# Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Prova 1

Gabarito

## Questão 1 (4 pontos)

Um pulso é descrito por:

$$g(t)=\frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)u(-t+\tau), \qquad \tau>0$$

a) Esboce o pulso. Este é um sinal de energia ou de potência? Qual sua energia/potência? (0,7 ponto)

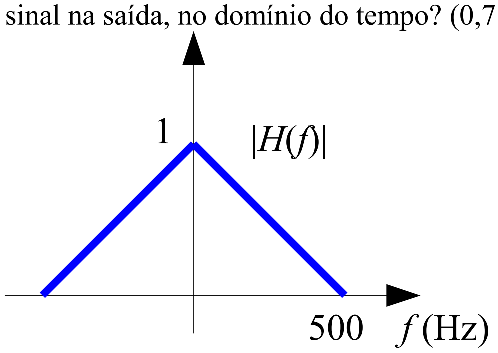
b) Dado um trem periódico de pulsos (0,7 ponto)

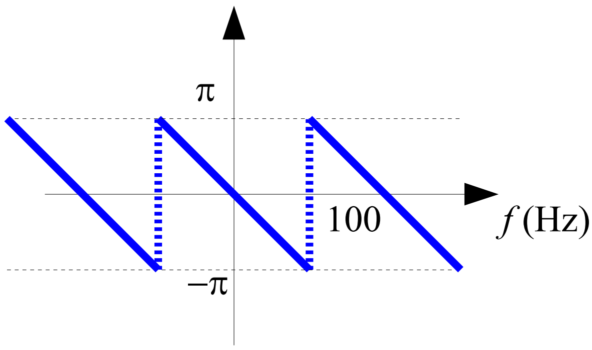
$$g_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_p(t-nT) \qquad T=4\tau$$

obtenha os três primeiros termos não nulos da série de Fourier trigonométrica compacta de $g_p(t)$, se $\tau$ =1ms.

c) Qual a porcentagem da potência contida nestes primeiros termos. (0,7 ponto)

d) O sinal $g_p$(t) passa por um filtro com a resposta espectral abaixo. Escreva a expressão para o sinal na saída, no domínio do tempo? (0,7 ponto)




e) Este filtro é realizável? Justifique. (0,6 ponto)

f) O sinal filtrado é multiplicado por um cosseno de frequência 1kHz. Esboce os espectros de fase e amplitude do sinal resultante. (0,6 ponto)

a) é um sinal limitado no tempo, portanto, de energia

$$E_g=\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\,dt=\int_0^{\tau}\frac{t^2}{\tau^2}e^{-2t/\tau}dt=\frac{1}{\tau^2}\frac{e^{-2t/\tau}}{(-8/\tau^3)}\left(4\frac{t^2}{\tau^2}+4\frac{t}{\tau}+2\right)\Bigg|_0^{\tau}$$

$$=\frac{\tau}{4}\left(1-5e^{-2}\right)=0{,}0808309\tau$$

b)

$$C_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\,dt=\frac{1}{4\tau}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} t\,e^{-t/\tau}\,dt=\frac{1}{4\tau^2}\tau^2 e^{-t/\tau}\left(-\frac{t}{\tau}-1\right)\Bigg|_0^{\tau}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2e^{-1}\right)=0{,}0660603$$

Para achar os termos da série compacta é mais fácil partir da série exponencial

$$D_1=\frac{1}{4\tau}\int_0^\tau \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}e^{-j2\pi t/4\tau}dt=\frac{1}{4\tau^2}\int_0^\tau t\,e^{-(1+j2\pi/4)t/\tau}dt$$

$$=\frac{1}{4\tau^2}\frac{e^{-(1+j\pi/2)t/\tau}}{(1+j\pi/2)^2/\tau^2}\left[\frac{-(1+j\pi/2)t}{\tau}-1\right]\Bigg|_0^\tau$$

$$=\frac{1}{4(1+j\pi/2)^2}\left[1-e^{-1}e^{-j\pi/2}(2+j\pi/2)\right]=\frac{1+je^{-1}(2+j\pi/2)}{4(1-\pi^2/4+j\pi)}$$

