Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 – 2010/02

27/01/2011

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste em 4 questões discursivas.
- A prova terá a duração de 2h30.
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta.
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadores podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas.

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

UnB

departamento
de engenharia
elétrica

Questão 1 (4 pontos)

Deseja-se transmitir, em um canal de banda base com banda disponível de 10 MHz, um sinal multiplexado em TDM, composto por N sinais de voz, limitados em faixa em 3,4 kHz, discretizados a uma taxa de amostragem 30% superior à taxa mínima de Nyquist, e digitalizados em PCM.
As amostras de cada sinal são quantizadas utilizando-se a Lei A (A = 87,6) e cada amostra é codificada com *n* bits. Deseja-se para esse sistema uma razão sinal-ruído maior que 36 dB para cada sinal de voz, considerando apenas o ruído de quantização.

(a) Determine o número máximo de sinais de voz (isto é, o maior valor para N) que podem ser transmitidos por esse sistema, se for utilizada codificação binária, considerando que utilizamos a banda de transmissão mínima. (1 ponto)

(b) Em vez da banda de transmissão mínima, foram utilizados pulsos que satisfazem o critério de Nyquist com fator de roll-off igual a 0,25. Mantendo-se o mesmo número de usuários e a mesma taxa de amostragem, qual passa a ser a razão sinal-ruído em dB? (1 ponto)

(c) Cite uma vantagem de utilizarmos pulsos com roll-off maior que 0, em vez de utilizarmos pulsos com banda mínima? (1 ponto)

(d) Queremos reduzir a banda a 5MHz, mantendo o mesmo número de usuários com a mesma qualidade do enunciado original (SNR>36dB) e com pulsos com fator de roll-off igual a 0,25. Para isso podemos utilizar pulsos não binários, variando a amplitude do pulso (PAM). Qual o valor *M* do número de amplitudes possíveis? (1 ponto)

a)
a frequência de amostragem para cada sinal é
$$f_s = 1{,}3(2B) = 2{,}6(3{,}4\,\text{kHz}) = 8{,}84\,\text{kHz}$$
agora precisamos achar o número de bits/amostra
$$RSR = \frac{3L^2}{[1+\ln(A)]^2} \geq 10^{3,6} \Rightarrow L^2 \geq 10^{3,6}\frac{[1+\ln(A)]^2}{3} = 39746 \Rightarrow L \geq 199$$
$$n = \lceil \log_2(L) \rceil = 8$$
cada sinal requer portanto
$$R_{b,s} = f_s n = 70{,}72\,\text{kbps}$$
a taxa total de dados que podemos alcançar é
$$B_T = \frac{R_b}{2} \Rightarrow R_b = 2B_T = 20\,\text{Mbps}$$
e consequentemente o número de sinais que podemos transmitir é
$$N = \left\lfloor \frac{R_b}{R_{b,s}} \right\rfloor = 282$$

b) com fator de roll-off 0,25, a taxa total de dados passa a ser

$$B_T = \frac{R_b'}{2}(1+r) \Rightarrow R_b' = 2\frac{B_T}{(1+r)} = \frac{20\times 10^6}{1,25} = 16\,\text{Mbps}$$

Como temos o mesmo número de usuários, a taxa de dados por usuário é

$$R_{b,s}' = \frac{R_b'}{N} = \frac{16\,\text{Mbps}}{282} = 56,74\,\text{kbps}$$

e com a taxa de amostragem mantida, temos

$$n' = \left\lfloor \frac{R_{b_s}'}{f_s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{56,74\,\text{kbps}}{8,84\,\text{kHz}} \right\rfloor = 6\ \text{bits/amostra}$$

A mesma conclusão pode ser obtida verificando que a taxa de bits, e, consequentemente, o número de bits de amostra seria reduzida por um fator $1/(1+r) = 0,8$. Ou seja, em vez de 8 bits/amostra, vamos ter $n' = \lfloor 0,8\,n \rfloor = 6$ bits/amostra.

Teremos então $L' = 2^{n'} = 64$ níveis de quantização, e, consequentemente,

$$RSR' = \frac{3L'^2}{[1+\ln(A)]^2} = \frac{3(64)^2}{[1+\ln(87,6)]^2} = 410 = 26\,\text{dB}$$

c) As vantagens de termos pulsos com fator de roll-off diferente de zero são

- filtro mais fácil de se implementar, e, principalmente,
- amplitude do pulso decai mais rapidamente, reduzindo a ISI em caso de erro no instante de amostragem

d) queremos manter o número de usuários e a qualidade do item (a), portanto a taxa de bits total R_b deve ser a mesma. Sendo assim

$$B_T' = \frac{R_s}{2}(1+r) = \frac{R_b}{2\log_2 M}(1+r) \Rightarrow \log_2 M = \frac{N\,R_{b,s}}{2\,B_T'}(1+r) = \frac{282(70720)}{10\times 10^6}1,25 = 2.5$$

