão, como podemos ver na constelação, também na Figura 28. Vemos também que a menor distância entre dois pontos da constelação, ou seja, entre dois sinais quaisquer, é igual $d_{min} = 2A$, e pontos que estão distantes d_{min} um do outro são chamados de vizinhos. O mapeamento de bits foi realizado de modo que entre dois vizinhos quaisquer a gente troque apenas um bit, e este mapeamento é chamado de **codificação de Gray**.

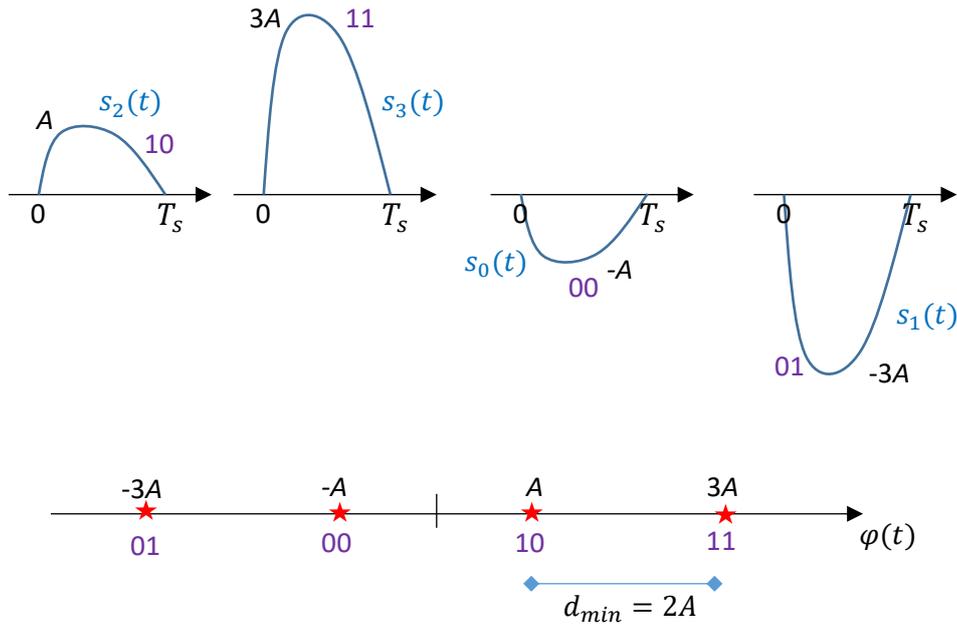


Figura 28. 4-PAM

Vamos agora calcular a probabilidade de erro de um sinal M-PAM genérico⁵. Na Figura 29 vemos a constelação de um M-PAM, assim como a PDF do sinal recebido para alguns sinais enviados.

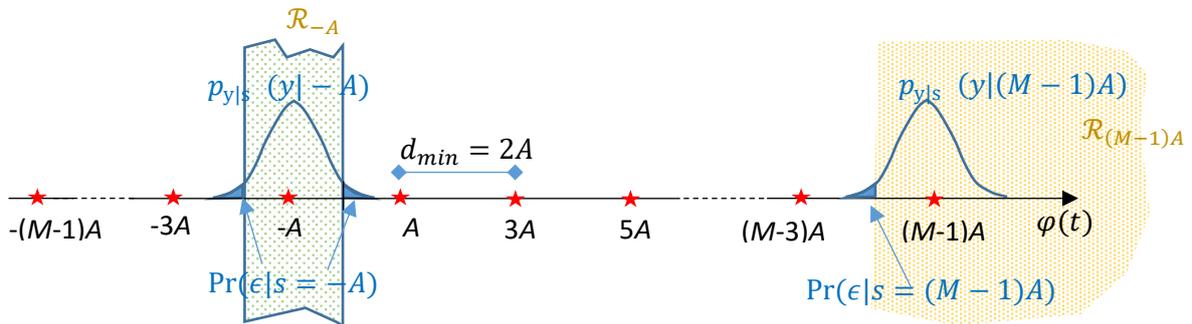


Figura 29. PAM genérico

Podemos ver que para o sinal $s = -A$, a região de decisão R_{-A} está no intervalo $y \in [-2A, 0]$, e podemos errar tanto para valores mais altos quanto para valores mais baixos, e o mesmo ocorre para todos os $M - 2$ sinais internos. Já para o sinal $s = M - 1$, a região de decisão $R_{(M-1)A}$ está no intervalo $y \in [(M - 2)A, \infty]$, e só podemos errar em uma direção, e o mesmo ocorre para todos os dois sinais externos. Se o ruído for Gaussiano, portanto, a probabilidade de erro de símbolo é igual a

$$P(\epsilon|m) = \begin{cases} Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right) & , s = \pm(M - 1)A \\ 2Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right) & , \text{c.c.} \end{cases} \quad (80)$$

Como queremos a probabilidade de erro média, e lembrando que $\sigma_n = \frac{N_0}{2}$

⁵ Note que a codificação polar ou BPSK é igual a um 2-PAM.

$$P_e = \frac{1}{M} \left[2 Q \left(\frac{A}{\sigma_n} \right) + (M-1) 2 Q \left(\frac{A}{\sigma_n} \right) \right] = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}} \right) \quad (81)$$

Desejamos, porém, achar uma expressão que se relacione com a potência do sinal, ou, de maneira equivalente com a energia de símbolo média $E_s = P_{RX}/R_s$ ou com a energia de bit E_b .

Sabemos que a energia dos símbolos $E_{s_k} = \|s_k\|^2$, portanto, temos dois símbolos com energia A^2 , dois com energia $(3A)^2$, e assim por diante. A energia média será dada por

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{2}{M} \left[A^2 + (3A)^2 + (5A)^2 + \dots + ((M-1)A)^2 \right] \\ &= \frac{2A^2}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M-2}{2}} (2k+1)^2 = \frac{M^2-1}{3} A^2 \end{aligned} \quad (82)$$

Portanto, podemos achar uma relação entre a amplitude A e a energia de símbolo R_s

$$A = \sqrt{\frac{3E_s}{M^2-1}} \quad (83)$$

Substituindo na expressão da probabilidade de erro, e lembrando que $E_s = \log_2 M E_b$, temos que a probabilidade de erro de símbolo é dada por

$$P_{e,PAM} = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 E_s}{M^2-1 N_0}} \right) = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M E_b}{M^2-1 N_0}} \right) \quad (84)$$

No caso de erros, a probabilidade é extremamente alta de que o sinal tenha caído na região de decisão de um sinal vizinho. Se tivermos código de Gray iremos errar então apenas um de $n_b = \log_2 M$ bits. Desta forma, a probabilidade de erro de bits em relação à probabilidade de erro de símbolos é dada por

$$P_{b,Gray} \approx \frac{1}{\log_2 M} P_e \quad (85)$$

Exemplo 12

Vamos repetir o Exemplo 6, porém com 4-PAM e 8-PAM, em vez de BPSK. Relembrando, utilizamos pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0,25$ e uma banda de 200kHz. Temos ruído com $\frac{N_0}{2} = 170$ dBm/Hz e uma atenuação de $L = 120$ dB. Se desejarmos uma $BER \leq 10^{-4}$, qual a potência de transmissão necessária? Qual a taxa de bits alcançada.

Solução:

Para BPSK (ou 2-PAM), encontramos uma taxa de bits de 160kbps e uma potência de 13,4dBm.

Em todos os casos a taxa de símbolos é

$$R_s = \frac{B_T}{1+\rho} = 160 \text{ kbauds}$$

Para 4-PAM, a taxa de bits é dada por

$$R_b = \log_2 4 R_s = 320 \text{ kbps}$$

e, baseado no requisito de BER, achamos a potência necessária

$$P_b = \frac{1}{2} \frac{3}{2} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{5N_0}} \right) \leq 10^{-4} \Rightarrow Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{5N_0}} \right) < \frac{4}{3} \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 33,228$$

$$E_s = 33,228(N_0) = 6,646 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$P_{TX} = L P_{RX} = L R_s E_s = 10^{12} (1,06 \times 10^{-13}) W = 0,106 W = 20,3 \text{ dBm}$$

Ou seja, dobramos a taxa em relação ao BPSK, mas precisamos quase de 7dB a mais, ou seja, 5x mais potência aproximadamente.

Vamos repetir agora para o 8-PAM.

$$R_b = \log_2 8 R_s = 480 \text{ kbps}$$

e, baseado no requisito de BER, achamos a potência necessária

$$P_b = \frac{1}{3} \frac{7}{4} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{21N_0}} \right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 134,614$$

$$E_s = 6,69 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$P_{TX} = L P_{RX} = L R_s E_s = 10^{12} (1,06 \times 10^{-13}) W = 0,431 W = 26,3 \text{ dBm}$$

Agora, aumentamos a taxa 50% relação ao 4-PAM, mas precisamos de 3dB a mais, ou seja, 2x mais potência aproximadamente.

Como vemos no exemplo, temos um compromisso entre a eficiência espectral ($\eta = R_b/B_T$) e a potência necessária.

Lembrando que $M = 2^{n_b}$, e supondo que temos a mesma banda, a razão entre as eficiências espectrais é

$$\frac{\eta_{M-PAM}}{\eta_{BPSK}} = \log_2 M = n_b, \quad (86)$$

ou seja, cresce linearmente com n_b .

Sabemos ainda que a probabilidade de erro de bit é dominada pelo argumento da função Q . Sendo assim para um mesmo BER, se compararmos a energia por bit necessária em um M-PAM com um BPSK, e temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \frac{2E_{b,BPSK}}{N_0} &\approx \frac{6 \log_2 M E_{b,M-PAM}}{M^2 - 1 N_0} \\ \Rightarrow \frac{E_{b,M-PAM}}{E_{b,BPSK}} &\approx \frac{M^2}{3 \log_2 M} = \frac{2^{2n_b}}{3n_b} \end{aligned} \quad (87)$$

Já a relação entre as potências é dada por

$$\frac{P_{RX,M-PAM}}{P_{RX,BPSK}} = \frac{E_{s,M-PAM}}{E_{s,BPSK}} = \log_2 M \frac{E_{b,M-PAM}}{E_{b,BPSK}} = \frac{2^{2n_b}}{3} \quad (88)$$

ou seja, a potência cresce exponencialmente com o número de bits por símbolos, e o aumento na taxa de bits tem um custo muito alto em termos de potência.

Na Figura 30 vemos as curvas de desempenho para vários M-PAM, em termos de E_b/N_0 e em termos de E_s/N_0 .