$$=\frac{1-e^{-1}\pi/2+j2e^{-1}}{4(1-\pi^2/4+j\pi)}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-e^{-1}\pi/2)^2+4e^{-2}}\exp\left(j\tan^{-1}\frac{2e^{-1}}{1-e^{-1}\pi/2}\right)}{4\sqrt{(1-\pi^2/4)^2+\pi^2}\exp\left(j\tan^{-1}\frac{\pi}{1-\pi^2/4}\right)}=0{,}0611594\,e^{j2{,}1837}$$

$$D_{-1}=0{,}0611594\,e^{-j2{,}1837}$$

$$C_1=|D_1|+|D_{-1}|=2|D_1|=0{,}122318$$

$$\theta_1=2{,}1837$$

$$D_2=\frac{1}{4\tau}\int_0^\tau \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}e^{-j4\pi t/4\tau}dt=\frac{1}{4\tau^2}\int_0^\tau t\,e^{-(1+j\pi)t/\tau}dt$$

$$=\frac{1}{4\tau^2}\frac{e^{-(1+j\pi)t/\tau}}{(1+j\pi)^2/\tau^2}\left[\frac{-(1+j\pi)t}{\tau}-1\right]\Bigg|_0^\tau$$

$$=\frac{1}{4(1+j\pi)^2}\left[1-e^{-1}e^{-j\pi}(2+j\pi)\right]=\frac{1-e^{-1}(2+j\pi)}{4(1-\pi^2+j2\pi)}$$

$$=\frac{1-2e^{-1}-je^{-1}\pi}{4(1-\pi^2+j2\pi)}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-2e^{-1})^2+\pi^2e^{-2}}\exp\left(j\tan^{-1}\frac{(-e^{-1}\pi)}{1-2e^{-1}}\right)}{4\sqrt{(1-\pi^2)^2+4\pi^2}\exp\left(j\tan^{-1}\frac{2\pi}{1-\pi^2}\right)}=0{,}0172973\,e^{-j0{,}74588}$$

$$D_{-2}=0{,}0172973\,e^{j0{,}74588}$$

$$C_2=|D_2|+|D_{-2}|=2|D_2|=0{,}0345946$$

$$\theta_2=-0{,}74588$$

A série fica

$$g_p(t)=0{,}0660603+0{,}122318\cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}+2{,}1837\right)+0{,}0345946\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}-0{,}74588\right)+\ldots$$

c) A potência do sinal é $P_g=\frac{E_g}{T}=\frac{0{,}0808309\tau}{4\tau}=0{,}0202077$

A potência do 3 primeiros termos é dada por

$$P_g\approx C_0^2+\frac{C_1^2}{2}+\frac{C_3^2}{2}=0{,}0660603^2+0{,}122318^2/2+0{,}0345946^2/2=0.01244=,6156\,E_g$$

d)

$$g_p(t) \approx C_0 + C_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1) + C_2 \cos(4\pi f_0 t + \theta_2) + C_3 \cos(6\pi f_0 t + \theta_3)$$

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{4} \times 10^{-3} = 250 \text{ Hz}$$

$$|H(f)| = 1 - \frac{|f|}{500}, \quad |f| < 500$$

$$\theta(f) = \frac{-\pi f}{100}$$

O filtro vai eliminar todos os componentes de frequência >= 500Hz, ou seja, só teremos os 2 primeiros termos da série de Fourier na saída, multiplicados pelo ganho do filtro em cada frequência.

O sinal filtrado é dado por

$$y_p(t) = C_0 + |H(f_0)| C_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1 + \theta(f_0))$$

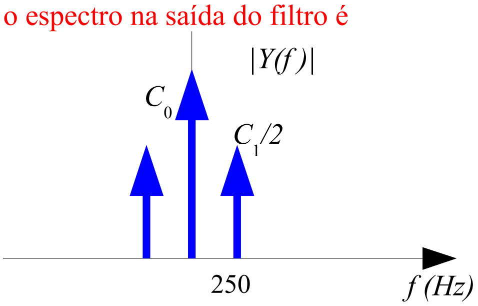
$$= C_0 + \frac{1}{2} C_1 \cos(500\pi t + \theta_1 - 5\pi/2)$$