Arredondando pro próximo inteiro, temos que

$$M = 2^3 = 8$$

Questão 2 (3 pontos)

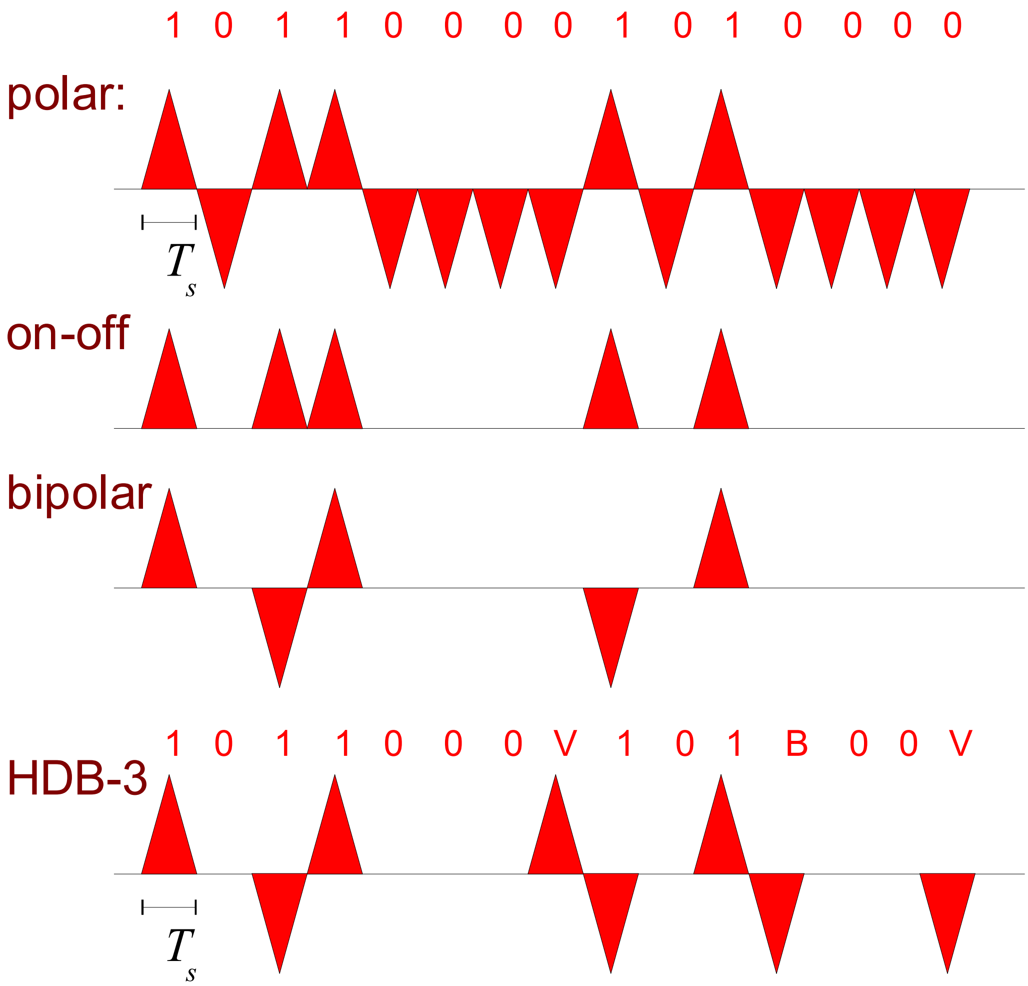
Um sistema de transmissão binária utiliza pulsos triangulares com largura T_s $p(t)=\Delta\left(\frac{t}{T_s}\right)$, em que T_s é o intervalo de símbolos.

(a) Esboce o sinal transmitido para sequência 101100001010000 para os esquemas de código de linha (1 ponto)
   i) polar
   ii) on-off
   iii) bipolar
   iv) high density bipolar (HDB-3)

(b) Ache e esboce o espectro para transmissão (1 ponto)
   i) polar e
   ii) on-off

(c) suponha agora que o pulso seja $p(t)=\Delta\left(\frac{t}{3T_s}\right)$. Projete um equalizador de $2N+1=3$ taps que elimine a interferência intersimbólica. Lembre-se que o pulso na saída do equalizador será dado por $p_o(t)=\sum_{n=-N}^{N} C_n p(t-nT_b)$. (1 ponto)

a)



b)