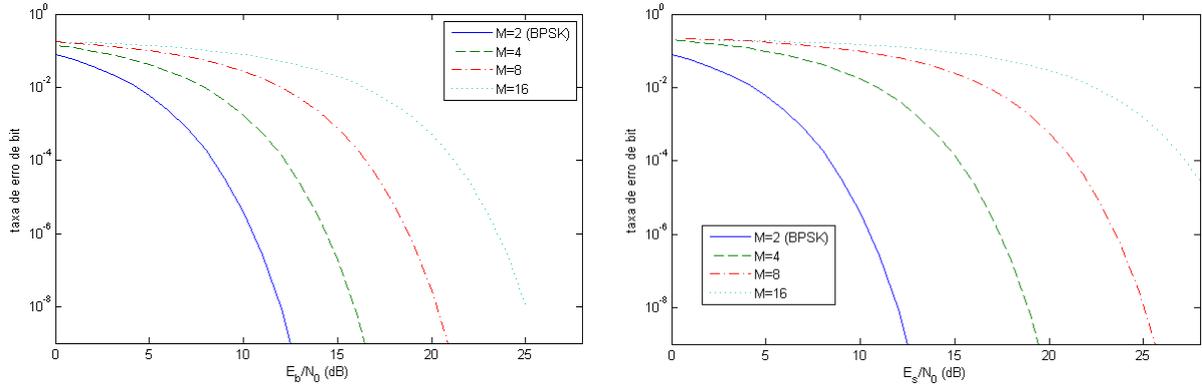


Figura 30. Desempenho de M-PAM

c. QAM (Quadrature Amplitude Modulation) e PSK (Phase Shift Keying)

Uma classe importante de esquemas de modulação são os esquemas em quadratura, em que as bases ortonormais são dadas por

$$\begin{aligned}\varphi_I(t) &= \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \\ \varphi_Q(t) &= \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t)\end{aligned}\quad (89)$$

em que $g(t)$ é um pulso normalizado, $E_g = 1$. $\varphi_I(t)$ e $\varphi_Q(t)$ são as funções base em fase (*in-phase*) e em quadratura, respectivamente, e pode ser mostrado facilmente que elas são (praticamente) ortogonais, desde que a banda de $g(t)$ seja muito menor que f_c , o que normalmente ocorre.

Neste caso, os sinais enviados podem ser escritos como

$$\begin{aligned}s_m(t) &= s_{m,I}\varphi_I(t) + s_{m,Q}\varphi_Q(t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) [s_{m,I} \cos(2\pi f_c t) + s_{m,Q} \sin(2\pi f_c t)]\end{aligned}\quad (90)$$

É usual também representarmos os vetores de sinais $\mathbf{s}_m = [s_{m,I}, s_{m,Q}]$ pelo valor complexo $s_m = s_{m,I} + j s_{m,Q}$. Desta forma os sinais podem ser reescritos como

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \mathcal{R}e \{ s_m e^{-j2\pi f_c t} \}\quad (91)$$

em que $\tilde{s}(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) s_m$ é a chamada envoltória complexa do sinal.

Desta forma, é fácil verificar que alguns cálculos podem ser feitos com cálculos em números complexos, como

$$\begin{aligned}E_m &= s_{m,I}^2 + s_{m,Q}^2 = |s_m|^2 \\ d(s_k(t), s_l(t)) &= |s_k - s_l|.\end{aligned}\quad (92)$$

Além disso, por ser um número complexo podemos reescrever

$$s_m = |s_m|e^{j\theta_m} = \sqrt{E_m}e^{j\theta_m} \quad (93)$$

e o sinal como

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \sqrt{\frac{2E_m}{E_g}} g(t) \mathcal{R}e\{e^{j(\theta_m - 2\pi f_c t)}\} \\ &= \sqrt{\frac{2E_m}{E_g}} g(t) [s_{m,I} \cos(2\pi f_c t + \theta_m) + s_{m,Q} \sin(2\pi f_c t + \theta_m)]. \end{aligned} \quad (94)$$

De modo geral, estes esquemas de modulação são chamados de QAM (*quadrature amplitude modulation*), em que podemos variar tanto a amplitude, com $\sqrt{E_m}$, quanto a fase θ_m de uma portadora complexa ou de modo equivalente, as amplitudes dos componentes em fase e quadratura, $s_{m,I}$ e $s_{m,Q}$, respectivamente.

Vamos ver agora como avaliar o desempenho destes esquemas.

M-QAM com constelação quadrada

Uma categoria importante são os QAM com constelação quadrada, com $M = 2^{2k}$, ou seja, $M = 4; 16; 64; 256; 1024; \dots$. Vemos alguns exemplos nas Figura 31 e Figura 32.

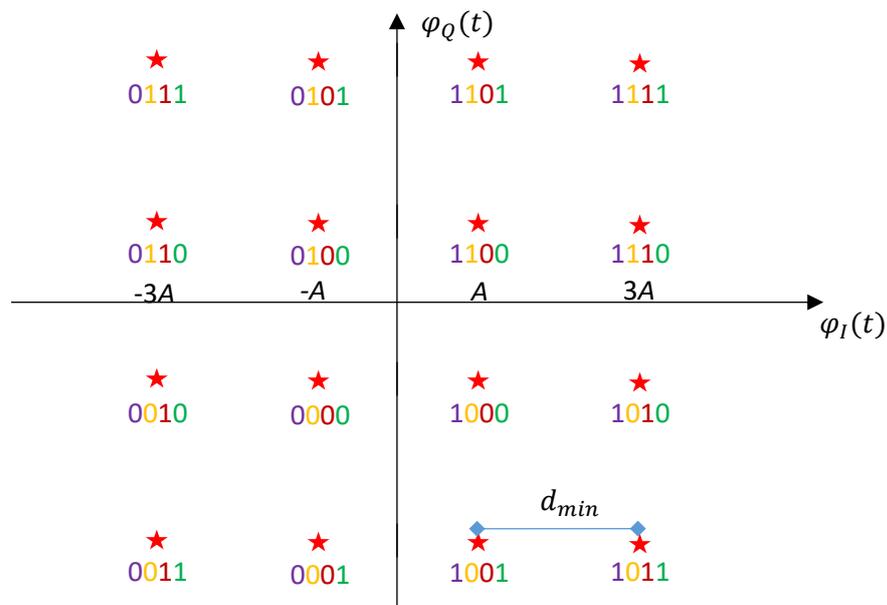


Figura 31. 16-QAM

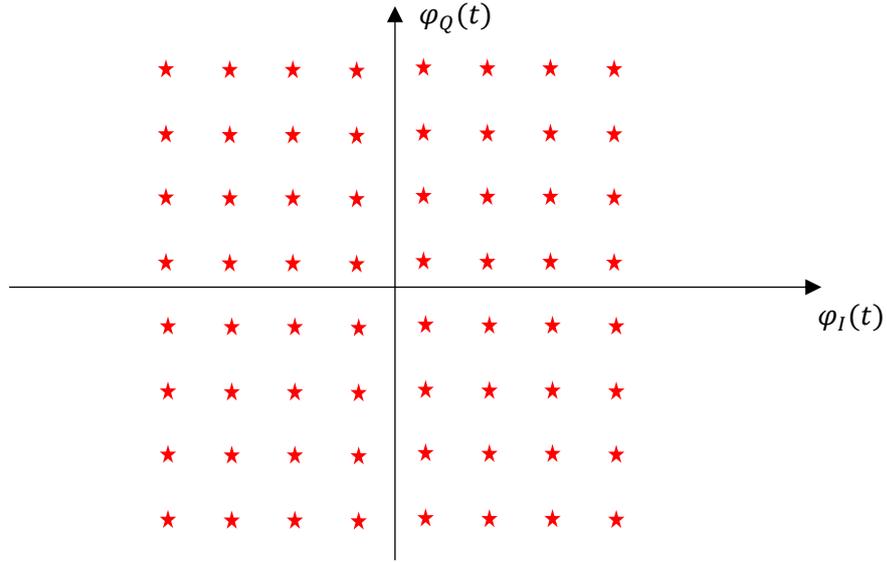


Figura 32. 64-QAM

Neste caso, um M-QAM é igual à combinação de duas constelações \sqrt{M} -PAM independentes, uma em fase e quadratura, e consideramos uma detecção correta no QAM se a detecção for correta nos dois PAM. Neste caso a probabilidade de acerto é dada por

$$\begin{aligned} \Pr_{M-QAM}(C) &= [\Pr_{\sqrt{M}-PAM}(C)]^2 = (1 - P_{e,\sqrt{M}-PAM})^2 \\ &= 1 - 2P_{e,\sqrt{M}-PAM} + P_{e,\sqrt{M}-PAM}^2 \end{aligned} \quad (95)$$

Se tivermos $P_{e,\sqrt{M}-PAM} \ll 1$, o que usualmente ocorre nas situações de interesse, a probabilidade de erro é dada por

$$P_{e,M-QAM} = 1 - \Pr_{M-QAM}(C) \approx 2P_{e,\sqrt{M}-PAM} \quad (96)$$

Agora, $P_{e,\sqrt{M}-PAM}$ é conhecida, e, substituindo M por \sqrt{M} em (84), temos que, **para constelações quadradas**,

$$P_{e,M-QAM} = \frac{4(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M - 1 N_0}} \right) \quad (97)$$

Supondo ainda que temos codificação de Gray, o que é possível para todas as constelações quadradas,

$$P_{b,M-QAM} = \frac{1}{\log_2 M} P_{e,M-QAM} \quad (98)$$

Na Figura 31 podemos ver exemplos de codificação de Gray, que podem ser construídos a partir de uma lógica simples. Por exemplo, para o 16-QAM podemos usar a seguinte lógica. A cada símbolo enviamos quatro bits, $b_0 b_1 b_2 b_3$, e na constelação 16-QAM da Figura 31 os bits podem ser mapeados da seguinte maneira⁶

$$b_0 = \begin{cases} 0 & s_I < 0 \\ 1 & s_I > 0 \end{cases}, b_1 = \begin{cases} 0 & s_Q < 0 \\ 1 & s_Q > 0 \end{cases} \quad (99)$$

⁶ A ordem dos bits pode variar, dependendo da tecnologia, mas o efeito é o mesmo

$$b_2 = \begin{cases} 0 & |s_I| < 2A \\ 1 & |s_I| > 2A \end{cases}, b_3 = \begin{cases} 0 & |s_Q| < 2A \\ 1 & |s_Q| > 2A \end{cases}$$

As expressões acima podem ser utilizadas também para a detecção do sinal bit a bit.

Da mesma forma o sinal pode ser gerado a partir dos bits pela expressão

$$s = (2b_0 - 1)2A - (-1)^{b_0} (2b_2 - 1) A + j(2b_1 - 1)2A - (-1)^{b_1} (2b_3 - 1) A \quad (100)$$

Lógicas semelhantes podem ser encontradas para outras constelações quadradas ou retangulares.

