Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 (25/05/2016)

Aluno:____

Matrícula: ______________________________________

Questão 1 (2,5 pontos)

Considere que um sinal com atenuação de Rayleigh tenha 20% de probabilidade de estar 6dB abaixo de um certo limiar.

a) Qual a probabilidade do sinal estar também 6dB abaixo do limiar em um receptor com combinação por seleção com duas antenas?

b) E se tivéssemos 3 ou 4 ramos?

c) Repita os itens (a) e (b) para um receptor MRC

.

a)

Com SC, o sinal estar é abaixo do limiar após a combinação se ele estiver abaixo do limiar nas duas antenas simultaneamente, ou seja, chamando de P_i a potência na antena i, e P_oo limiar, e $P_o' = \frac{P_o}{4}$, ou sejam 6 dB abaixo do limiartemos que

$$\Pr(P_{SC} < P_o') = \Pr(P_1 < P_o'; P_2 < P_o') = \Pr(P_1 < P_o')\Pr(P_2 < P_o') = 0{,}2^2 = 0{,}04$$

b)

Da mesma forma, com N antenas, temos que

$$\Pr(P_{SC} < P_o') = \Pr(P < P_o')^N$$

Para 3 antenas

$$\Pr\left(P_{SC,3} < P_o'\right) = 0{,}2^3 = 0{,}008$$

Para 4 antenas

$$\Pr\left(P_{SC,4} < P_o'\right) = 0{,}2^4 = 0{,}0016$$

c)

Sabemos que

$$\Pr(P < P_o') = 0{,}2$$

Ou seja,

$$\int_0^{P_o'} \frac{1}{\overline{P}} e^{-\left(\frac{x}{\overline{P}}\right)} dx = 1 - e^{-\frac{P_o'}{\overline{P}}} = 0{,}2 \Rightarrow \frac{P_o{}'}{\overline{P}} = -\ln 0{,}8 = 0{,}2231$$

Com MRC, sabemos que

$$\Pr\left(P_{MRC,N} < P_o{}'\right) = 1 - e^{-\frac{P_o{}'}{\overline{P}}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\left(\frac{P_o{}'}{\overline{P}}\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Portanto, com N=2

$$\Pr\left(P_{MRC,2} < P_o{}'\right) = 1 - e^{-\frac{P_o{}'}{\bar{P}}}\left(1 + \frac{P_o{}'}{\bar{P}}\right) = 0{,}0215$$

e, com N=2 e N=3
e, com N=2 e N=3

$$\Pr\left(P_{MRC,3} < P_o{}'\right) = 1 - e^{-\frac{P_o{}'}{\bar{P}}}\left(1 + \frac{P_o{}'}{\bar{P}} + \frac{1}{2}\left(\frac{P_o{}'}{\bar{P}}\right)^2\right) = 0{,}0016$$

$$\Pr\left(P_{MRC,3} < P_o{}'\right) = 1 - e^{-\frac{P_o{}'}{\bar{P}}}\left(1 + \frac{P_o{}'}{\bar{P}} + \frac{1}{2}\left(\frac{P_o{}'}{\bar{P}}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{P_o{}'}{\bar{P}}\right)^3\right) = 8{,}65 \times 10^{-5}$$

Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

Um código BCH com palavras-código de tamanho $n = 15$ é descrito pelo polinômio gerador $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

a) Qual a taxa deste código?

Sabemos que o polinômio gerador é um polinômio de grau $n - k$, portanto $k = 7$. A taxa é então

$$R = \frac{7}{15}$$

b) Este código é cíclico? Por que?

Para o código ser cíclico, a divisão de $x^{15} + 1$ por $g(x)$ deve ter resto igual a zero. Neste caso, podemos ver que$(x^7 + x^6 + x^4 + 1)g(x) = x^{15} + 1$, e, portanto, o código é cíclico.

c) Qual a palavra código se tivermos na entrada a mensagem [1 0 0 0 0 0 1]?

$$m(x) = x^6 + 1$$
$$c(x) = m(x)g(x) = x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^4 + 1$$
$$\bar{c} = [1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

d) Qual a sua matriz geradora?

