

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 - 2010/02

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (4 pontos)

Um sinal periódico é descrito como

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_0)$$

com

$$g(t) = |t| \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

a) Calcule os três primeiros termos não nulos da série de Fourier trigonométrica compacta. (1 ponto)

b) Quais os termos equivalentes na série de Fourier exponencial? (0,5 ponto)

c) Qual a porcentagem da potência do sinal contida nestes termos? (1 ponto)

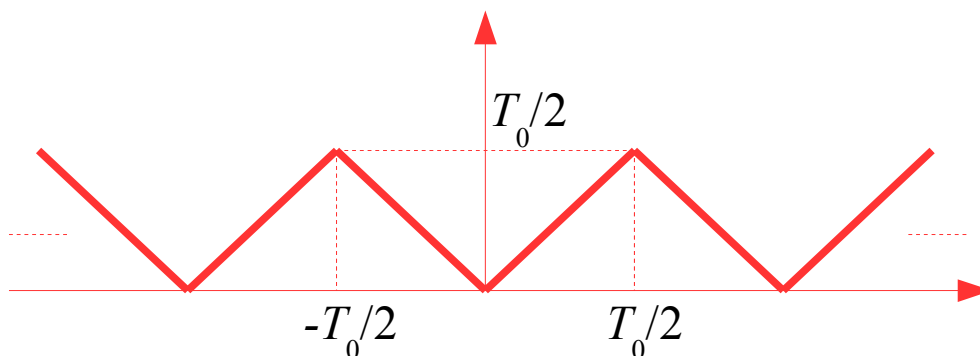
d) Considere agora que em vez da série trigonométrica, são usadas como funções base o conjunto de funções $\{1; x_{e,1}; x_{o,1}; x_{e,2}; x_{o,2}; x_{e,3}; x_{o,3}; \dots\}$, em que

$$x_{e,n} = \operatorname{sgn}(\cos(2\pi n f_0 t))$$

$$x_{o,n} = \operatorname{sgn}(\sin(2\pi n f_0 t))$$

Refaça os itens (a) e (c) neste caso. (1,5 ponto)

a) O sinal é dado pelo seguinte gráfico



O sinal é par, portanto só precisamos calcular os termos referentes à série de cossenos.

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} t dt = \frac{2}{T_0} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{T_0/2} = \frac{T_0}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} t \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) dt$$

$$= \frac{4}{T_0} \frac{T_0^2}{4n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + \frac{2\pi n t}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) \right]_0^{T_0/2}$$

$$= \frac{T_0}{n^2\pi^2} [\cos(\pi n) + \pi n \sin(\pi n) - 1] = \frac{T_0}{n^2\pi^2} [\cos(\pi n) - 1]$$

$$a_1 = \frac{-2T_0}{\pi^2} ; a_2 = 0 ; a_3 = \frac{-2T_0}{9\pi^2}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Portanto os 3 primeiros termos não nulos são:

$$g(t) \approx \frac{T_0}{4} - \frac{2T_0}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) - \frac{2T_0}{9\pi^2} \cos\left(\frac{6\pi t}{T_0}\right)$$

$$= \frac{T_0}{4} + \frac{2T_0}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} - \pi\right) + \frac{2T_0}{9\pi^2} \cos\left(\frac{6\pi t}{T_0} - \pi\right)$$

b) Para achar a série exponencial usamos o fato que $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$. Portanto

$$g(t) \approx \frac{T_0}{4} - \frac{T_0}{\pi^2} e^{j\frac{2\pi t}{T_0}} - \frac{T_0}{\pi^2} e^{-j\frac{2\pi t}{T_0}} - \frac{T_0}{9\pi^2} e^{j\frac{6\pi t}{T_0}} - \frac{T_0}{9\pi^2} e^{-j\frac{6\pi t}{T_0}}$$

$$= \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{\pi^2} e^{j\frac{2\pi t}{T_0}} e^{j\pi} + \frac{T_0}{\pi^2} e^{-j\frac{2\pi t}{T_0}} e^{-j\pi} + \frac{T_0}{9\pi^2} e^{j\frac{6\pi t}{T_0}} e^{j\pi} + \frac{T_0}{9\pi^2} e^{-j\frac{6\pi t}{T_0}} e^{-j\pi}$$

c) A potência do sinal é $P_g = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t^2 dt = \frac{1}{T_0} \frac{t^3}{3} \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{2}{T_0} \frac{T_0^3}{24} = \frac{T_0^2}{12}$

pelos 3 primeiros termos, a potência seria

$$P_{g,3} = a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_3^2}{2} = \frac{T_0^2}{16} + \frac{4T_0^2}{2\pi^4} + \frac{4T_0^2}{2(81)\pi^4} = 0,08328 T_0^2 = 0,9994 P_g$$

d) as funções base são ondas retangulares periódicas, com períodos iguais aos da série trigonométrica. Precisamos também apenas dos termos correspondentes aos sinais base pares.