Exemplo 13

Vamos repetir o Exemplo 6, porém com 16-PAM e 16-QAM, em vez de BPSK. Relembrando, utilizamos pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0,25$ e uma banda de 200kHz. Temos ruído com $\frac{N_0}{2} = 170$ dBm/Hz e uma atenuação de $L = 120$ dB. Se desejarmos uma $BER \leq 10^{-4}$, qual a potência de transmissão necessária? Qual a taxa de bits alcançada.

Solução

A taxa de bits é tanto para 16-PAM quanto para 16-QAM

$$R_s = \frac{B_T}{1 + \rho} = 160 \text{ kbauds}$$

Para 4-PAM, a taxa de bits é dada por

$$R_b = \log_2 M R_s = 4 \frac{B_T}{1 + \rho} = 4(160k) = 640 \text{ kbps}$$

Baseado no requisito de BER , achamos a potência necessária para o 16-PAM

$$P_b = \frac{1}{4} \frac{15}{8} Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{85 N_0}} \right) \leq 10^{-4} \Rightarrow Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{85 N_0}} \right) < \frac{32}{15} \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 527,5$$

$$E_s = 33,228(N_0) = 6,646 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$P_{TX} = L P_{RX} = L R_s \frac{E_s}{N_0} N_0 = 10^{12} (1,06 \times 10^{-13}) W = 1,69 W = 32,3 \text{ dBm}$$

e para o 16-QAM

$$P_b = \frac{1}{4} 3Q \left(\sqrt{\frac{3E_s}{15 N_0}} \right) \leq 10^{-4} \Rightarrow Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{5 N_0}} \right) < \frac{4}{3} \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \geq 66,45$$

$$E_s = 33,228(N_0) = 1,33 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$P_{TX} = L P_{RX} = L R_s \frac{E_s}{N_0} N_0 = 10^{12} (1,06 \times 10^{-13}) W = 0,213 W = 23,3 \text{ dBm}$$

Como vimos no Exemplo 13, o QAM é bem mais eficiente que o PAM para a mesma ordem de modulação M . Entretanto, o PAM é utilizado em alguns sistemas, como por exemplo no padrão

de TV digital dos Estados Unidos, por permitir o uso de AM-VSB (*Vestigial Side Band*), sendo assim compatível com o espectro de sistemas de TV analógicos.

Na Figura 33 vemos a BER de uma transmissão 16-QAM, usando tanto a curva teórica quanto resultados de simulação. Podemos ver que para razões sinal-ruído (RSR) relativamente altas, os resultados se aproximam bastante, indicando a validade da aproximação. Para RSR pequenas a aproximação é um pouco otimista, mas estes pontos representam BERs muito altas para sistemas práticos.

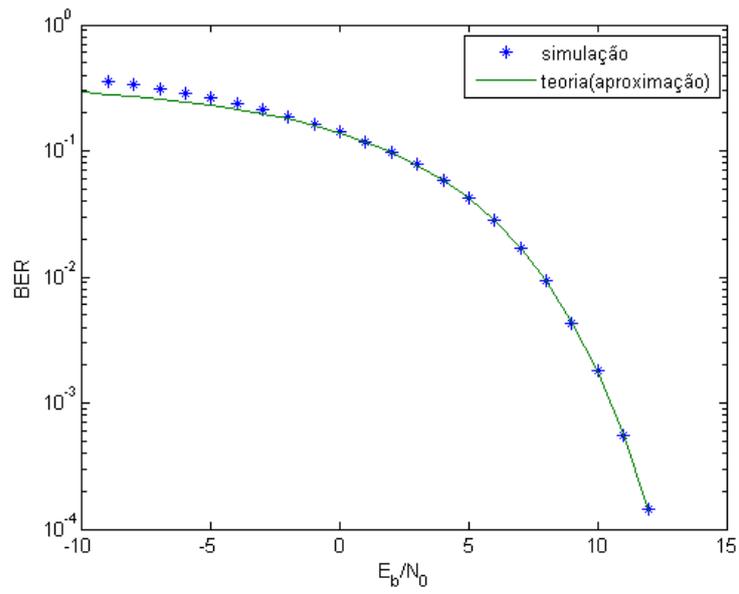


Figura 33. BER de um esquema 16-QAM

Na Figura 34 vemos o efeito do ruído na constelação de um 16-QAM, para diferentes RSR.

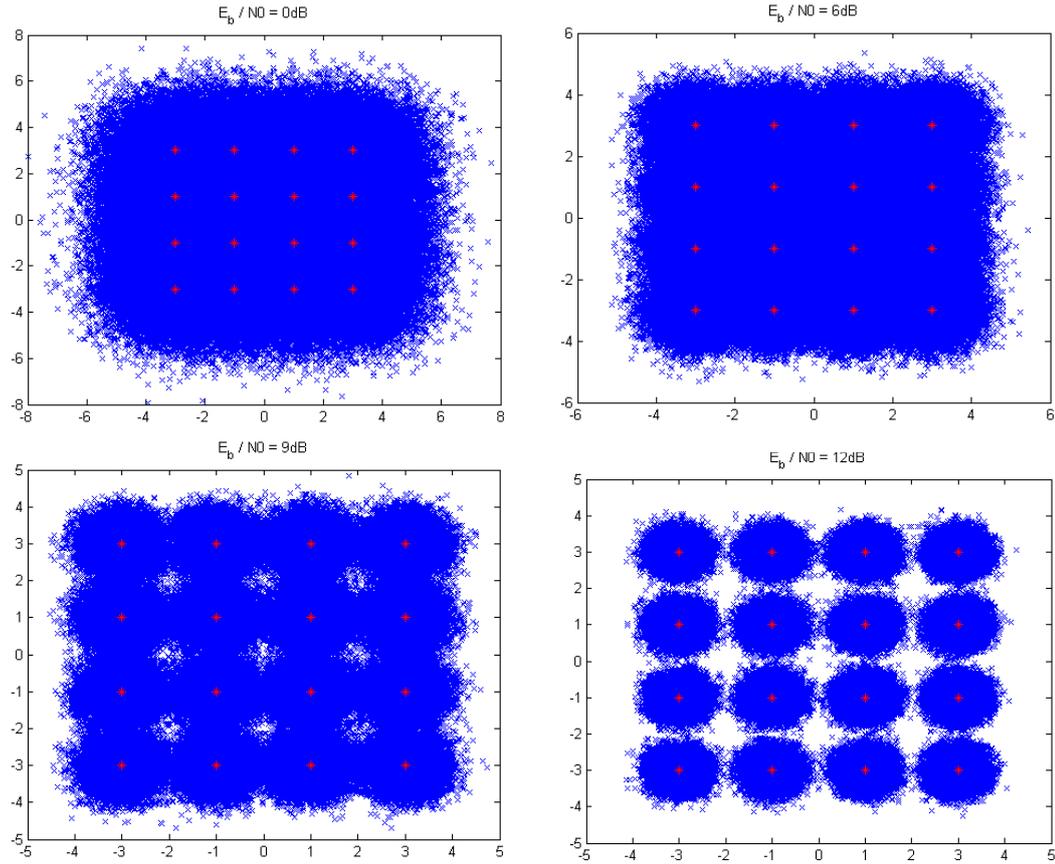


Figura 34. Constelação com ruído

M-QAM genérico e o limitante da união

Para constelações não quadradas precisamos de uma outra abordagem para o cálculo da probabilidade de erro. Neste caso podemos relembrar do limitante da união

$$\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B) \quad (101)$$

No nosso caso, temos que a probabilidade de erro, dado que um certo símbolo \mathbf{s}_m foi enviado, é a probabilidade de que o sinal recebido \mathbf{y} esteja mais próximo de qualquer outro sinal \mathbf{s}_l , $l \neq m$, ou seja,

$$\Pr(\epsilon|\mathbf{s}_m) = \Pr\left(\left(d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_1) < d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m)\right) \cup \left(d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_2) < d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m)\right) \cup \dots \cup \left(d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_l) < d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m)\right) \cup \dots \cup \left(d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_M) < d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m)\right)\right) \quad (102)$$

$l \neq m$

Pelo limitante da união, esta probabilidade pode ser escrita como

$$\Pr(\epsilon|\mathbf{s}_m) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M \Pr(d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_k) < d(\mathbf{y}, \mathbf{s}_m)). \quad (103)$$

Ou seja, a expressão acima se resume à soma de probabilidades de erro binárias, entre dois símbolos \mathbf{s}_k e \mathbf{s}_m , que, como já vimos, depende da distância $d_{k,m} = d(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_m)$ entre eles, e é dada por $P_e = Q\left(\frac{d_{k,m}}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{k,m}^2}{2N_0}}\right)$. Portanto, podemos reescrever o limitante da probabilidade de erro como

$$\Pr(\epsilon|\mathbf{s}_m) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M Q\left(\sqrt{\frac{d_{k,m}^2}{2N_0}}\right) \quad (104)$$

Agora, sabemos que a função $Q(\cdot)$ decai muito rapidamente com o aumento da distância, de modo que, para razões-sinal-ruído relativamente altas, o somatório acima será dominado pelas distâncias mais curtas d_{min} , ou seja, se houver erro, eles ocorrerão com probabilidade muito alta para os sinais vizinhos. Considerando ainda que o limitante acima é bastante apertado, e pode ser usado como uma aproximação, a probabilidade de erro pode ser aproximada por

$$\Pr(\epsilon|\mathbf{s}_m) \approx N_{neigh,m} Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right) \quad (105)$$

em que $N_{neigh,m}$ é o número de sinais vizinhos ao sinal \mathbf{s}_m .

A probabilidade de erro média do esquema de modulação é, portanto,

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Pr(\epsilon|\mathbf{s}_m) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M N_{neigh,m} Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right) \quad (106)$$

$$P_e \approx \bar{N}_{neigh} Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$$

em que \bar{N}_{neigh} é o número médio de vizinhos

$$\bar{N}_{neigh} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M N_{neigh,m} \quad (107)$$

Vamos usar esta abordagem em alguns exemplos

Exemplo 14 16-QAM quadrado

Já vimos como calcular a probabilidade de erro de um sistema QAM baseado na probabilidade de erro de um sistema PAM. Vamos agora utilizar a abordagem vista nesta seção.

Supondo amplitudes $\pm A, \pm 3A$, em fase e quadratura, a distância mínima é dada por $d_{min} = 2A$.