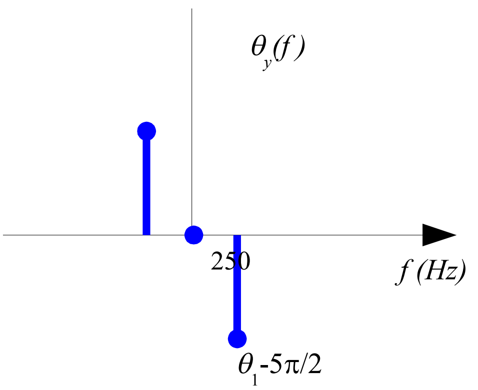
e) não o filtro não é realizável, pois contém faixas de frequência com ganho $|H(f)| = 0$, o que inviabiliza as condições de Paley-Wiener.

Alternativamente, podemos ver que $h(t) = K\,\text{sinc}^2(at - T)$, que é a transformada inversa de Fourier de $H(f)$, e consequentemente não é causal.

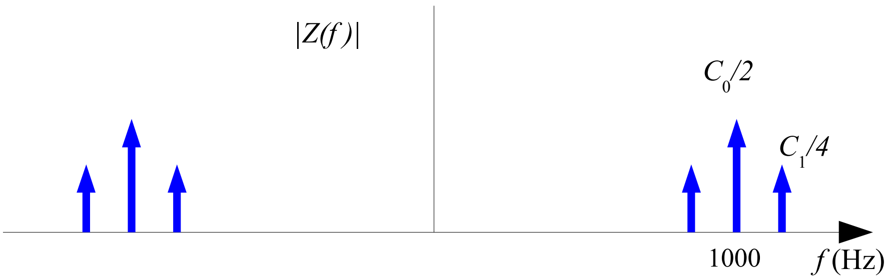
f)

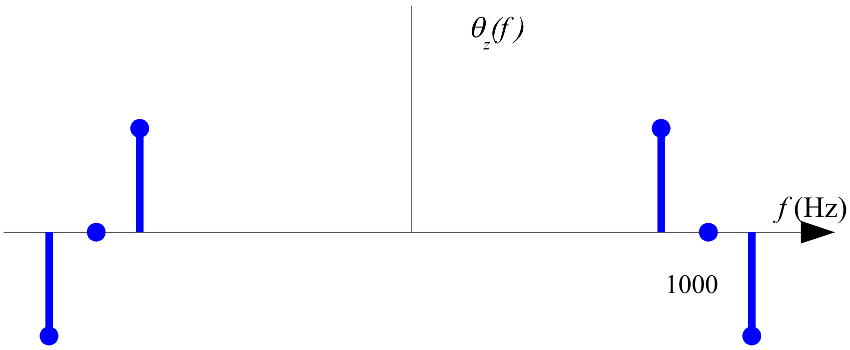
o espectro na saída do filtro é




sabemos que o efeito de multiplicarmos um sinal por uma senóide de frequência $f_0$ é deslocá-lo para $f_0$ e $-f_0$. Sendo assim, temos


$|Z(f)|$
$C_0/2$
$C_1/4$
1000
$f$ (Hz)


$\theta_z(f)$
$f$ (Hz)
1000

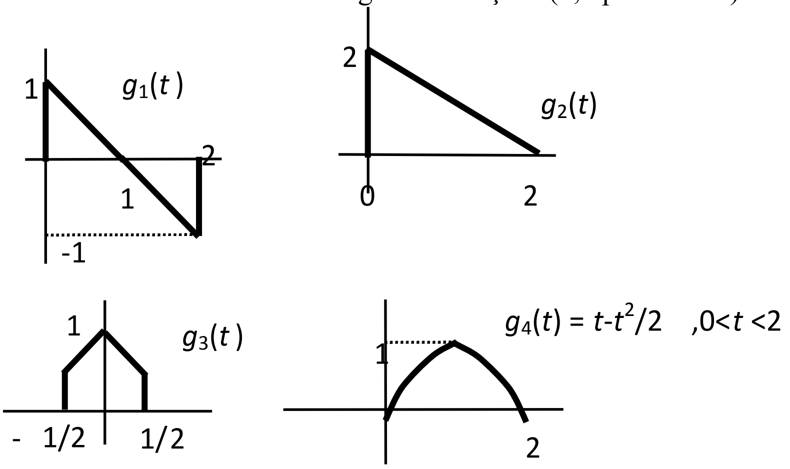
# Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