O termo a_0 é o mesmo da série trigonométrica.

Como as funções $x_{o,n}$ são ímpares e $g(t)$ é par, só precisamos calcular os termos correspondentes às funções $x_{e,n}$, assim como na série trigonométrica.

Todas as funções base tem a mesma energia em um período T_0 , $E_n = T_0$. Os coeficientes da série são dados por

$$a_1 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) x_{e,1}(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/4} t dt - \frac{2}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/2} t dt = \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T_0/4} - \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T_0/4}^{T_0/2}$$

$$= 2 \frac{(2)}{T_0} \frac{T_0^2}{16(2)} - \frac{2}{T_0} \frac{T_0^2}{4(2)} = -\frac{T_0}{8}$$

$$a_2 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/8} t dt - \frac{2}{T_0} \int_{T_0/8}^{3T_0/8} t dt + \frac{2}{T_0} \int_{3T_0/8}^{T_0/2} t dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T_0/8} - \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T_0/8}^{3T_0/8} + \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{3T_0/8}^{T_0/2}$$

$$= \frac{2(2)}{T_0} \frac{T_0^2}{64(2)} - \frac{2(2)}{T_0} \frac{9T_0^2}{64(2)} + \frac{2}{T_0} \frac{T_0^2}{4(2)} = 0$$

$$a_3 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/12} t dt - \frac{2}{T_0} \int_{T_0/12}^{3T_0/12} t dt + \frac{2}{T_0} \int_{3T_0/12}^{5T_0/12} t dt - \frac{2}{T_0} \int_{5T_0/12}^{T_0/2} t dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T_0/12} - \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T_0/12}^{3T_0/12} + \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{3T_0/12}^{5T_0/12} - \frac{2}{T_0} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{5T_0/12}^{T_0/2}$$

$$= \frac{2(2)}{T_0} \frac{T_0^2}{144(2)} - \frac{2(2)}{T_0} \frac{9T_0^2}{144(2)} + \frac{2(2)}{T_0} \frac{25T_0^2}{144(2)} - \frac{2}{T_0} \frac{36T_0^2}{144(2)} = -\frac{1}{72}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

pelos 3 primeiros termos, e, a potência seria

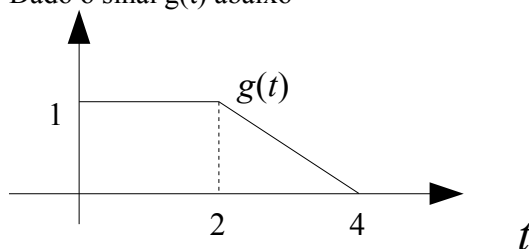
$$P_{g,3} = a_0^2 + a_1^2 + a_3^2 = \frac{T_0^2}{16} + \frac{T_0^2}{64} + \frac{T_0^2}{(72)^2} = 0,78318 T_0^2 = 0,9398 P_g$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2 pontos)

Dado o sinal $g(t)$ abaixo



Calcule sua transformada de Fourier, **sem resolver a integral de Fourier**, usando apenas as propriedades na tabela no final da prova. (1 ponto)

Ache **e-esboce** o espectro de amplitude e de fase. (0,5 ponto)

Qual sua densidade espectral de energia? (0,5 ponto)

a)

Existem várias maneiras de se obter a função g , em termos das funções rect e triang. , e degrau , como por exemplo

$$g(t) = \Delta(t/4 - 1/2) + \Delta(t/4) \text{rect}(t/2 - 1/2) \quad \text{ou}$$

$$g(t) = \Delta(t/4 - 1/2) u(t-2) + \text{rect}(t/2 - 1/2) \quad \text{ou}$$

$$g(t) = (2\Delta(t/8) - \Delta(t/4)) u(t) \quad \text{ou}$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \left(\delta(x) - \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) \right) dx$$

Pela última fórmula, evitamos realizar uma convolução na frequência, e temos a transformada

$$G_1(f) = F \left\{ \delta(t) - \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) \right\} = 1 - \text{sinc}(2\pi f) e^{-j6\pi f}$$

$$G(f) = \frac{G_1(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G_1(0) \delta(f) = \frac{1 - \text{sinc}(2\pi f) e^{-j6\pi f}}{j2\pi f}$$

b)

$$G(f) = \frac{1 - \text{sinc}(2\pi f) \cos(6\pi f) + j \text{sinc}(2\pi f) \sin(6\pi f)}{j2\pi f}$$