Os quatro pontos internos $\pm A \pm jA$ têm 4 vizinhos cada, os quatro pontos externos, $\pm 3A \pm j3A$ têm 2 vizinhos cada, e os oito outros pontos têm 3 vizinhos cada. Desta forma

$$\bar{N}_{neigh} = \frac{1}{16} (4 \times 2 + 8 \times 3 + 4 \times 4) = 3$$

$$P_e \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{4A^2}{2N_0}}\right)$$

Queremos achar P_e em função de E_s , e para isso sabemos que

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} [4 \times ((\pm A)^2 + (\pm A)^2) + 8 \times ((\pm A)^2 + (\pm 3A)^2) + 4 \times ((\pm 3A)^2 + (\pm 3A)^2)] \\
&= \frac{1}{16} [4 \times 2A^2 + 8 \times 10A^2 + 4 \times 18A^2] = 10A^2 \\
&\Rightarrow A^2 = \frac{E_s}{10}
\end{aligned}$$

Substituindo, temos que

$$P_e \approx 3Q \left(\sqrt{\frac{1 E_s}{5 N_0}} \right)$$

que é exatamente o obtido por (97).

Exemplo 15 8-QAM

Não podemos criar uma constelação quadrada com $M = 8$, mas vamos avaliar aqui duas constelações diferentes, vistas na Figura 35.

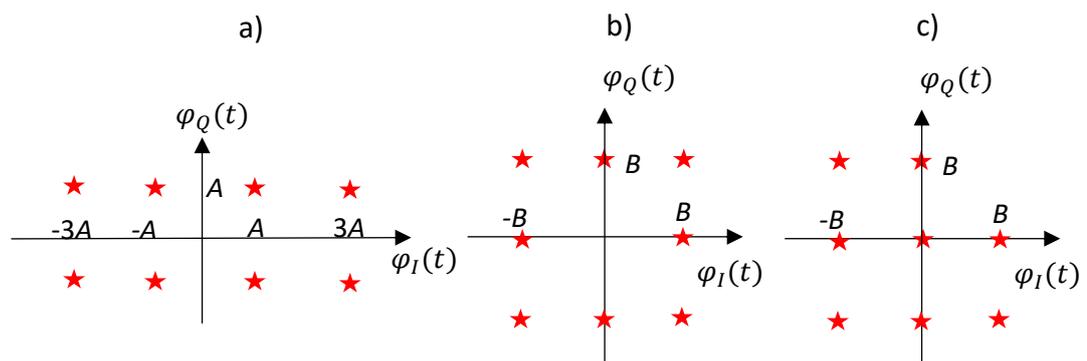


Figura 35. 8-QAM

Para a constelação (a),

$$\begin{aligned}
E_s &= \frac{1}{8} (4 \times 2A^2 + 4 \times 10A^2) = 6A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{E_s}{6} \\
\bar{N}_{neigh} &= \frac{1}{8} (4 \times 2 + 4 \times 3) = \frac{5}{2} \\
d_{min} &= 2A \\
P_e &\approx \frac{5}{2} Q \left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}} \right) = \frac{5}{2} Q \left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}} \right) = \frac{5}{2} Q \left(\sqrt{\frac{1 E_s}{3 N_0}} \right)
\end{aligned}$$

Figura 36. 8-QAM

Para a constelação (b),

$$E_s = \frac{1}{8} (4 \times B^2 + 4 \times 2B^2) = \frac{3}{2} B^2 \Rightarrow B^2 = \frac{2E_s}{3}$$

$$\bar{N}_{neigh} = 2$$

$$d_{min} = B$$

$$P_e \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{B^2}{2N_0}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{1}{3} \frac{E_s}{N_0}} \right)$$

Ou seja, a constelação (b) tem uma probabilidade de erro levemente menor, por causa apenas do número de vizinhos, mas tem o argumento da função Q igual, o que representa pouca diferença para razões sinal-ruído (RSR) altas.

Já a constelação (c), em que movemos apenas um ponto, reduzimos a energia média enquanto mantemos a distância mínima, e, neste caso,

$$E_s = \frac{1}{8}(4 \times B^2 + 3 \times 2B^2) = \frac{5}{4}B^2 \Rightarrow B^2 = \frac{4E_s}{5}$$

$$\bar{N}_{neigh} = \frac{1}{8}(5 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4) = \frac{5}{2}$$

$$P_e \approx \frac{5}{2}Q \left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}} \right) = \frac{5}{2}Q \left(\sqrt{\frac{B^2}{2N_0}} \right) = \frac{5}{2}Q \left(\sqrt{\frac{2}{5} \frac{E_s}{N_0}} \right)$$

Temos um desempenho melhor, já que o argumento da função $Q()$ é maior, e para uma mesma taxa de erro de símbolo, $\frac{E_{s,c}}{E_{s,a}} = \frac{5}{2} \frac{1}{3} = 0,833$, ou seja precisamos de 83% da potência aproximadamente com a constelação (c). Porém, neste caso não podemos utilizar uma codificação de Gray, já que o ponto central tem 4 vizinhos, em uma constelação de 3 bits.

M-PSK (Phase Shift Keying)

Vimos em (93) que podemos representar os sinais por números complexos em um espaço de sinais bidimensional. Se variarmos apenas a fase temos um sinal M-PSK. O BPSK é um caso particular, com $M = 2$. Para $M = 4$ temos o QPSK (quaternary PSK). Os sinais podem então ser escritos como

$$s_m = \sqrt{E_s} e^{j(2\pi m/M + \theta_0)}, 0 \leq m < M \quad (108)$$

Exemplos de constelações PSK podem ser vistas na Figura 37, com codificação de Gray também.

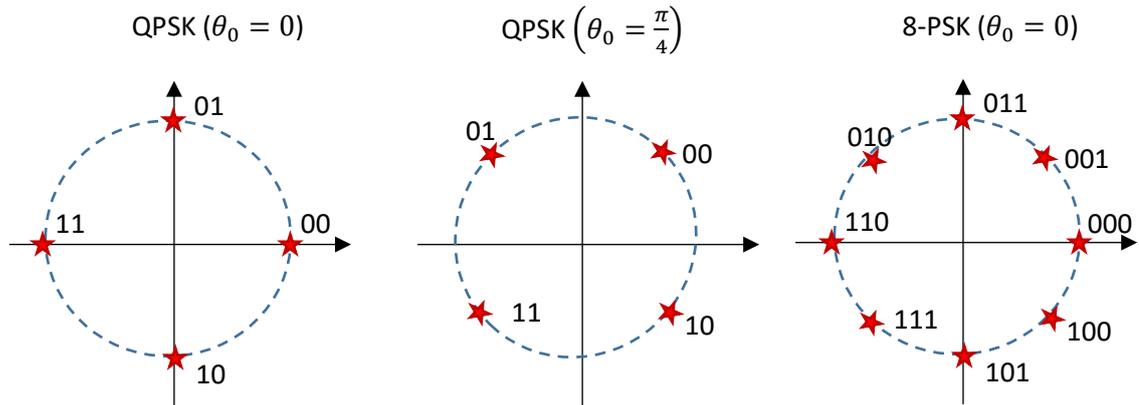


Figura 37. PSK

Vamos avaliar agora a probabilidade de erro. Podemos ver que para o QPSK com $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ temos na verdade dois BPSKs, um em fase e um em quadratura. Desta forma

$$P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = \frac{P_{e,QPSK}}{2} \quad (109)$$

Para constelações de maior ordem, vamos calcular a probabilidade de erro, com base na Figura 38.

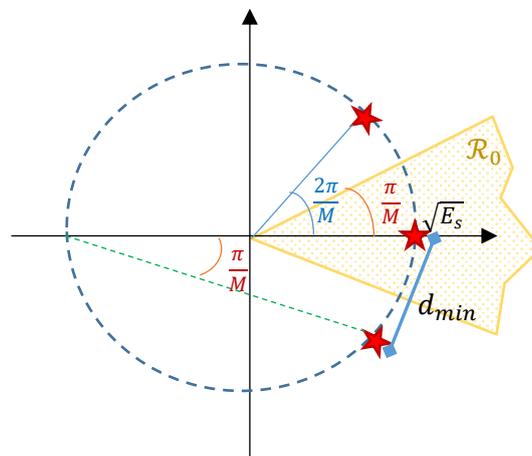


Figura 38. Probabilidade de erro em PSK

Podemos ver a região de decisão \mathcal{R}_0 para o símbolo s_0 , que consiste na região com ângulos $\theta \in \left[-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}\right]$. Levando-se em conta que todos os sinais têm uma região semelhante, e que os componentes de ruído são independentes e com variância $\frac{N_0}{2}$, a probabilidade de acerto é dada por

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C|s_0) = \iint_{y_I, y_Q \in \mathcal{R}_0} p_{y_I, y_Q}(y_I, y_Q) dy_I dy_Q \\
&= \frac{1}{\pi N_0} \int_0^\infty \int_{-x_I \tan(\frac{\pi}{M})}^{x_I \tan(\frac{\pi}{M})} e^{-\frac{y_Q^2}{N_0}} dy_Q e^{-\frac{(y_I - \sqrt{E_s})^2}{N_0}} dy_I \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[1 - 2Q\left(x \tan\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \right] \exp\left(-\left(x - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)^2 / 2\right) dx
\end{aligned} \tag{110}$$

A fórmula exata acima não tem uma expressão fechada e precisa ser calculada numericamente. Podemos também calcular a probabilidade de erro usando a aproximação em (106). Podemos ver pelo triângulo inscrito no círculo que

$$\sin \frac{\pi}{M} = \frac{d_{min}}{2\sqrt{E_s}} \Rightarrow d_{min}^2 = E_s \sin^2 \frac{\pi}{M} \tag{111}$$

e, observando que todos os sinais têm 2 vizinhos (exceto no BPSK),

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right). \tag{112}$$

Figura 39. Desempenho de PSK e QAM

Na Figura 40 podemos ver o desempenho de esquemas PSK e QAM de diferentes ordens de modulação. As constelações QAM são quadradas ou retangulares na figura. Podemos ver que, similarmente ao PAM, quanto maior a ordem de modulação M, maior a energia necessária para uma mesma BER. Vemos ainda que com exceção de M=8, o QAM necessita de uma energia menor que o PSK equivalente, e por isso raramente utilizamos PSK com ordem de modulação maior que 8. Além disso, vemos que constelações QAM retangulares, como 32-QAM, têm um desempenho semelhante a constelações quadradas de ordem de modulação mais alta, como o 64-QAM, e por este motivo são raramente utilizadas.