## Questão 2 (2 pontos)

a)É dado um sinal $g(t)=\Delta(t/2)u(t)$ , onde $\Delta(t)$ é um pulso triangular de amplitude e largura unitárias. Ache a sua transformada de Fourier *G*(*f*) (0,4 ponto)

b)Usando apenas as propriedades da transformada de Fourier em relação a *G*(*f*), **sem calcular a integral de Fourier ou utilizar a transformada de alguma outra função conhecida**, ache também a transformada das seguintes funções (0,4 ponto cada)




a)

$$g(t)=1-t, \qquad 0<t<1$$

$$G(f)=\int_0^1 e^{-j2\pi f t}\,dt-\int_0^1 t\,e^{-j2\pi f t}\,dt=\left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_0^1+\left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{4\pi^2 f^2}(-j2\pi f t-1)\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{j2\pi f}-\frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}-\frac{e^{-j2\pi f}}{4\pi^2 f^2}+\frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}+\frac{1}{4\pi^2 f^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f\right)$$

b)

$$g_1(t)=g(t)-g(-t+2)$$

$$x(t)=g(t+2)\Rightarrow X(f)=G(f)e^{j4\pi f}$$

$$y(t)=x(-t)=g(-t+2)\Rightarrow Y(f)=X(-f)=G(-f)e^{-j4\pi f}$$

$$G_1(f)=G(f)-G(-f)e^{-j4\pi f}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f\right)-\frac{e^{-j4\pi f}}{4\pi^2 f^2}\left(1-e^{j2\pi f}+j2\pi f\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f-e^{j4\pi f}+e^{-j2\pi f}-j2\pi f\,e^{j4\pi f}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-j2\pi f-e^{j4\pi f}-j2\pi f\,e^{j4\pi f}\right)$$

c)

$$g_2(t)=2g(t/2)$$

$$G_2(f)=2\frac{1}{1/2}G(2f)=4G(2f)=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-e^{-j4\pi f}-j4\pi f\right)$$

d)

$$g_3(t)=g(t)+g(-t)-\frac{g(2t-1)}{2}-\frac{g(-2t-1)}{2}$$

$$G_3(f)=G(f)+G(-f)-\frac{1}{2}G(f/2)e^{-j\pi f}-\frac{1}{2}G(-f/2)e^{j\pi f}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-e^{-j2\pi f}-e^{j2\pi f}\right)-\frac{1}{2\pi^2 f^2}\left(e^{-j\pi f}-e^{-j2\pi f}-j\pi f\, e^{-j\pi f}+e^{j\pi f}-e^{-j2\pi f}+j\pi f\, e^{j\pi f}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(1-2\cos(2\pi f)\right)-\frac{1}{2\pi^2 f^2}\left(2\cos(\pi f)-2e^{-j2\pi f}-2\pi f\sin(\pi f)\right)$$

também poderia ser

$$g_3(t)=\frac{1}{2}\left[g(2\mathrm{t})+g(-2\mathrm{t})+g\left(t+\frac{1}{2}\right)+g\left(-t+\frac{1}{2}\right)\right]$$

e)

$$g_4(t)=\int_0^t g_1(t)$$

$$G_4(f)=G\frac{(f)}{j2\pi f}+\frac{G(0)\delta(f)}{2}$$

$$=\frac{1}{j8\pi^3 f^3}\left(1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f\right)+\frac{\delta(f)}{2}\lim_{f\to 0}\frac{1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f}{4\pi^2 f^2}$$

$$\lim_{f\to 0}\frac{1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f}{4\pi^2 f^2}=\lim_{f\to 0}\frac{j2\pi e^{-j2\pi f}-j2\pi}{8\pi^2 f}=\lim_{f\to 0}\frac{4\pi^2 e^{-j2\pi f}}{8\pi^2}=\frac{1}{2}$$