Se multiplicarmos o polinômio mensagem
$m(x) = m_6x^6 + m_5x^5 + m_4x^4 + m_3x^3 + m_2x^2 + m_1x + m_0$
por $g(x)$, teremos

$$\begin{aligned} c(x) = m_6x^{14} &+ (m_6 + m_5)x^{13} + (m_6 + m_5 + m_4)x^{12} + (m_5 + m_4 + m_3)x^{11} \\ &+ (m_6 + m_4 + m_3 + m_2)x^{10} + (m_5 + m_3 + m_2 + m_1)x^9 \\ &+ (m_4 + m_2 + m_1 + m_0)x^8 + (m_3 + m_1 + m_0)x^7 \\ &+ (m_6 + m_2 + m_0)x^6 + (m_5 + m_1)x^5 + (m_4 + m_0)x^4 + m_3x^3 \\ &+ m_2x^2 + m_1x + m_0 \end{aligned}$$

o que pode ser representado como **c** = **mG**, com

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Sabendo que seu polinômio enumerador de pesos é igual a $A(z) = 1 + 18z^5 + 30z^6 + 15z^7 + 15z^8 + 30z^9 + 18z^{10} + z^{15}$, qual o ganho de codificação deste código para uma $BER = 10^{-4}$, considerando detecção soft e BPSK?

Sem codificação, temos que

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-4} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 3{,}8 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 7{,}22 = 8{,}6\text{dB}$$

Do polinômio enumerador, sabemos que $d_{min} = 5$ e $N_{min} = 18$. Com o código e decodificação soft, podemos aproximar a BER por

$$P_b \approx \frac{d_{min}}{n} N_{min} Q\left(\sqrt{\frac{2d_{min}RE_b}{N_0}}\right) = 6Q\left(\sqrt{\frac{14E_b}{3N_0}}\right) \leq 10^{-4}$$

$$\sqrt{\frac{14E_b}{3N_0}} = 4{,}2 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 3{,}78 = 5{,}8\text{dB}$$

Ou seja, um ganho de 3,2dB

f) E considerando detecção hard?

Com o código e decodificação hard, sabendo que $d_{min} = 5 \Rightarrow t = 2$

$$P_b \approx \binom{n-1}{t} p^{t+1} = \binom{14}{2} p^3 = 91p^3 = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}}\right) = 0{,}0103 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_c}{N_0}} = 2{,}4 \Rightarrow \frac{E_c}{N_0} = 2{,}88$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_c}{RN_0} = \frac{15}{7} 2{,}88 = 6{,}17 = 7{,}9\text{dB},$$

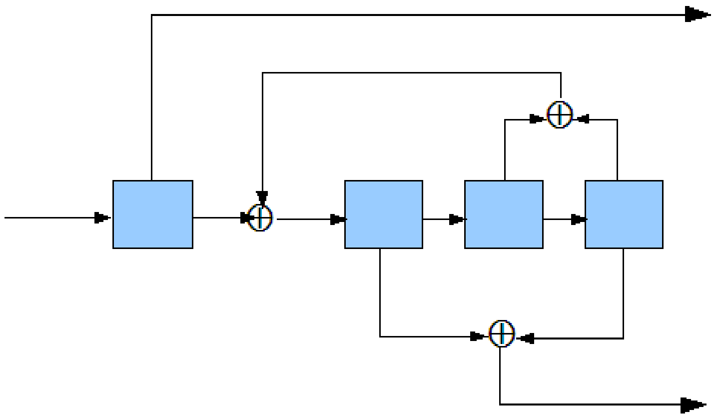
Ou seja, um ganho de 0,7dB.

Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2,5 pontos)

Dado o seguinte código convolucional



a) Qual o seu diagrama de estados?

Trata-se de um código recursivo, definido pelas equações

$$c_k^{(1)} = m_k$$

$$c_k^{(2)} = y_k + y_{k-2}$$

$$y_k = m_k + y_{k-1} + y_{k-2}$$

Podemos construir a tabela de estados

s_k	m_k	y_k	y_{k-1}	y_{k-2}	s_{k+1}	$c_k^{(1)} c_k^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	00
	1	1			2	11
1	0	1	0	1	2	00
	1	0			0	11
2	0	1	1	0	3	01
	1	0			1	10
3	0	0	1	1	1	01
	1	1			3	10

e, a partir daí, o diagrama de estados.

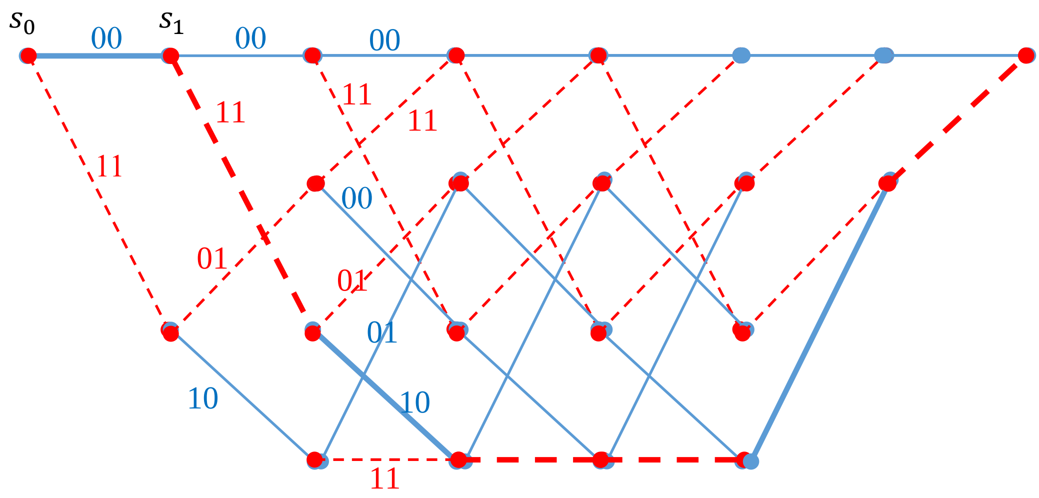
b) Considerando que o código é terminado, qual a taxa de codificação efetiva?

Para um código terminado devemos garantir que ele vá terminar em um determinado estado, por exemplo, $s_{k+L} = 0$, e devemos acrescentar $L = 2$ bits de entrada a mais, com 4 de saída a mais. Sendo assim, com K bits na mensagem a taxa efetiva será

$$R_{eff} = \frac{K}{N+4} = \frac{K}{2(K+2)}$$

c) Considerando que são enviados 5 bits de entrada e que o código é terminado, construa sua treliça completa. Qual a saída do codificador se a sequência de entrada for 0 1 0 1 1?

Sabemos que a treliça começa e termina no estado 0. Assim, temos que



Observando na treliça (com linha mais grosssa), para uma mensagem [01011], teremos a saída [00 11 10 11 11 01 11]

d) Considerando ainda que são enviados 5 bits de entrada e o código é terminado, construa sua matriz geradora G.