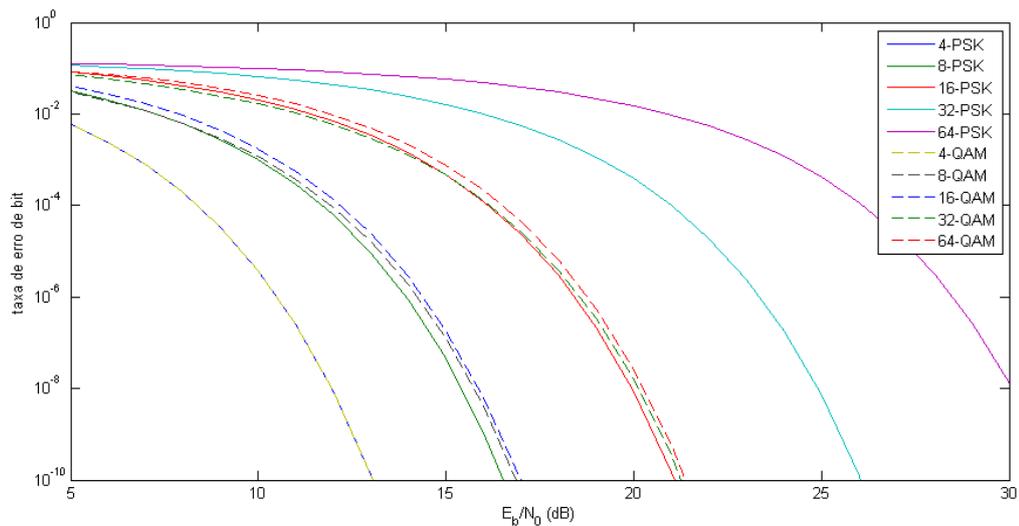


Figura 40. Desempenho de M-PSK e M-QAM

No Exemplo 16 utilizamos as expressões de cálculo de probabilidade de erro para PSK e QAM.

Exemplo 16 Desempenho de PSK e QAM

Um sistema de transmissão ocupa uma banda de 300kHz e utiliza pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0,5$. Sabendo que no receptor temos ruído branco com $\frac{N_0}{2} = -90$ dBm/Hz, e que desejamos uma $BER \leq 10^{-6}$, encontre a **taxa de bits R_b** alcançada, a **eficiência espectral η** , e a **potência P_{RX}** necessária no receptor, para os seguintes esquemas de modulação: a) BPSK, b) QPSK, c) 8-PSK, e d) 16-QAM

Solução:

Para todos os casos, temos que

$$R_s = \frac{B_T}{1 + \rho} = 200 \text{ kbauds}$$

$$N_0 = 2 \times 10^{-12} \text{ W/Hz}$$

a) BPSK(M=2)

$$R_b = \log_2 M R_s = 200 \text{ kbps}$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_T} = \frac{200 \times 10^3}{300 \times 10^3} = 0,67 \text{ bps/Hz}$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 11,30$$

$$P_{RX} = E_b R_b = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 11,3 \times (2 \times 10^{-12}) \times 200 \times 10^3 = 4,5 \times 10^{-6} \text{ W} \\ = -53,4 \text{ dBm}$$

b) QPSK(M=4)

$$R_b = 2R_s = 400 \text{ kbps}$$

$$\eta = \frac{400 \times 10^3}{300 \times 10^3} = 1,33 \text{ bps/Hz}$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 11,30$$

$$P_{RX} = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 11,3 \times (2 \times 10^{-12}) \times 400 \times 10^3 = 9 \times 10^{-6} \text{ W} = 50,4 \text{ dBm}$$

c) 8-PSK(M=8)

$$R_b = 3R_s = 600 \text{ kbps}$$

$$\eta = \frac{600 \times 10^3}{300 \times 10^3} = 2 \text{ bps/Hz}$$

$$P_b = \frac{1}{3} 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{8} \right) = 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = 74,5$$

$$P_{RX} = \frac{E_s}{N_0} N_0 R_s = 74,5 \times (2 \times 10^{-12}) \times 200 \times 10^3 = 2,98 \times 10^{-5} \text{W} = -45,3 \text{dBm}$$

d) 16-QAM(M=16)

$$R_b = 4R_s = 800 \text{kbps}$$

$$\eta = \frac{800 \times 10^3}{300 \times 10^3} = 2,67 \text{ bps/Hz}$$

$$P_b = \frac{1}{4} 3Q \left(\sqrt{\frac{1}{5} \frac{E_s}{N_0}} \right) = 10^{-6} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = 110,2$$

$$P_{RX} = \frac{E_s}{N_0} N_0 R_s = 74,5 \times (2 \times 10^{-12}) \times 200 \times 10^3 = 4,4 \times 10^{-5} \text{W} = -43,5 \text{dBm}$$

Como vemos, à medida que aumentamos a ordem de modulação, aumentamos também a taxa (e a eficiência espectral), mas precisamos de uma potência cada vez maior.

d. FSK, PPM, e modulação ortogonal

Nos esquemas PAM, QAM e PSK variamos as amplitudes e as fases de uma portadora. Assim como em modulação analógica, podemos também variar a frequência, no que chamamos de FSK (frequency shift keying).

Vamos iniciar com um sistema binário (BFSK), com o seguinte mapeamento

$$\begin{aligned} b = 0 &\rightarrow q(t) = A \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \left(2\pi \left(f_c - \frac{\Delta f}{2} \right) t \right), & 0 < t \leq T_s \\ b = 1 &\rightarrow p(t) = A \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \left(2\pi \left(f_c + \frac{\Delta f}{2} \right) t \right), & 0 < t \leq T_s \end{aligned} \quad (113)$$

ou seja, duas portadoras com frequência espaçadas Δf , com amplitude constante.

Podemos ver o exemplo de um sinal FSK na Figura 41.

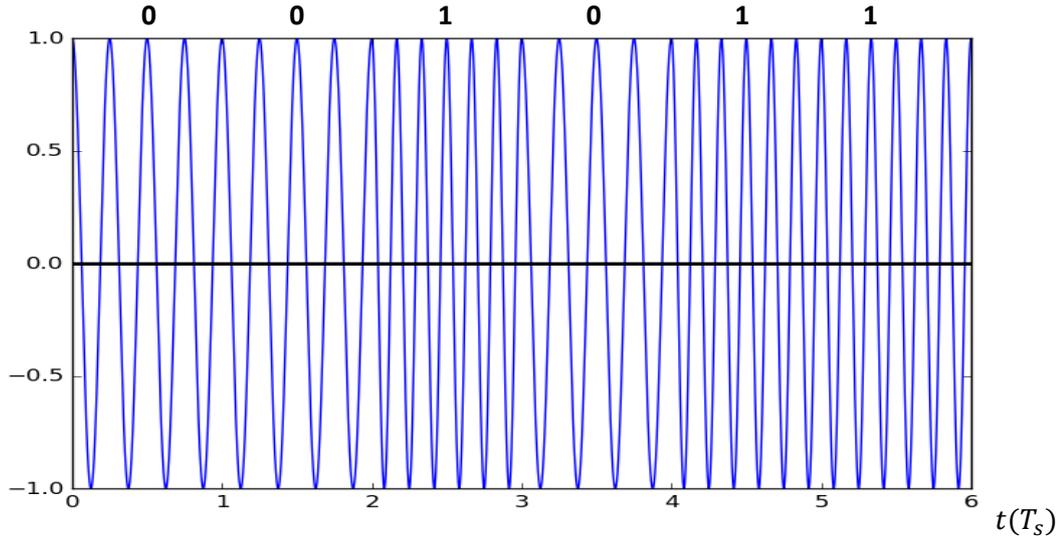


Figura 41. Sinal FSK

Ambos os pulsos têm a mesma energia $E_p = E_q = E_b = A^2$, e vamos agora calcular sua probabilidade de erro, baseado em (24). Para isso, vamos calcular

$$\begin{aligned}
 E_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt \\
 &= \int_0^{T_s} \frac{2A^2}{T_s} \cos\left(2\pi\left(f_c - \frac{\Delta f}{2}\right)t\right) \cos\left(2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{T_s} \left[\int_0^{T_s} \cos(4\pi f_c t) dt + \int_0^{T_s} \cos(2\pi \Delta f t) dt \right] \\
 &\cong \frac{A^2}{T_s} \frac{1}{2\pi \Delta f} \sin(2\pi \Delta f t) \Big|_0^{T_s} = \frac{A^2}{T_s} \frac{\sin(2\pi \Delta f T_s)}{2\pi \Delta f} = A^2 \text{sinc}(2\pi \Delta f T_s)
 \end{aligned} \tag{114}$$

A probabilidade de erro é dada por

$$\begin{aligned}
 P_{b,BFSK} &= Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b - 2E_b \text{sinc}(2\pi \Delta f T_s)}{2N_0}}\right) \\
 &= Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1 - \text{sinc}(2\pi \Delta f T_s))}{N_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{115}$$

Se quisermos minimizar a BER devemos maximizar o argumento da função $Q(\cdot)$, ou seja, minimizarmos $\text{sinc}(2\pi \Delta f T_s)$. Sabemos que o valor mínimo de um sinc é dado por $\min \text{sinc}(x) = -0,217$, com $x_{min} = 1,43\pi$. O mínimo ocorrerá, portanto, com

$$\begin{aligned}
 2\pi \Delta f_{FSK-opt} T_s &= 1,43\pi \Rightarrow \Delta f_{FSK-opt} = 0,715 \\
 P_{b,FSK-opt} &= Q\left(\sqrt{1,217 \frac{E_b}{N_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{116}$$

Usualmente escolhemos, porém, um valor tal que as frequências sejam ortogonais, ou seja, $E_{pq} = 0$, o que é conseguido com

$$2\pi\Delta f_{FSK-ort}T_s = \pi \Rightarrow \Delta f_{FSK-ort} = \frac{T_s}{2} \quad (117)$$

$$P_{b,FSK-ort} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

A largura de banda do B-FSK pode ser aproximada pela regra de Carson para sinais FM, já que é também uma modulação de frequência. Lembrando que a frequência instantânea será $f_i(t) = f_c \pm \frac{\Delta f}{2}$, temos então

$$B_{FSK} \approx 2(\max|f_i(t) - f_c| + B) \approx \Delta f + 2R_s \quad (118)$$

em que $B \approx R_s$ pois consideramos pulso retangular, cujo lóbulo principal tem largura de banda R_s . Na Figura 42 vemos o exemplo de um espectro de um sinal FSK binário.