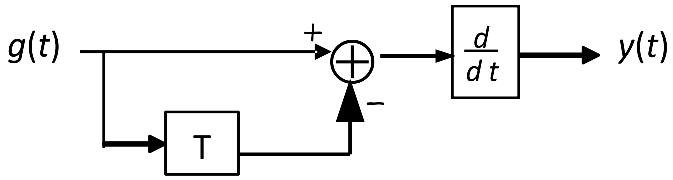
$$G_4(f)=\frac{1}{j8\pi^3 f^3}\left(1-e^{-j2\pi f}-j2\pi f\right)+\frac{\delta(f)}{4}$$

# Teoria das Comunicações
Prof. André Noll Barreto

## Questão 3 (2 pontos)

Dado um pulso cuja transformada de Fourier é $G(f)=\dfrac{f^{1/2}}{1-j f^2/400}$ .

a) Qual sua densidade espectral de energia? (0,5 ponto)
b) Qual sua largura de banda essencial, considerando que ela contém 99% da energia (0,5 ponto)
c) Qual a densidade espectral de energia da saída $y(t)$ do sistema abaixo? (0,5 ponto)
d) Esboce a densidade espectral de energia de $x(t) = g(t)\cos(2000\pi t)$? (0,5 ponto)




a)

$$\Psi_g(f)=|G(f)|^2=\frac{|f|}{1+\dfrac{f^4}{160.000}}$$

b) primeiro temos que calcular a energia total

$$E_g=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_g(f)\,df=2\int_0^{\infty}\Psi_g(f)\,df$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{f}{1+\dfrac{f^4}{160.000}}df=320.000\int_0^{\infty}\frac{f}{160.000+f^4}df=400\tan^{-1}\left.\frac{f^2}{400}\right|_0^{\infty}=200\pi$$

Agora podemos achar a banda essencial

$$2\int_0^{B}\Psi_g(f)\,df=0{,}99\,E_g=198\pi$$

$$400\tan^{-1}\left.\frac{f^2}{400}\right|_0^{B}=198\pi\Rightarrow\tan^{-1}\frac{B^2}{400}=\frac{99\pi}{200}\Rightarrow\frac{B^2}{400}=63{,}656\Rightarrow B=159{,}57$$

c)

$$y(t)=d\,\frac{g(t)-g(t-T)}{dt}$$

$$Y(f)=j2\pi f\left(G(f)-G(f)e^{-j2\pi fT}\right)$$

$$H(f)=\frac{Y(f)}{G(f)}=j2\pi f\left(1-e^{-j2\pi fT}\right)=j2\pi f\left(1-\cos(2\pi fT)+j\sin(2\pi fT)\right)$$

$$=-2\pi f\sin(2\pi fT)+j2\pi f\left(1-\cos(2\pi fT)\right)$$

$$\Psi_y(f)=|H(f)|^2\Psi_x(f)=4\pi^2f^2\left(\sin^2(2\pi fT)+\left(1-\cos(2\pi fT)\right)^2\right)\frac{|f|}{1+\dfrac{f^4}{160.000}}$$

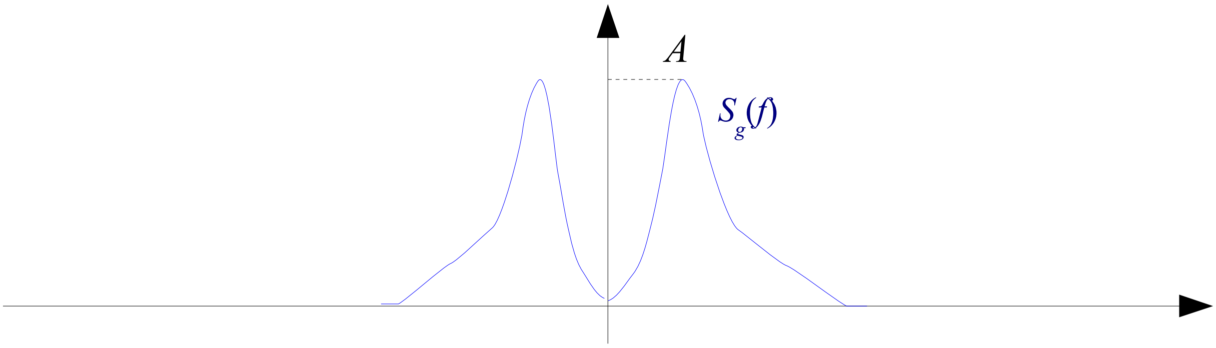
$$=4\pi^2f^2\left(2-2\cos(2\pi fT)\right)\frac{|f|}{1+\dfrac{f^4}{160.000}}$$