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \sqrt{\frac{1 + \text{sinc}^2(2\pi f) \cos^2(6\pi f) - 2 \text{sinc}(2\pi f) \cos(6\pi f) + \text{sinc}^2(2\pi f) \sin^2(6\pi f)}{4\pi^2 f^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \text{sinc}^2(2\pi f) - 2 \text{sinc}(2\pi f) \cos(6\pi f)}}{2\pi f} \end{aligned}$$

$$\Theta_f = \tan^{-1} \left(\frac{\text{sinc}(2\pi f) \sin(6\pi f)}{1 - \text{sinc}(2\pi f) \cos(6\pi f)} \right) - \frac{\pi}{2}$$

c)

$$\Psi(f) = |G(f)|^2 = \frac{1 + \text{sinc}^2(2\pi f) - 2 \text{sinc}(2\pi f) \cos(6\pi f)}{4\pi^2 f^2}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2 pontos)

O sinal

$$x(t) = \cos^2(200\pi t) + \sin(300\pi t)$$

é transmitido por um equipamento não linear, cuja resposta é dada por

$$y(t) = x(t) + 0,001 x^2(t)$$

Esboce o espectro de fase e amplitude na saída da não linearidade (1 ponto).

No receptor, o sinal passa por um filtro passa-baixa ideal, com frequência de corte igual à largura de banda do sinal $x(t)$. Sabemos também que o receptor tem ruído térmico branco aditivo com densidade espectral de potência $N_0/2 = 5 \times 10^{-4} \text{ W/Hz}$. Qual a razão (em dB) entre a potência do sinal desejado $x(t)$ e a potência da soma de distorção com ruído na saída do filtro? (1 ponto)

a)

o sinal pode ser expandido como

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(400\pi t)}{2} + \sin(300\pi t)$$

na saída da não linearidade temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(400\pi t)}{2} + \sin(300\pi t) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1000} \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos^2(400\pi t)}{4} + \sin^2(300\pi t) + \frac{\cos(400\pi t)}{2} + \sin(300\pi t) + \cos(400\pi t)\sin(300\pi t) \right] \\ &= 0,500875 - 0,0005 \sin(100\pi t) + 1,001 \sin(300\pi t) + 0,5005 \cos(400\pi t) + \dots \\ &\dots - 0,0005 \cos(600\pi t) + 0,0005 \sin(700\pi t) + 0,00025 \cos(800\pi t) \end{aligned}$$

O espectro de amplitude e fase deve apresentar os seguintes componentes com as seguintes amplitudes e fases

Frequência (Hz)	amplitude	fase
-400	$1,25 \times 10^{-4}$	0
-350	$2,5 \times 10^{-4}$	$\pi/2$
-300	$2,5 \times 10^{-4}$	0
-200	0,250025	0
-150	0,500050	$\pi/2$
-50	$2,5 \times 10^{-4}$	$-\pi/2$
0	0,250044	0
50	$2,5 \times 10^{-4}$	$\pi/2$
150	0,500050	$-\pi/2$
200	0,250025	0
300	$2,5 \times 10^{-4}$	0
350	$2,5 \times 10^{-4}$	$-\pi/2$
400	$1,25 \times 10^{-4}$	0

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

b) O filtro irá remover todos os componentes com frequência acima de 200 Hz. Sendo assim teremos o sinal

$$z(t) = 0.500875 - 0.0005 \sin(100 \pi t) + 1,001 \sin(300 \pi t) + 0,5005 \cos(400 \pi t)$$