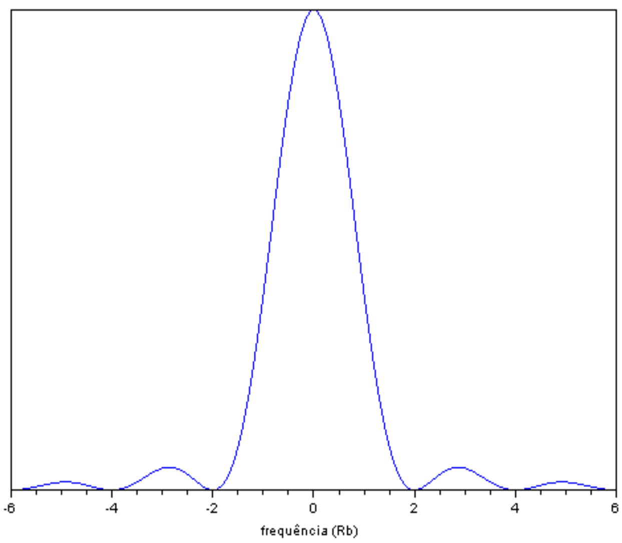
$$p(t)=\Delta\left(\frac{t}{T_s}\right)\Rightarrow P(f)=\frac{T_s}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\pi f\frac{T_s}{2}\right)=\frac{T_s}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f}{2R_s}\right)$$

Para codificação polar e on-off:

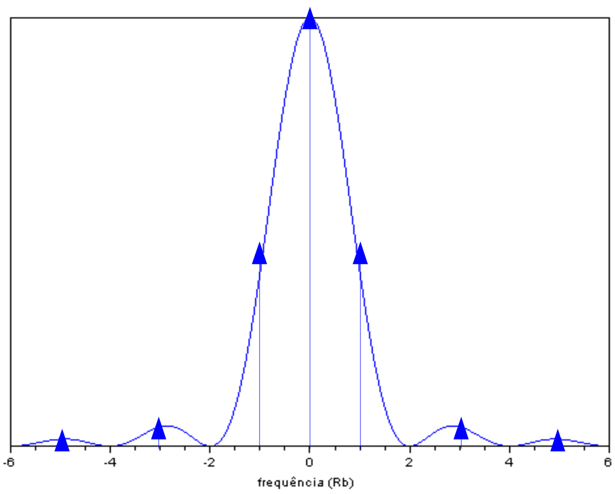
$$S_{y,\text{polar}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_s}=\frac{T_s}{4}\operatorname{sinc}^4\left(\frac{\pi f}{2R_s}\right)$$

$$S_{y,\text{on-off}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{4T_s}\left[1+\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)\right]=\frac{T_s}{16}\operatorname{sinc}^4\left(\frac{\pi f}{2R_s}\right)\left[1+\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-nR_s\right)\right]$$

polar:



on-off



c)o pulso agora terá duração entre $-1{,}5T_s$ e $1{,}5T_s$ e causará interferência inter-simbólica. Na saída do equalizador teremos o pulso $p_o(t)$, que não terá interferência.
O pulso de saída é

$$p_{o,k}=p_o(kT_s)=\sum_{n=-1}^{1} C_n p((k-n)Ts)=\sum_{n=-1}^{1} C_n p_{k-n} \quad ,$$

e

$$p_k=\Delta\left(\frac{kT_s}{3T_s}\right)\Rightarrow p_{-1}=p_1=\Delta(1/3)=\frac{1}{3}$$

Podemos então montar o sistema

$$p_{o,-1}=C_{-1}p_0+C_0p_{-1}+C_1p_{-2}=C_{-1}+\frac{C_0}{3} \qquad =0$$

$$p_{o,0}=C_{-1}p_1+C_0p_0+C_1p_{-1}=\frac{C_{-1}}{3}+C_0+\frac{C_1}{3}=1$$

$$p_{o,1}=C_{-1}p_2+C_0p_1+C_1p_0= \qquad +\frac{C_0}{3}+C_1=0$$

ou

$$\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 0\\ 1/3 & 1 & 1/3\\ 0 & 1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{-1}\\ C_0\\ C_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \quad ,$$

que pode facilmente ser resolvido por substituição

$$C_{-1}=C_1=\frac{-C_0}{3}$$

$$\Rightarrow-\frac{C_0}{9}+C_0-\frac{C_0}{9}=1\Rightarrow C_0=\frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow C_{-1}=C_1=\frac{3}{7}$$

Questão 3 (1 ponto)

Explique sucintamente porque o DPCM oferece ganho de desempenho quando comparado ao PCM.

O ganho do DPCM provém do fato que precisamos quantizar apenas a diferença entre a amostra do sinal e sua predição baseada nas amostras anteriores.
A amplitude máxima d_p desta diferença é usualmente menor que a amplitude máxima da mensagem m_p, e, consequentemente, o erro de quantização é menor, dado um mesmo número de níveis de quantização.