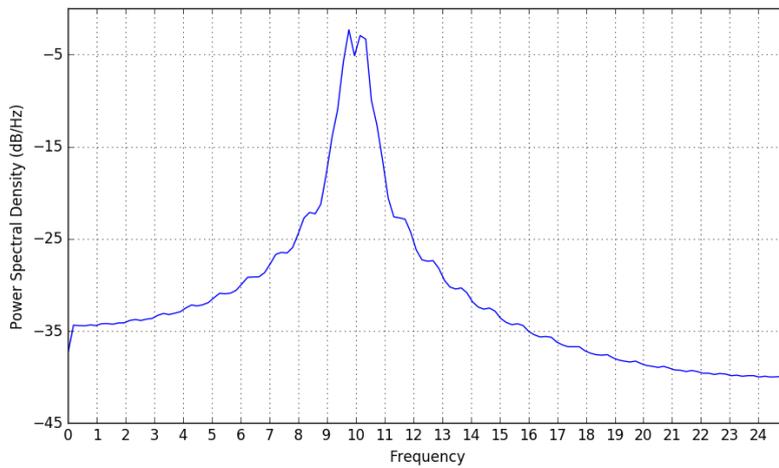


Figura 42. Espectro de sinal B-FSK ($f_c = 10\text{Hz}$, $\Delta f = R_s = 1\text{Hz}$, $B_{FSK} \approx 3\text{Hz}$)

Veremos agora o que ocorre em esquemas ortogonais não-binários. Neste caso cada sinal pode ser representado em uma dimensão ortogonal diferente, ou seja, $s_m(t) = A_m\varphi_m(t)$, $1 \leq m \leq M$.

Exemplos de esquemas ortogonais, com $1 \leq m \leq M$, são:

- M-FSK, com frequências espaçadas $\Delta f = \frac{R_s}{2}$

$$\varphi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos\left(2\pi\left(f_c + \left(m - \frac{M+1}{2}\right)\frac{R_s}{2}\right)t\right) \quad (119)$$

- M-PPM, em que os M sinais são representados por pulsos em posições diferentes, por exemplo, considerando pulsos retangulares,

$$\varphi_m(t) = \sqrt{\frac{M}{T_s}} \text{rect}\left(\frac{M\left(t - \frac{T_s}{M}\left(\frac{2m-1}{2}\right)\right)}{T_s}\right) \quad (120)$$

- Códigos de Walsh-Hadamard, que são construídos a partir de matrizes de Hadamard de ordem M . Uma matriz de Hadamard é construída iterativamente, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= [1] \\
 \mathbf{H}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{H}_{2^k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{2^{k-1}} & \mathbf{H}_{2^{k-1}} \\ \mathbf{H}_{2^{k-1}} & -\mathbf{H}_{2^{k-1}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{121}$$

Por exemplo,

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{122}$$

Cada sinal pode ser construído a partir de uma das linhas da matriz de Hadamard, que indica a amplitude de pulsos de largura T_s/M

Na Figura 43 vemos exemplos de esquemas ortogonais baseados em PPM ou em códigos de Walsh-Hadamard.

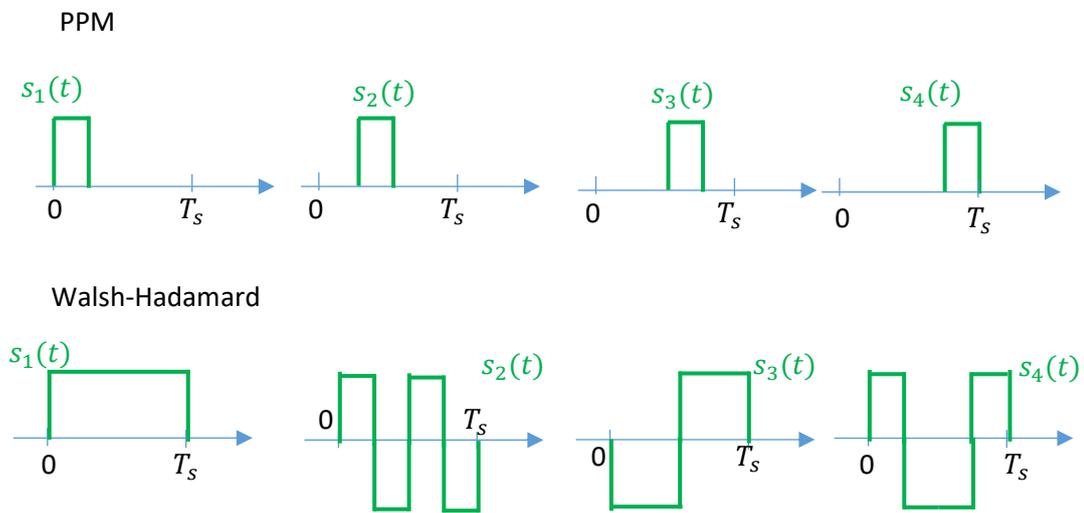


Figura 43. Exemplos de símbolos ortogonais (M=4)

Como já sabemos, a análise de desempenho independe das

Considerando que todos os sinais têm a mesma energia $E_m = A_m^2 = E_s$, os vetores dos sinais no espaço de sinais definido por $\{\varphi_m\}$ são dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_1 &= (\sqrt{E_s}, 0, 0, \dots, 0) \\
 \mathbf{s}_2 &= (0, \sqrt{E_s}, 0, \dots, 0) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{s}_M &= (0, 0, 0, \dots, \sqrt{E_s})
 \end{aligned} \tag{123}$$

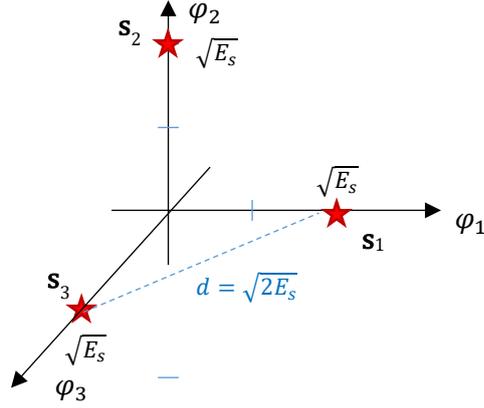


Figura 44. Constelação de sinal ortogonal

Pela simetria do sistema, podemos calcular a probabilidade de erro neste caso como $P_e = P(\epsilon|m = 1)$, ou seja, será igual à probabilidade de erro de um símbolo específico. Por exemplo, se enviarmos \mathbf{s}_1 , iremos receber o vetor ruidoso

$$\mathbf{y} = (\sqrt{E_s} + n_1, n_2, \dots, n_M). \quad (124)$$

Como vimos em (75), o receptor ótimo é aquele que encontra o índice m que maximiza $\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle - \frac{E_m}{2}$. Como E_m é igual para todos, queremos o índice que maximiza a medida $\mu_m = \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_m \rangle$. No caso de transmissão ortogonal, temos que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_1 \rangle = \sqrt{E_s}(\sqrt{E_s} + n_1) \\ \mu_2 &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_2 \rangle = \sqrt{E_s}n_2 \\ &\vdots \\ \mu_M &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_M \rangle = \sqrt{E_s}n_M \end{aligned} \quad (125)$$

A probabilidade de acerto é a probabilidade de que a métrica μ_1 seja a maior de todas, ou seja

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|\mathbf{s}_1) = \Pr\{\mu_1 > \mu_2, \mu_1 > \mu_3, \dots, \mu_1 > \mu_M | \mathbf{s}_1\} \\ &= \Pr\{\sqrt{E_s} + n_1 > n_2, \sqrt{E_s} + n_1 > n_3, \dots, \sqrt{E_s} + n_1 > n_M | \mathbf{s}_1\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{n_2 < \sqrt{E_s} + n, n_3 < \sqrt{E_s} + n, \dots, n_M < \sqrt{E_s} + n | \mathbf{s}_1\} p_{n_1}(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Pr\{n_2 < \sqrt{E_s} + n | \mathbf{s}_1\}]^{M-1} p_{n_1}(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E_s}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \right]^{M-1} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{N_0}} dn \end{aligned} \quad (126)$$

Para esta expressão não existe fórmula fechada, sendo necessário o uso de cálculo numérico. Podemos, porém, usar o limitante da união para obter uma aproximação, que, embora não seja muito exato, permite-nos uma compreensão do comportamento de esquemas ortogonais.

Podemos ver que todos os símbolos têm uma mesma distância entre eles, $d = \sqrt{2E_s}$, e são vizinhos. Pelo limitante da união em (106), temos que a probabilidade de erro de símbolo pode ser limitada por

$$P_e = 1 - P(C) \leq (M - 1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M - 1)Q\left(\sqrt{\frac{\log_2 M E_b}{N_0}}\right) \quad (127)$$

Quanto à probabilidade de erro de bits, já que todos os símbolos são vizinhos, não é possível a realização de codificação de Gray. Considerando que o erro pode ocorrer para qualquer outro símbolo com igual probabilidade, neste caso

$$P_b \approx \frac{P_e}{2} \quad (128)$$

É interessante observarmos que, diferentemente de esquemas QAM e PSK, cuja probabilidade de erro aumenta com o aumento da ordem de modulação M , para esquemas ortogonais a probabilidade de erro diminui com o aumento do M . Na Figura 45 podemos ver este comportamento para $M = 2, 4$ ou 8 . Podemos ver ainda que a aproximação acima se aproxima do resultado de simulação para E_b/N_0 altos, embora seja bem pessimista para E_b/N_0 baixos.