Podemos ver que os bits sistemáticos resultam em

$$c_0^{(1)} = m_0; c_1^{(1)} = m_1; c_2^{(1)} = m_2; c_3^{(1)} = m_3; c_4^{(1)} = m_4; c_5^{(1)} = m_5$$

Para os bits de paridade

$$y_0 = m_0 + y_{-1} + y_{-2} = m_0$$
$$c_0^{(2)} = y_0 + y_{-2} = y_0 = m_0$$
$$y_1 = m_1 + y_0 + y_{-1} = m_1 + y_0 = m_1 + m_0$$
$$c_1^{(2)} = y_1 + y_{-1} = m_1 + m_0$$
$$y_2 = m_2 + y_1 + y_0 = m_2 + m_1 + m_0 + m_0 = m_2 + m_1$$
$$c_2^{(2)} = y_2 + y_0 = m_2 + m_1 + m_0$$
$$y_3 = m_3 + y_2 + y_1 = m_3 + m_2 + m_1 + m_1 + m_0 = m_3 + m_2 + m_0$$
$$c_3^{(2)} = y_3 + y_1 = m_3 + m_2 + m_0 + m_1 + m_0 = m_3 + m_2 + m_1$$
$$y_4 = m_4 + y_3 + y_2 = m_4 + m_3 + m_2 + m_0 + m_2 + m_1 = m_4 + m_3 + m_1 + m_0$$
$$c_4^{(2)} = y_4 + y_2 = m_4 + m_3 + m_0 + m_1 + m_2 + m_1 = m_4 + m_3 + m_2 + m_0$$

A partir daí entramos na terminação, e entramos com $y_5 = y_6 = 0$. Sendo assim, temos que entrar com os bits $m_5 e\ m_6$ que não transmitem informação, mas garantem a terminação.

$$y_5 = m_5 + y_4 + y_3 = 0 \Rightarrow c_5^{(1)} = m_5 = y_4 + y_3 = m_4 + m_3 + m_1 + m_0 + m_3 + m_2 + m_0$$
$$= m_4 + m_2 + m_1$$
$$c_5^{(2)} = y_5 + y_3 = y_3 = m_3 + m_2 + m_0$$
$$y_6 = m_6 + y_5 + y_4 = 0 \Rightarrow c_6^{(1)} = m_6 = y_5 + y_4 = y_4 = m_4 + m_3 + m_1 + m_0$$
$$c_6^{(2)} = y_6 + y_4 = y_4 = m_4 + m_3 + m_1 + m_0$$

Sendo assim podemos montar a matriz G (5x14), tal que

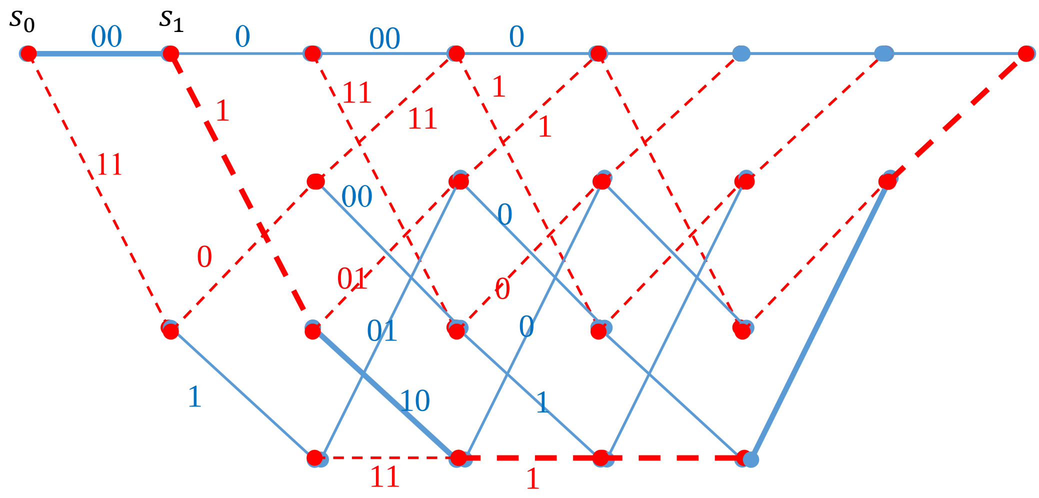
$$\mathbf{c} = [c_0^1 c_0^2 c_1^1 c_1^2 c_2^1 c_2^2 \ldots c_7^1 c_7^2] = \mathbf{mG}$$

ou seja,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Refaça o item (c) considerando perfuração do código, onde a cada 4 bits de codificação, o último é sempre removido.

Nas transições pares, iremos remover sempre o segundo bit, sendo assim



Observando na treliça (com linha mais grosssa), para uma mensagem [01011], teremos a saída [00 1 10 1 11 0 11]

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão utiliza BPSK e um esquema de Alamouti com duas antenas de transmissão e duas antenas de recepção. Na recepção, é utilizado um esquema de *selection combining*. Supondo que o canal em um dado instante é dado pela matriz

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & .5j \\ 1+j & -j \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

Ache uma expressão para a probabilidade de erro de bit neste instante, em função da potência de transmissão P_{tx}, da largura de banda B, do fator de roll-off ρ, e de N_0.

Sabemos que a RSR em cada uma das antenas de recepção é

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\frac{E_{s,tx}}{N_0}\left(|h_{i0}|^2 + |h_{i1}|^2\right)$$

Portanto, nas antenas 0 e 1, temos

$$\gamma_0 = \frac{E_{s,tx}}{2N_0}\left((10^{-5})^2 + (.5 \times 10^{-5})^2\right) = 6.25 \times 10^{-11}\frac{E_{s,tx}}{N_0}$$

$$\gamma_1 = \frac{E_{s,tx}}{2N_0}\left(\left(\sqrt{2} \times 10^{-5}\right)^2 + (10^{-5})^2\right) = 1{,}5 \times 10^{-10}\frac{E_{s,tx}}{N_0}$$

Com o SC vamos escolher a antena com o melhor RSR, ou seja

$$\gamma_{SC} = \gamma_1 = \frac{E_{s,SC}}{N_0} = 1{,}5 \times 10^{-10}\frac{E_{s,tx}}{N_0}$$

A BER para um BPSK é dada por

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{3 \times 10^{-10}\frac{E_{s,tx}}{N_0}}\right)$$

Além disso, sabemos que

$$P_{tx} = E_{s,tx}R_s = \frac{E_{s,tx}B}{1+\rho}$$

e, portanto,

$$BER = Q\left(\sqrt{3 \times 10^{-10}\frac{P_{tx}(1+\rho)}{BN_0}}\right)$$

Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Tabela da Função Q

x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	0,460172	2,1	0,017864	4,1	2,07E-05
0,2	0,42074	2,2	0,013903	4,2	1,33E-05
0,3	0,382089	2,3	0,010724	4,3	8,54E-06
0,4	0,344578	2,4	0,008198	4,4	5,41E-06
0,5	0,308538	2,5	0,00621	4,5	3,4E-06
0,6	0,274253	2,6	0,004661	4,6	2,11E-06
0,7	0,241964	2,7	0,003467	4,7	1,3E-06
0,8	0,211855	2,8	0,002555	4,8	7,93E-07
0,9	0,18406	2,9	0,001866	4,9	4,79E-07
1	0,158655	3	0,00135	5	2,87E-07
1,1	0,135666	3,1	0,000968	5,1	1,7E-07
1,2	0,11507	3,2	0,000687	5,2	9,96E-08
1,3	0,0968	3,3	0,000483	5,3	5,79E-08
1,4	0,080757	3,4	0,000337	5,4	3,33E-08
1,5	0,066807	3,5	0,000233	5,5	1,9E-08
1,6	0,054799	3,6	0,000159	5,6	1,07E-08
1,7	0,044565	3,7	0,000108	5,7	5,99E-09
1,8	0,03593	3,8	7,23E-05	5,8	3,32E-09
1,9	0,028717	3,9	4,81E-05	5,9	1,82E-09
2	0,02275	4	3,17E-05	6	9,87E-10

Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

UnB

departamento de engenharia elétrica