A potência do sinal desejado é

$$P_s = 0,5^2 + \frac{1^2}{2} + \frac{0,5^2}{2} = 0,875$$

a interferência é o componente em 50 Hz, cuja potência é

$$P_I = \frac{0,0005^2}{2} = 0,125 \times 10^{-6}$$

A potência do ruído branco é

$$P_N = BN_0 = 200 (5 \times 10^{-4})$$

e a razão sinal ruído

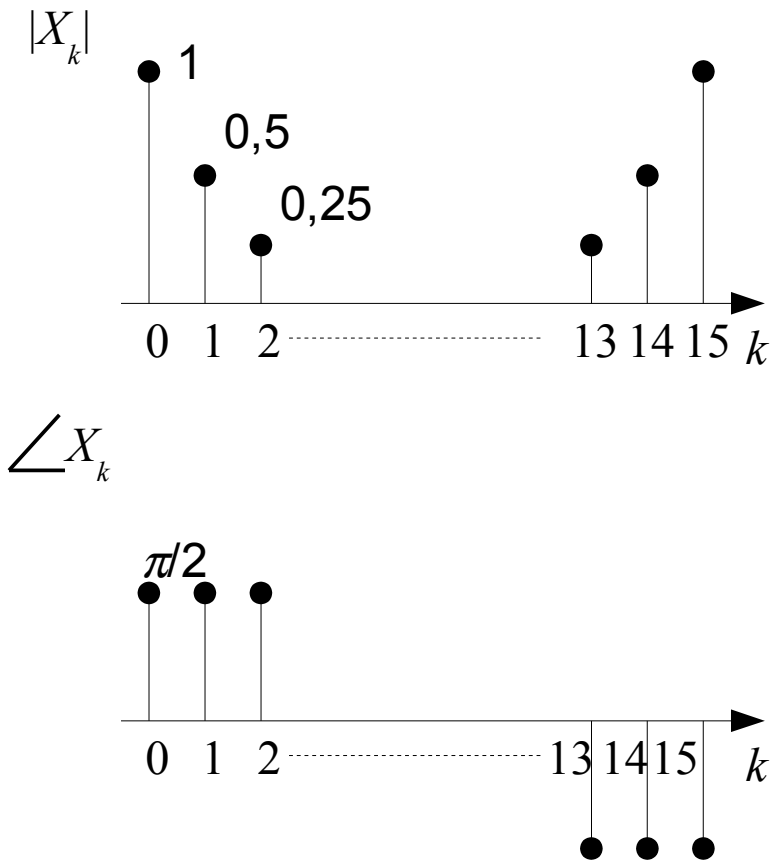
$$RSR = \frac{P_s}{P_I + P_N} = 8,75 = 9,4 \text{ dB}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 4

A transformada de Fourier discreta (DFT) de um sinal amostrado com $N=16$ amostras e intervalo de amostragem $T_a = 1\text{ms}$ é representada nas figuras abaixo.



Qual a largura de banda aproximada deste sinal? (1,0 ponto)

Ache as 4 primeiras amostras do sinal. (1,0 ponto)

antes de mais nada, havia um erro no exercício, a primeira amostra na frequência deveria estar em 1, e não em 0. O problema pode ser resolvido assim mesmo, mas resultará em um sinal complexo.

a) o intervalo entre as amostras na frequência é dado por

$$f_a = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{NT_a} = \frac{1}{16 \times 10^{-3}} = 62,5 \text{ Hz}$$

como temos espectro apenas nas três primeiras frequências, a banda estimada do sinal é

$$B = 3 * 62,5 \text{ Hz} = 187,5 \text{ Hz}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

b) é só aplicar a fórmula da transformada inversa

$$\begin{aligned}g(nT_a) &= \frac{1}{NT_a} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi k n T_a} = \frac{1}{16 \times 10^{-3}} \sum_{k=0}^{15} G_k e^{j\pi k n / 8} \\&= \frac{10^3}{16} \left(e^{j\pi/2} + \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{j\pi n/8} + \frac{1}{4} e^{j\pi/2} e^{j\pi n/4} + \frac{1}{4} e^{-j\pi/2} e^{j13\pi n/8} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{j14\pi n/8} + e^{-j\pi/2} e^{j15\pi n/8} \right) \\g(0) &= \frac{10^3}{16} \left(j + \frac{j}{2} + \frac{j}{4} - \frac{j}{4} - \frac{j}{2} - j \right) = 0 \\g(T_a) &= \frac{10^3}{16} \left(j + \frac{j}{2} e^{j\pi/8} + \frac{j}{4} e^{j\pi/4} - \frac{j}{4} e^{j13\pi/4} - \frac{j}{2} e^{j7\pi/4} - j e^{j15\pi/8} \right)\end{aligned}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \tan^{-1}(-b/a))$$

Integrais:

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax \cos ax)$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \sin ax)$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \sin ax + 2 \cos ax - a^2 x^2 \cos ax)$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2 \sin ax + a^2 x^2 \sin ax)$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4 + x^4} \, dx = \frac{1}{2a^2} \tan^{-1} \frac{x^2}{a^2}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Série de Fourier Generalizada:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$

$$c_n = \frac{1}{E_n} \int_{T_0} g(t) x_n^* dt$$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

$$C_0 = a_0; \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}; \quad D_{-n} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi f t} dt \stackrel{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} df$$

$$\delta(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at} u(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a + j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \delta(f - f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{j}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

$$u(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$\text{sgn } t \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} |\tau| \text{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\text{sinc}(2\pi B t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|} \text{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t) + k_2 g_2(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f) + k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t - t_0) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} G(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t) e^{j2\pi f_0 t} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} G(f - f_0)$$

$$g_1(t) * g_2(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} G_1(f) G_2(f)$$

$$g_1(t) g_2(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} G_1(f) * G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^t g(x) dx \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G(0) \delta(f)$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N} \quad g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto