Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 (04/07/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Questão 1 (2,5 pontos)

Considere um sistema DS-CDMA com três usuários, com códigos de espalhamento dados por

$$s_1 = (+1, +1, +1, -1, -1)$$
$$s_2 = (+1, -1, +1, +1, -1)$$
$$s_3 = (+1, +1, -1, -1, +1)$$

a) Supondo a transmissão no DL, em que todos os usuários são sincronizados e transmitidos com a mesma potência, qual a probabilidade de erro para o usuário 1, supondo o uso de modulação BPSK e uma razão sinal-ruído de $\frac{E_b}{N_0} = 15\text{dB}$.

b) Repita o item anterior, supondo agora a transmissão no uplink, em que os usuários 2 e 3 são recebidos com uma potência 10dB maior que o usuário 1. Considere ainda que os usuários não estão sincronizados, e que o usuário 2 tem um atraso de 1 chip e que o usuário 3 tem um atraso de 3 chips em relação ao usuário 1.

a) A RSR é dada por

$$\gamma = \frac{E_s}{N_0 + I_0} = \frac{E_s}{N_0 + E_s\rho_{12}^2 + E_s\rho_{13}^2} = \frac{\frac{E_s}{N_0}}{1 + \frac{E_s}{N_0}(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2)}$$

$$\rho_{12} = \frac{1}{T_s}\int_{T_s} s_1(t)s_2(t)dt = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} s_{1k}s_{2k} = \frac{1}{5} = \rho_{13}$$

$$\gamma = \frac{10^{1,5}}{1+10^{1,5}\left(\frac{2}{25}\right)} = 8{,}96, \qquad P_b = Q\left(\sqrt{2\gamma}\right) = 1{,}15 \times 10^{-5}$$

b) Agora cada bit sofre a interferência de dois bits de um outro usuário, por exemplo, o bit do usuário 1 no instante n é enviado como $(x_{1n}s_{11}, x_{1n}s_{12}, x_{1n}s_{13}, x_{1n}s_{14}, x_{1n}s_{15})$, e sofrerá interferência neste intervalo dos bits n e $n-1$ do usuário 2, ou seja, da sequência $(x_{2,n-1}s_{25}, x_{2n}s_{21}, x_{2n}s_{22}, x_{2n}s_{23}, x_{2n}s_{24})$, e, fazendo

$$\rho_{12}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\tau} s_{1,k}s_{2,k-\tau}, \qquad \rho_{12}^{(2)}(\tau) = \frac{1}{5}\sum_{k=\tau+1}^{5} s_{1,k}s_{2,k-\tau}$$

$$\gamma = \frac{E_{s1}}{N_0 + I_0} = \frac{E_{s1}/N_0}{1 + \frac{E_{s2}}{N_0}\left(\left(\rho_{12}^{(1)}\right)^2 + \left(\rho_{12}^{(2)}\right)^2\right) + \frac{E_{s3}}{N_0}\left(\left(\rho_{13}^{(1)}\right)^2 + \left(\rho_{13}^{(2)}\right)^2\right)}$$

$$\rho_{12}^{(1)}(1) = -\frac{1}{5}, \rho_{12}^{(2)}(1) = -\frac{2}{5}, \rho_{13}^{(1)}(3) = -\frac{1}{5}, \rho_{12}^{(2)}(1) = -\frac{2}{5},$$

$$\gamma = \frac{E_{s1}}{N_0 + I_0} = \frac{\frac{E_{s1}}{N_0}}{1 + \frac{10E_{s1}}{N_0}\left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right) + \frac{10E_{s1}}{N_0}\left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right)} = 0{,}248$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\gamma}\right) = 1{,}15 \times 10^{-5} = 0{,}241$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Um canal tem a resposta impulsional

$$h(t) = \delta(t) - 0{,}5j\delta(t-1) - 0{,}5\delta(t-2)$$

em que a unidade de t é em microssegundos.

Suponha que projetamos um sistema OFDM para operar neste canal, com uma taxa de amostragem de 1MHz e 8 subportadoras, das quais cinco são utilizadas para transmissão de dados, e as restantes são nulas.

Supondo uma razão sinal ruído de $\frac{E_s}{N_0}$ =13dB, qual a capacidade de Shannon deste sistema?

Supondo agora que possamos escolher em cada subportadora o esquema de modulação mais adequado, dentre M-PSK e M-QAM (com QAM quadrado), com código de repetição caso não seja possível o uso de BPSK[1], qual a taxa de transmissão que podemos atingir, se quisermos uma taxa de erro de bit de no máximo 10^{-4}?

a)

$$h_n = [\,1;\ -.5j; -.5;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]$$

$$H_k = DFT(h_n)$$

$$|H_k|^2 = [0{,}5;\ \ 0{,}4393; 1; 0{,}4393; 0{,}5; 2{,}5607; 4; 2{,}5607]$$

Sabemos ainda que a a RSR em cada subcanal é dada por

$$\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_k = \frac{E_s}{N_0}|H_k|^2 \frac{N}{N+G}$$

E que a capacidade de cada subcanal é

$$C_k = \log_2\left(1 + \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_k\right) \text{bits/uso do canal}$$

Sabendo que $\frac{E_s}{N_0} = 20$, $N = 8$ e $G = 2$, e considerando que não enviamos as subportadoras das pontas $k = 0, 3$ e $4 (\text{ou} - 4)$, a capacidade de cada subcanal é

$$C_k = [0; 3.002; 4.084; 0; 0; 5.388; 6{,}019; 5{,}388]$$

e a capacidade total é

$$C = \sum_{k=0}^{7} C_k = 23{,}88$$

O intervalo de símbolos é $T_s = NT_a = \frac{N}{f_a} = 8\mu s$, e com o intervalo de guarda, $T = 10\mu s$, ou seja, a taxa de símbolos efetiva é $R_{eff} = \frac{1}{T} = 100\text{kHz}$.

A capacidade do sistema em bps será $C = CR_{eff} = 2{,}388\text{Mbps}$.

b)

Sabendo a razão E_s/N_0, ou seja

$$\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_k = [-;\ 7{,}0128; 15{,}9621; -; -;\ 40{,}8735; 63{,}8484; 40{,}8735]$$

Para BPSK, precisamos de $Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 6{,}91$

Para QPSK, $Q\left(\sqrt{E_s/N_0}\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 13{,}83$

Para 8-PSK, $\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 44{,}62$

Para 16-QAM, $\frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 71{,}86$

---

[1] Um código de repetição com taxa $R = 1/n$ efetivamente aumenta o E_s/N_0 em n vezes.

Ou seja,devemos usar [-; BPSK; QPSK; -; -; QPSK; 8-PSK; QPSK], correspondentes a [0,1,2,0,0,2,3,2] bits/ símbolo. Portanto, enviaremos $n_b = 10$ bits/símbolo OFDM (podemos comparar com uma capacidade de 23), e consequentemente

$$R_b = \frac{10}{T} = 1\text{Mbps}$$

Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2,5 pontos)

Um sinal OFDM é utilizado para transmissão em um canal que pode ser modelado por um *power delay profile* exponencial, com um espalhamento de atraso rms igual a $1\mu s$, de modo que o prefixo cíclico absorva 90% da energia dos multipercursos.

a) Supondo um sistema OFDM com 64 subportadoras, das quais ao menos 10% delas são nulas, separadas por $\Delta f = 100\text{kHz}$, utilizando um 64QAM com taxa de codificação $R = 2/3$, qual a taxa de transmissão que pode ser alcançada?

b) Repita o item anterior considerando agora 256 subportadoras, mantendo-se a mesma banda total do sistema.

c) Supondo agora que temos um um desvio de frequência de 1kHz entre o transmissor e o receptor, qual a razão entre o sinal e a interferência interportadora nos dois casos (considere apenas as portadoras vizinhas)

O power delay profile é dado por $R_h(\tau) = Ae^{-\lambda\tau}u(\tau)$, o atraso rms é dado por

$$\tau_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty (\tau - \bar{\tau})^2 R_h(\tau)d\tau}{\int_0^\infty R_h(\tau)d\tau}} = \frac{1}{\lambda} = 1\mu s$$

O atraso de 90% da energia τ_{90} é tal que

$$\frac{\int_0^{\tau_{90}} Ae^{-\lambda\tau}d\tau}{\int_0^\infty Ae^{-\lambda\tau}d\tau} = 0{,}9 \Rightarrow \tau_{90} = -\frac{\ln 0{,}1}{\lambda} = 2{,}302\mu s$$

a)

$$T_s = \frac{1}{\Delta f} = 10\mu s, \qquad T_a = \frac{T_s}{N} = 0{,}15625\mu s$$

$$G = \left\lceil \frac{\tau_{90}}{T_a} \right\rceil = 15, \text{ e } T_G = 2{,}344\mu s$$

O número de subportadoras nulas é $N_0 = 7$, e, consequentemente, $N_d = 57$.
Desta forma, a taxa é dada por

$$R_b = \frac{R\,(\log_2 M)\,N_d}{T_s + T_g} \approx 18{,}47\text{Mbps}$$

b)
Para mantermos a mesma banda com 4x mais portadoras devemos reduzir o intervalo entre subportadoras também 4x, e, sendo assim

$$\Delta f = 25\text{kHz}, \quad T_s = \frac{1}{\Delta f} = 40\mu s$$

O intervalo de amostragem permanece o mesmo, assim como o intervalo de guarda.
O número de subportadoras nulas é $N_0 = 26$, e, consequentemente, $N_d = 230$.
Desta forma, agora a taxa é dada por

$$R_b = \frac{R\,(\log_2 M)\,N_d}{T_s + T_g} \approx 21{,}75\text{Mbps}$$

Podemos ver que, como o interval de símbolo é maior, o overhead do T_Gé menor, e a taxa maior.