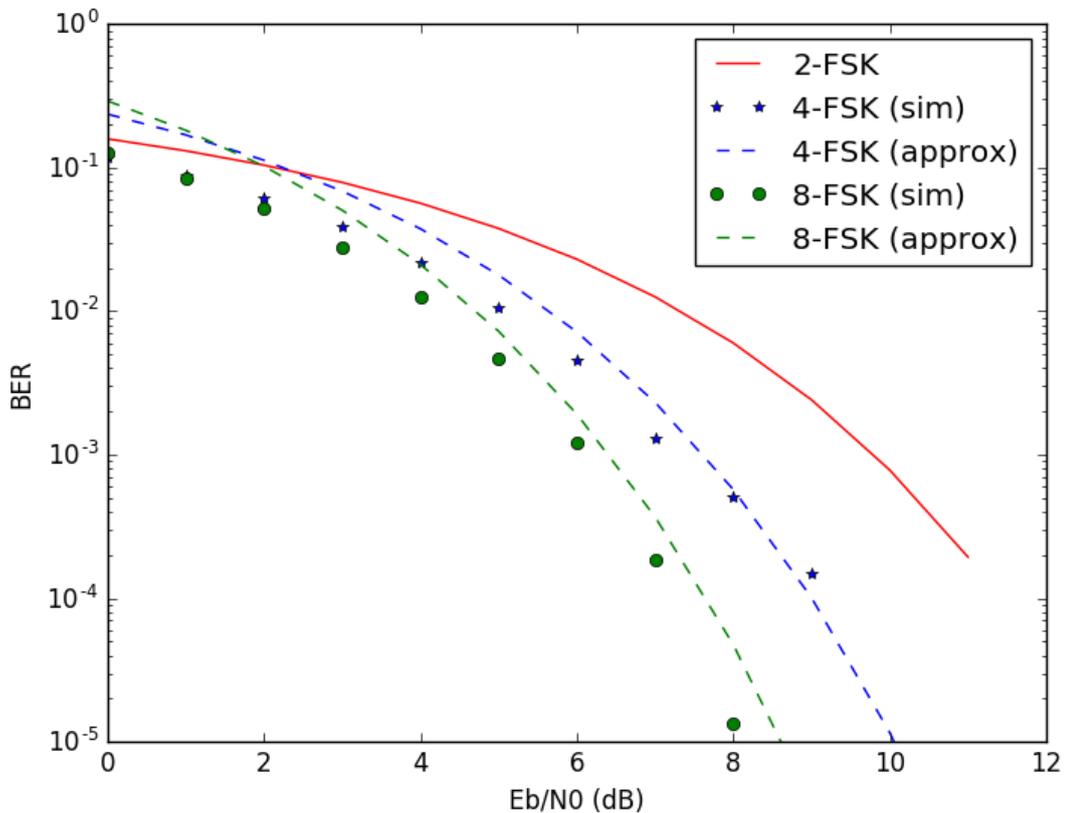


Figura 45. Desempenho do FSK

O custo desta melhora de desempenho é um aumento na largura de banda. Considerando-se por exemplo um M -FSK, podemos ver que a frequência instantânea $f_i(t)$ varia no intervalo $f_c - \frac{M-1}{2} \frac{R_s}{2} \leq f_i(t) \leq f_c + \frac{M-1}{2} \frac{R_s}{2}$, e, pela regra de Carson, considerando-se pulsos retangulares,

$$B_{M-FSK} \approx 2 \left(\frac{M-1}{2} \frac{R_s}{2} + R_s \right) = (M+3) \frac{R_s}{2} = \frac{M+3}{\log_2 M} \frac{R_b}{2} \quad (129)$$

ou seja, a banda aumenta com aumento da ordem de modulação. Algo equivalente ocorre com o PPM, já que, quanto maior o valor de M , mais estreito será o pulso, e, conseqüentemente, mais largo será o espectro.

Vamos ver em um exemplo quais as vantagens e desvantagens de utilizarmos esquemas ortogonais de ordem mais alta.

Exemplo 17 Desempenho de M-FSK

Um sistema digital transmite dados a uma taxa de 100 kbps e uma BER $P_b \leq 10^{-4}$. Encontre a largura de banda e a potência necessária se utilizarmos os esquemas de modulação QPSK, BPSK, 2-FSK, 4-FSK, 8-FSK (ortogonais). Considere pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0,5$ para sistemas PSK.

QPSK:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 6,92 \Rightarrow P_{rx,QPSK} = R_b \frac{E_b}{N_0} N_0 = 6,92 \times 10^5 N_0$$

$$B_{T,QPSK} = R_s(1 + \rho) = \frac{R_b}{2}(1 + \rho) = \frac{10^5}{2}(1,5) = 75 \text{ kHz}$$

BPSK:

$$P_{rx,QPSK} = P_{rx,BPSK} = 6,92 \times 10^5 N_0$$

$$B_{T,QPSK} = R_s(1 + \rho) = R_b(1 + \rho) = 10^5(1,5) = 150 \text{ kHz}$$

B-FSK

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 13,83 \Rightarrow P_{rx,2-FSK} = R_b \frac{E_b}{N_0} N_0 = 13,83 \times 10^5 N_0$$

$$B_{T,2-FSK} \approx \frac{5}{2} R_s = \frac{5}{2} R_b = 250 \text{ kHz}$$

4-FSK

$$P_b \approx \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 7,3 \Rightarrow P_{rx,4-FSK} = 7,3 \times 10^5 N_0$$

$$B_{T,2-FSK} \approx \frac{7}{2} R_s = \frac{7 R_b}{2} = 175 \text{ kHz}$$

8-FSK

$$P_b \approx \frac{7}{2} Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{N_0}}\right) = 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 5,4 \Rightarrow P_{rx,8-FSK} = 5,4 \times 10^5 N_0$$

$$B_{T,8-FSK} \approx \frac{11}{2} R_s = \frac{11 R_b}{2 \cdot 3} = 183 \text{ kHz}$$

Pelos motivos expostos anteriormente, em sistemas em que a banda é limitada e desejamos taxas mais altas, ou seja, queremos eficiência espectral, escolhemos usualmente esquemas de modulação PSK/QAM. Já em sistemas em que a banda não é problema, ou seja, em que a taxa de

transmissão é baixa em relação à banda, mas desejamos gastos menores de potência, devemos escolher esquemas ortogonais, como FSK ou PPM.

e. MSK

f. Detecção não coerente

6. Exercícios

Exercício 1. ([1] Ex. 10.1-1)

Em um sistema de transmissão binária em banda base, bits são transmitidos seguindo a seguinte regra:

$$\text{bit } \mathbf{0}: s(t) = Ap(t)$$

$$\text{bit } \mathbf{1}: s(t) = -Ap(t)$$

$$\text{com } p(t) = 1 - \frac{|T_s - 2t|}{T_s}, 0 \leq t \leq T_s.$$

Supondo que os bits **0** e **1** são equiprováveis, é que o ruído é gaussiano aditivo branco (AWGN),

a) Encontre o filtro de recepção ótimo $h(t)$ e esboce sua resposta ao impulso.

b) Determine a probabilidade de erro como função de $\frac{E_b}{N_0}$

c) Refaça os itens anteriores para o caso em que $p(t) = 1 - \frac{t}{T_s}, 0 \leq t \leq T_s$

Exercício 2. ([1], Ex. 10.1-4)

Uma alternativa ao filtro ótimo é o filtro subótimo, para o qual supomos um certo modelo de filtro e ajustamos seus parâmetros para maximizar a razão sinal-ruído na saída do filtro. Estes filtros têm desempenho inferior ao filtro casado, mas podem ser mais simples de implementar.

Para um pulso $p(t) = A \text{rect}(t/T_s)$ na entrada, determine o valor máximo da RSR na saída, se em vez de um filtro casado, um filtro RC com resposta na frequência $H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$. Considere

ruído gaussiano com densidade espectral de potência $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$.

Qual o valor ótimo da constante RC ?

Exercício 3. ([1], Ex. 10.2-1)

Em um sistema PPM (Pulse Position Modulation) binário, um pulso $p_0(t)$ é transmitido com atrasos diferentes dependendo se o bit é igual a **0** ou **1**.

Em outras palavras $p_0(t) = u(t) - u\left(t - \frac{T_s}{2}\right)$ e a transmissão é feita como:

$$\text{bit } \mathbf{0}: s(t) = p_0(t)$$

$$\text{bit } \mathbf{1}: s(t) = p_0(t - T_s/2).$$

O ruído é branco gaussiano aditivo com PSD $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$.

a) Determine a arquitetura de receptor ótima para este sistema. Esboce a resposta ao impulso do filtro.

b) Se $P\{\mathbf{0}\} = 0,4$, ache o limiar de detecção ótimo e a probabilidade de erro.

c) Suponha que o sistema tenha sido projetado para bits equiprováveis. Qual a probabilidade de erro, se a probabilidade dos bits na transmissão for efetivamente $P\{\mathbf{0}\} = 0,4$.

Exercício 4. ([1], Ex.10.2-2)

Uma transmissão binária com modulação de *chirps* é feita do seguinte modo:

$$\text{bit } \mathbf{0}: s(t) = A \cos(\alpha_0 t^2 + \theta_0)$$

$$\text{bit } \mathbf{1}: s(t) = A \cos(\alpha_1 t^2 + \theta_1)$$

a) Projete o receptor ótimo, considerando um canal AWGN e bits equiprováveis.

b) Qual a sua probabilidade de erro?

Exercício 5. Exercício 5 ([1], Ex.10.2-3)

Em esquemas de transmissão coerentes, um sinal piloto é usualmente adicionado para permitir a sincronização pelo receptor. Como ele não carrega informação útil, ele causa degradação na BER para uma mesma potência de transmissão.

Considere um sinal BPSK tal que

- bit 0: $s(t) = p(t) = A\sqrt{1-m^2} \cos(2\pi f_c t) + Am \sin(2\pi f_c t)$
- bit 1: $s(t) = q(t) = -A\sqrt{1-m^2} \cos(2\pi f_c t) + Am \sin(2\pi f_c t)$,

em que $Am \sin(2\pi f_c t)$ é o sinal piloto.

Qual a probabilidade de erro deste sistema? Compare com um sistema sem o sinal piloto.

Exercício 6. ([1], Ex.10.2-6)

Em um sistema de transmissão quaternário, mensagens são escolhidas dentre uma das quatro possibilidades, $m_1 = 00, m_2 = 01, m_3 = 10$ e $m_4 = 11$, que são transmitidas pelos sinais $s_1 = -p(t), s_2 = p(t), s_3 = -3p(t)$ e $s_4 = 3p(t)$, em que $p(t)$ tem energia E_p . Um filtro casado a $p(t)$ é usado no receptor.

- a) Se r é a saída do filtro casado no instante T_s , esboce a densidade de probabilidade $p_r(r | m_i)$ para todas as quatro mensagens possíveis.
- b) Determine os limiares ótimos de decisão para as quatro mensagens e a probabilidade de erro de bit em função da razão E_s/N_0 .

Exercício 7. ([1], Ex.10.2-8)

Em um sistema de transmissão binária é utilizado um pulso de cosseno levantado, que satisfaz o critério de Nyquist, com fator de roll-off $\rho = 0,2$. O canal é passa-faixa ideal, com largura de banda de $f_0 = 5\text{kHz}$.

- a) se o canal é AWGN, encontre o filtro de recepção ótimo, e esboce sua resposta espectral.
- b) se o canal apresenta ruído Gaussiano colorido, com espectro $S_n(f) = \frac{1}{2} \frac{N_0}{1+(f/f_0)^2}$, encontre o filtro de recepção ótimo e esboce sua resposta espectral.

Exercício 8. ([1], Ex.10.3-1)

Em um sistema FSK binário são transmitidos os seguintes sinais,

$$\text{bit 0: } s(t) = \sqrt{2} \sin\left(\pi \frac{t}{T_s}\right) \cos\left(2\pi \left(f_c - \frac{\Delta f}{2}\right) t\right), 0 \leq t \leq T_s$$

$$\text{bit 1: } s(t) = \sqrt{2} \sin\left(\pi \frac{t}{T_s}\right) \cos\left(2\pi \left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right) t\right), 0 \leq t \leq T_s.$$

O canal é AWGN.