Questão 4 (2 pontos)

Qual a probabilidade de erro de um sistema com transmissão polar binária utilizando pulsos retangulares de largura T_s, sabendo-se que a razão de potências entre o sinal e o ruído é de 3dB? (1 ponto)
E para transmissão on-off? (0,5 ponto)
E para uma transmissão quaternária por variação de amplitude, qual seria a razão sinal ruído necessária para termos a mesma probabilidade de erro que no primeiro item? (0,5 ponto)

Lembre-se que $P(\epsilon)=Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$, em que d é a distância entre as possíveis amplitudes dos símbolos e σ^2 a potência do ruído.

a) para o pulso retangular de largura igual à largura do símbolo, e amplitude A, temos que

$$P_{\text{polar}}=\frac{\int_{T_s} g^2(t)\,dt}{T_s}=A^2$$

A potência do ruído é dada por σ^2. Assim

$$RSR=\frac{A^2}{\sigma^2}=2\Rightarrow\sigma=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

A probabilidade de erro para codificação polar é

$$P(\epsilon)=Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)=Q(\sqrt{2})=Q(1{,}4142...)\approx 0{,}08076$$

b) para on-off, com a mesma amplitude

$$P_{\text{polar}}=\frac{A^2}{2}\Rightarrow RSR=\frac{A^2}{2\sigma^2}=2\Rightarrow\sigma=\frac{A}{2}$$

A probabilidade de erro para codificação on-off é

$$P(\epsilon)=Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)=Q(1)=0{,}15866$$

c)
Para sinalização quaternária, mantendo a mesma probabilidade de erro do primeiro item devemos manter a distância $2A$ entre os níveis. Podemos escolher os níveis -3A, -A, A e 3A, cuja potência é

$$P_Q=\frac{1}{4}(-3A)^2+\frac{1}{4}(-A)^2+\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}(3\mathrm{A})^2=5A^2$$

Com o mesmo nível de ruído do item (a) temos

$$RSR_Q=\frac{P_Q}{\sigma^2}=\frac{5A^2}{A^2/2}=10=10\,\mathrm{dB}$$

Também é aceitável quem escolheu os níveis 0, 2A, 4A, 6A. Neste caso teríamos

$$P_Q=\frac{1}{4}(0)^2+\frac{1}{4}(2A)^2+\frac{1}{4}(4A)^2+\frac{1}{4}(6A)^2=14A^2$$

$$RSR_Q=\frac{P_Q}{\sigma^2}=\frac{14A^2}{A^2/2}=28=14{,}5\,\mathrm{dB}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \;\; \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi f t} dt \;\; \overset{F}{\Leftrightarrow} \;\; G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} df$$
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \;\; \overset{F}{\Leftrightarrow} \;\; |\tau| \mathrm{sinc}(\pi f \tau)$$
$$\mathrm{sinc}(2\pi B t) \;\; \overset{F}{\Leftrightarrow} \;\; \frac{1}{|2B|}\mathrm{rect}(f/2B)$$
$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \;\; \overset{F}{\Leftrightarrow} \;\; \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \;\; \overset{F}{\Leftrightarrow} \;\; \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Razão sinal-ruído de quantização

$$RSR_{\text{uniforme}} = 3L^2 \frac{P_m}{m_p^2}$$
$$RSR_{\text{lei }\mu} = 3L^2 \frac{1}{\left(\ln(1+\mu)\right)^2}$$
$$RSR_{\text{lei A}} = 3L^2 \frac{1}{\left(1+\ln(A)\right)^2}$$
$$RSR_{\text{delta}} = \frac{3 f_s P_m}{\sigma^2 B}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Densidade Espectral de Potência de Códigos de Linha

$$S_y(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_b}=\frac{|P(f)|^2}{T_b}\left(R_0+2\sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos 2\pi n f T_b\right)$$

$$S_{y,\,\text{polar}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_b}$$

$$S_{y,\,\text{on-off}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{4T_b}\left[1+\frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_b}\right)\right]$$

$$S_{y,\,\text{bipolar}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_b}\sin^2(\pi f T_b)$$

Tabela da Função Q

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0.0	0.50000	2.0	0.02275
0.1	0.46017	2.1	0.01786
0.2	0.42074	2.2	0.01390
0.3	0.38209	2.3	0.01072
0.4	0.34458	2.4	0.00820
0.5	0.30854	2.5	0.00621
0.6	0.27425	2.6	0.00466
0.7	0.24196	2.7	0.00347
0.8	0.21186	2.8	0.00256
0.9	0.18406	2.9	0.00187
1.0	0.15866	3.0	0.00135
1.1	0.13567	3.1	0.00097
1.2	0.11507	3.2	0.00069
1.3	0.09680	3.3	0.00048
1.4	0.08076	3.4	0.00034
1.5	0.06681	3.5	0.00023
1.6	0.05480	3.6	0.00016
1.7	0.04457	3.7	0.00011
1.8	0.03593	3.8	0.00007
1.9	0.02872	3.9	0.00005