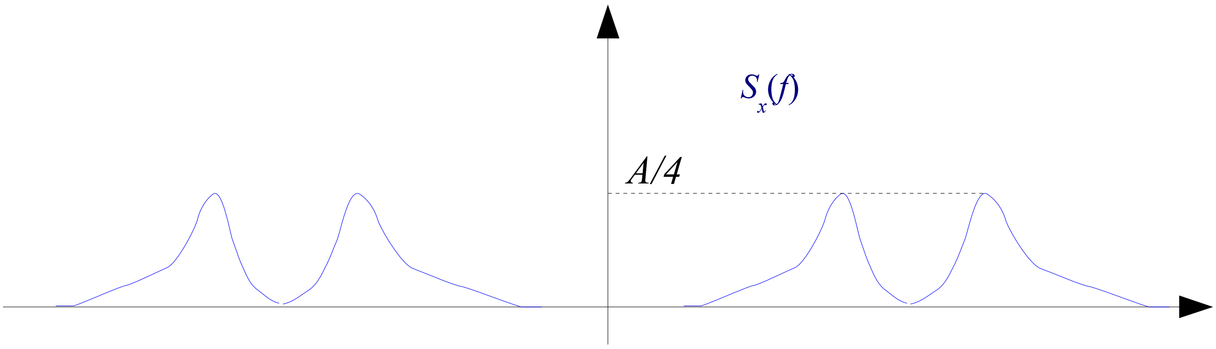
UnB

departamento de engenharia elétrica

d) houve erro no enunciado, deveria ser $x(t) = g(t)\cos(2\mathbf{000}\pi t)$. Neste caso, como a frequência do cosseno $f_c = 1000$ é bem maior que a banda essencial, temos que

$$\Psi_x(f) = \frac{1}{4}\left[\Psi_g(f-1000)+\Psi_g(f+1000)\right]$$ , ou seja




quem considerou $x(t) = g(t)\cos(20\pi t)$ deveria obter

$$\Psi_x(f) = \frac{1}{4}\left|G(f-f_0)+G(f+f_0)\right|^2$$
$$= \frac{1}{4}\left[\Psi_g(f+1000)+\Psi_g(f-1000)+\mathrm{Re}\left\{G(f+f_0)G^*(f-f_0)\right\}\right]$$

## Questão 4 (2 pontos)

O sinal $g(t)=\frac{1}{t^2+1}$ é amostrado a uma taxa 5 Hz. Antes da amostragem é realizada a filtragem por um filtro anti-*aliasing* passa-baixa ideal. Qual a frequência de corte máxima deste filtro? (0,5)

Calcule a transformada de Fourier discreta (DFT) deste sinal, considerando que foram obtidas 4 amostras (e que não foi aplicado o filtro anti-aliasing). (0,5)

Calcule sua transformada de Fourier e a compare com as amostras da DFT nas frequências correspondentes. (0,5)

Este sinal passa por uma convolução circular com um filtro digital com resposta ao impulso

$$h_n=\delta_n+0.5\,\delta_{n-1} \quad \text{, onde} \quad \delta_n=\begin{cases}1 & ,n=0\\ 0 & ,1\leq n<N\end{cases}$$

Qual é o sinal na saída do filtro? (0,5)

a) A frequência de corte do filtro anti-aliasing independe da banda do sinal. O importante é que sejam eliminados do sinal todos os componentes com frequência acima de $f_a$ / 2. Sendo assim, devemos ter $f_c$= 2,5Hz.