UnB

departamento de engenharia elétrica

c)
Sabemos que a amplitude de cada subportadora é dada por

$$I_{\Delta m}(\delta) = \frac{e^{j2\pi(\Delta m+\delta)} - 1}{j2\pi(\Delta m + \delta)}$$

E a RSI, considerando apenas as subportadoras vizinhas é

$$RSI = \frac{|I_0(\delta)|^2}{|I_{-1}(\delta)|^2 + |I_1(\delta)|^2}$$

no primeiro caso (N = 64), temos que $\delta = f_\delta T_s = 0{,}01$

$$RSI = 4998 = 37\text{dB}$$

e $\delta = 0{,}04$ no segundo caso ($N = 256$)

$$RSI = 632 = 28\text{dB}$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema MIMO 2x2 é utilizado para multiplexação espacial é utilizado em um canal

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1+j & 1 \\ -j & 0{,}5 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

Considerando que são utilizados símbolos modulados em QPSK, e um receptor ZF, qual a potência de transmissão necessária para que ambos os *streams* espaciais tenham uma probabilidade de erro de bit de ao menos 10^{-4}, supondo um ruído com densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2} = -150\text{dBm/Hz}$ e uma taxa de dados de $R_b = 1\text{Mbps}$?

Sabemos que, com ZF, a estimativa do sinal será

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{w}$$

Com

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1-0{,}3j & -0{,}2+0{,}6j \\ 0{,}6+0{,}2j & 0{,}8-0{,}4j \end{bmatrix} \times 10^5$$

Ou seja, para o stream i

$$\hat{x}_i = x_i + (a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2)$$

e, consequentemente, a RSR na saída do equalizador é

$$\gamma_i = \frac{E_{s,tx}}{(|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2)\, N_0}$$

Substituindo os valores,

$$\gamma_1 = \frac{1}{5\times 10^9}\frac{E_{s,tx}}{N_0}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{1{,}2\times 10^{10}}\frac{E_{s,tx}}{N_0}$$

Com QPSK queremos

$$Q\left(\sqrt{\gamma_i}\right) < 10^{-4} \Rightarrow \gamma_i \geq 13{,}83$$

Supondo ambos os streams com mesma potência, o erro será dominado pelo segundo stream

$$\frac{1}{1{,}2\times 10^{10}}\frac{E_{s,tx}}{N_0} \geq 13{,}83$$

E, com $N_0 = 2\times 10^{-18}\text{W}$, temos que a potência é dada por

$$P_{tx} = \frac{E_{s,tx}R_b}{\log_2 M} = 166\text{mW}$$

Comunicações Móveis (2016/01)

Prof. André Noll Barreto

Tabela da Função Q

x	Q(x)		x	Q(x)		x	Q(x)
0,1	0,460172		2,1	0,017864		4,1	2,07E-05
0,2	0,42074		2,2	0,013903		4,2	1,33E-05
0,3	0,382089		2,3	0,010724		4,3	8,54E-06
0,4	0,344578		2,4	0,008198		4,4	5,41E-06
0,5	0,308538		2,5	0,00621		4,5	3,4E-06
0,6	0,274253		2,6	0,004661		4,6	2,11E-06
0,7	0,241964		2,7	0,003467		4,7	1,3E-06
0,8	0,211855		2,8	0,002555		4,8	7,93E-07
0,9	0,18406		2,9	0,001866		4,9	4,79E-07
1	0,158655		3	0,00135		5	2,87E-07
1,1	0,135666		3,1	0,000968		5,1	1,7E-07
1,2	0,11507		3,2	0,000687		5,2	9,96E-08
1,3	0,0968		3,3	0,000483		5,3	5,79E-08
1,4	0,080757		3,4	0,000337		5,4	3,33E-08
1,5	0,066807		3,5	0,000233		5,5	1,9E-08
1,6	0,054799		3,6	0,000159		5,6	1,07E-08
1,7	0,044565		3,7	0,000108		5,7	5,99E-09
1,8	0,03593		3,8	7,23E-05		5,8	3,32E-09
1,9	0,028717		3,9	4,81E-05		5,9	1,82E-09
2	0,02275		4	3,17E-05		6	9,87E-10