- a) Ache o receptor coerente e o limiar de decisão ótimos.
- b) Ache a probabilidade de erro.
- c) É possível encontrar o fator Δf que minimiza a probabilidade de erro?

Exercício 9. ([1], Ex.10.4-2)

Um espaço de sinais tridimensional é definido pelos sinais base $\phi_1(t) = p(t), \phi_2(t) = p(t - T_0)$ e $\phi_3(t) = p(t - T_0)$, com $p(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}} \text{sen}\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) [u(t) - u(t - T_0)]$.

Esboce as formas de onda para os sinais representados neste espaço vetorial pelos vetores:

$(1;1;1), (-2;0;1), (1/3;2;-1/2)$ e $(-1/2;-1,2)$. Ache a energia destes sinais.

Exercício 10. ([1], Ex.10.4-3, 10.4-4)

a) Repita o exercício anterior para

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}}, \quad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos\left(\frac{\pi}{T_0} t\right), \quad \phi_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right).$$

b) Suponha agora um sinal $x(t) = 1 + 2\text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)$. Ache a melhor aproximação deste sinal como uma combinação linear dos sinais base acima. Qual a energia do erro de aproximação?

c) Considerando agora um quarto sinal base $\phi_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{T_0} t\right)$, qual a energia de erro de aproximação?

Exercício 11. ([1], Ex.10.4-5)

Considere o mesmo $p(t)$ do Exercício 9, e $\phi_k(t) = p(t - (k - 1)T_0)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

a) Esboce os sinais representados por $(-1, 2, 3, 1, 4)$; $(2, 1, -4, -4, 2)$, $(3, -2, 3, 4, 1)$ e $(-2, 4, 2, 2, 0)$ neste espaço vetorial.

b) Ache a energia destes sinais.

c) lembrando que $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos(\theta)$, encontre o ângulo entre todos os pares de sinais.

Exercício 12. ([1], Ex.10.6-2)

Considere um canal com ruído branco aditivo não-Gaussiano, de modo que na projeção no espaço de sinais tenhamos o vetor $\mathbf{q} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ quando for transmitida a mensagem m_i . O ruído tem densidade de probabilidade conjunta

$$p_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{|n_i|}{2\tau}\right]$$

a) ache o detector MAP

b) derive a estrutura de receptor ótima

c) para um espaço bidimensional ($N=2$) compare as regiões de decisão entre ruído Gaussiano e não Gaussiano.

Exercício 13. ([1], Ex.10.6-3 e -4)

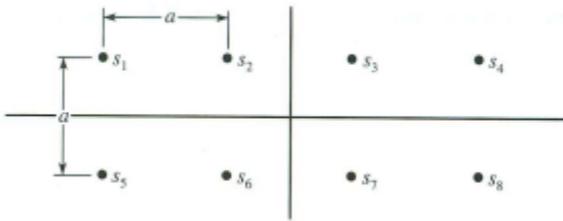
Um fonte binária transmite a uma taxa de 400kbps. Determine a potência mínima necessária e a mínima largura de banda se $S_n(f) = 10^{-8} \text{W/Hz}$ e $P_b < 10^{-6}$,

a) para M-PAM, com $M=2, 16$ e 32 .

b) para M-PSK

Exercício 14. ([1], Ex.10.6-6)

Dado o sinal 8-QAM mostrado na figura abaixo



Determine as regiões de decisão e a probabilidade de erro de símbolo em um canal AWGN em função da razão E_b/N_0 .

Exercício 15. ([1], Ex.10.6-9)

Compare as probabilidades de erro de 16-PAM, 16-PSK e 16-QAM em função de E_b/N_0 . Qual o E_b/N_0 requerido nos três casos para uma $P_e = 10^{-5}$?

Exercício 16. ([1], Ex.10.6-11)

Um sistema de transmissão ternário tem três sinais possíveis para transmissão:

$m_0: 0$; $m_1: 2p(t)$; $m_2: -2p(t)$

a) se $P(m_0) = P(m_1) = P(m_2)$ determine as regiões de decisão ótimas em canal AWGN

b) encontre a probabilidade de erro de símbolo em função de E_s/N_0 .

Exercício 17. ([1], Ex.10.6-11)

Uma constelação com 16 pontos é dada pela figura abaixo.

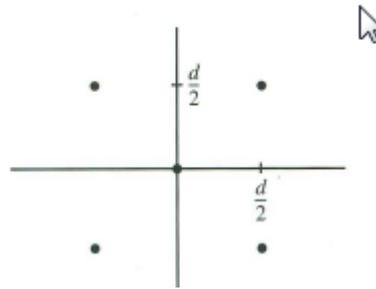


a) Escreva a expressão exata para a probabilidade de erro deste sistema (não precisa resolver as integrais)

b) Qual a probabilidade de erro aproximada para RSR alto?

Exercício 18. ([1], Ex.10.6-13)

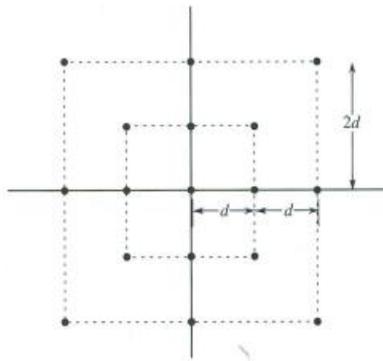
Uma constelação com 5 pontos em um espaço bidimensional é dada pela figura abaixo.



- a) supondo $\phi_1(t) = \sqrt{2/T_0}\cos(2\pi f_c t)$ e $\phi_2(t) = \sqrt{2/T_0}\sin(2\pi f_c t)$, esboce as formas de onda dos cinco sinais.
- b) esboce as regiões de decisão dos 5 sinais, supondo canal AWGN.
- c) determine a probabilidade de erro.

Exercício 19. ([1], Ex.10.6-14)

Dado um esquema 16-QAM descrito pela constelação da figura abaixo



determine sua probabilidade de erro e a compare com a de um esquema 16-QAM quadrado tradicional.

Exercício 20. ([1], Ex.10.7-1)

Os vértices de hiper-cubo N-dimensional formam um conjunto de 2^N sinais

$$s_k(t) = \frac{d}{2} \sum_{j=1}^N a_{kj} \phi_j(t),$$

em que $a_{kj} = \pm 1$. Note que todos os pontos estão a uma distância $\frac{\sqrt{N}d}{2}$ da origem.

- a) Esboce as constelações para $N = 1, 2$ e 3
- b) Para cada um dos valores do item (a), esboce um possível conjunto de formas de onda.
- c) Ache o receptor ótimo e determine a probabilidade de erro, supondo símbolos equiprováveis e um canal AWGN.

Exercício 21. ([1], Ex.11.7-2)

Dado um conjunto ortogonal de sinais

$$s_k(t) = \sqrt{E} \phi_k(t), k = 1, 2, 3, \dots, N,$$

um conjunto de sinais biortogonal pode ser formado, aumentando-se o conjunto com o negativo de cada sinal, ou seja, adicionando-se o sinais

$$s_{-k}(t) = -\sqrt{E} \phi_k(t)$$

Qual a probabilidade de erro deste esquema? Qual a relação entre sua largura de banda e a largura de banda de um esquema de transmissão ortogonal?

Exercício 22. Exercício 11 ([1], Ex.11.11-1)

Compare graficamente as probabilidades de erro dos esquemas binários ASK, FSK e DPSK com detecção não coerente. Qual o E_b/N_0 necessário nos três esquemas para probabilidade de erro de 10^{-2} , 10^{-4} e 10^{-6} ?

7. Resolução dos Exercícios

Exercício 1

8. Referências

Este texto se baseia em grande parte no livro texto

- [1] B.P. Lathi e Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicas e Digitais Modernos*, 4ª Ed., Editora LTC, 2012, Caps. 8 e 9

Boas referências em probabilidade e processos estocásticos são

- [2] J.A. Gubner, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers*, Cambridge University Press, 2006
- [3] J.P.A. Albuquerque, J.M.P. Fortes, W.A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*, Interciência, 2008
- [4] A. Papoulis e S.U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 4ª Edição, 2002

Apêndices

a. Filtro de recepção ótimo para transmissão polar

Queremos um filtro $H(f)$ que maximize a razão sinal-ruído do sinal amostrado na saída do filtro

$$\gamma^2 = \frac{A_o^2}{\sigma_n^2} \quad (130)$$

com $A_o = p_o(\Delta t)$.

O pulso na saída do filtro é dado por

$$p_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\{P_o(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{P(f)H(f)\}. \quad (131)$$

Portanto, no instante de amostragem Δt ,

$$p_o(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi f\Delta t} df. \quad (132)$$

Vamos agora achar a variância do ruído $\sigma_n^2 = E\{(n_o(t) - \bar{n}_o)^2\} = E\{(n_o(t))^2\} = P_{n_o}$. Sabemos ainda que a potência do ruído é dada por

$$P_{n_o} = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)|H(f)|^2 df \quad (133)$$

em que $S_w(f)$ é a densidade espectral de potência do ruído no receptor, na entrada do filtro.

Fazendo agora

$$\begin{aligned} X(f) &= H(f)\sqrt{S_w(f)} \\ Y(f) &= \frac{P(f)e^{j2\pi f\Delta t}}{\sqrt{S_w(f)}} \end{aligned} \quad (134)$$

queremos maximizar

$$\gamma^2 = \frac{|\int P(f)H(f)e^{j2\pi f\Delta t} df|^2}{\int S_w(f)|H(f)|^2 df} = \frac{|\int X(f)Y(f)df|^2}{\int |X(f)|^2 df} \quad (135)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz⁷, temos que

$$\gamma^2 \leq \frac{|\int X(f)|^2 df |\int Y(f)|^2 df}{\int |X(f)|^2 df} \quad (136)$$

e o valor máximo é atingido na igualdade, com $X(f) = kY^*(f)$. Temos então que

$$H(f)\sqrt{S_w(f)} = \frac{kP(-f)e^{-j2\pi f\Delta t}}{\sqrt{S_w(f)}} \quad (137)$$

e, conseqüentemente,

$$H(f) = \frac{kP(-f)e^{-j2\pi f\Delta t}}{S_w(f)} \quad (138)$$

⁷ A desigualdade de Cauchy-Schwarz diz que $|\int f(x)g(x)dx|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$ com igualdade apenas se $g(x) = kf^*(x)$, em que k é uma constante qualquer.