b) O intervalo de amostragem é

$$T_a=1/f_a=1/5=0{,}2\text{s}$$

As amostras foram obtidas como

$$g_n=T_a\,g(nT_a)$$
$$g_0=0{,}2\,g(0)=0{,}2$$
$$g_1=0{,}2\,g(0{,}2)=\frac{0{,}2}{1+0{,}04}=0{,}1923$$
$$g_2=0{,}2\,g(0{,}4)=\frac{0{,}2}{1+0{,}16}=0{,}1724$$
$$g_3=0{,}2\,g(0{,}6)=\frac{0{,}2}{1+0{,}36}=0{,}1471$$

Aplicando a fórmula da DFT, temos

$$G_0=g_0+g_1+g_2+g_3=0{,}71178$$
$$G_1=g_0+g_1e^{-j\pi/2}+g_2e^{-j\pi}+g_2e^{-j3\pi/2}$$
$$=0{,}2-j\,0{,}1923-0{,}1724+j\,0{,}1471=0{,}0276-0{,}0452\,j$$
$$G_2=g_0+g_1e^{-j\pi}+g_2e^{-j2\pi}+g_2e^{-j3\pi}$$
$$=0{,}2-0{,}1923+0{,}1724-0{,}1471=0{,}033$$
$$G_3=g_0+g_1e^{-j3\pi/2}+g_2e^{-j3\pi}+g_2e^{-j9\pi/2}=G_{-1}=G_1^*$$
$$=0{,}2+j\,0{,}1923-0{,}1724-j\,0{,}1471=0{,}0276+0{,}0452\,j$$

c) A transformada de Fourier da Função pode ser achada usando as propriedades:

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$
$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

sendo assim

$$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2} \overset{F}{\Leftrightarrow} e^{-a|-f|}=e^{-a|f|}$$
$$\frac{a}{\frac{a^2}{4\pi^2}+t^2} \overset{F}{\Leftrightarrow} 2\pi^2 e^{-a|f|}$$

Fazendo $\frac{a^2}{4\pi^2}=1 \Rightarrow a=2\pi$ , temos

$$\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{a}{\frac{a^2}{4\pi^2}+t^2} \overset{F}{\Leftrightarrow} \pi e^{-a|f|}=\pi e^{-2\pi|f|}$$

A DFT corresponde à transformada de Fourier amostrada nas frequências

$$k f_0 = k\frac{1}{N T_a}=1{,}25\, k\, HZ$$

Sendo assim deveríamos ter

$$G_0=\pi$$
$$G_1=\pi e^{-2{,}5\pi}=0{,}0012$$
$$G_2=\pi e^{-3{,}75\pi}=0{,}000024$$
$$G_3=G_1^*=G_1 \qquad \text{(o sinal é real)}$$

podemos ver que o resultado é bem diferente da DFT, o que ocorre porque selecionamos apenas poucas amostras.

d) A ideia é realizar a convolução circular entre *h* e *g*

Temos: $h=[1\,;0{,}5\,;0,0]$
$g=[0{,}2\,;0{,}1923\,;0{,}1724\,;0{,}1471]$;

A convolução circular é dada por

$$y_n=\sum_{m=0}^{N-1} g_m h_{n-m}, \qquad g_{-n}=g_{N-n}$$

Portanto

$$y_0=g_0h_0+g_1h_{-1}+g_2h-2+g_3h_{-3}=g_0h_0+g_3h_1=0{,}2+0{,}1471/2=0{,}27355$$
$$y_1=g_0h_1+g_1h_0+g_2h-1+g_3h_{-2}=g_1h_0+g_0h_1=0{,}1923+0{,}2/2=0{,}2923$$
$$y_2=g_0h_2+g_1h_1+g_2h0+g_3h_{-1}=g_2h_0+g_1h_1=0{,}1724+0{,}1923/2=0{,}26855$$
$$y_3=g_3h_0+g_2h_1=0{,}1471+0{,}1724/2=0{,}2333$$