Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 – 2011/2 (27/09/2011)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sinal periódico é descrito como

$$g_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT_0) \quad \text{, com} \quad g(t)=|\text{sen}\, 2\pi f_c t|\, u(t)\, u(T_0-t) \quad .$$

a) Para $f_c=f_0=1/T_0$ ache uma aproximação de $g_p(t)$ pelos primeiros termos não nulos da série de Fourier trigonométrica compacta que contêm 99% da potência do sinal. Por esta definição, qual a largura de banda essencial deste sinal? (1,5 ponto)

b) O sinal passa por um derivador, de modo que temos na saída (1 ponto)

$$y(t)=\frac{d\, g_p(t)}{dt}$$

Qual a a série de Fourier **exponencial** para o sinal y(t)?

a)

A função $g(t)$ pode ser escrita também como

$$g(t)=\left|\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right|, \qquad 0\leq t<T_0 \quad \text{, e} \quad g_p(t)$$ indica que este sinal é repetido periodicamente

com período T_0. Além disso vemos que dentro de um período T_0 temos um ciclo completo da senoide, mas devido ao módulo temos a repetição de um meio ciclo positivo da senoide. Portanto o período mínimo deste sinal periódico é

$$T_0'=\frac{T_0}{2}\Rightarrow f0'=2f_0 \quad .$$

A potência do sinal pode ser achada sem cálculos, pois sabemos que a potência de uma senoide com amplitude unitária é sempre

$$P_g=\frac{1}{2} \quad .$$

Devido ao módulo na função, o sinal $g(t)$ é um sinal par, e consequentemente todos os termos correspondentes aos senos (b_n) na série de Fourier são nulos.

Partimos então para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier, começando pelo termo DC:

$$C_0=a_0=\frac{1}{T_0'}\int_0^{T_0'} g(t)\,dt=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)dt$$
$$=\frac{2}{T_0}\left[\frac{-T_0}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)\right]_0^{T_0/2}=\frac{2}{\pi}$$

A potência no termo DC é $P_0=C_0^2=\frac{4}{\pi^2}=0{,}81\,P_g$

Partimos então para os termos dos cossenos:

$$a_n=\frac{2}{T_0'}\int_0^{T_0'} g(t)\cos(2\pi n f_0' t)\,dt=\frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2}\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)\cos\left(\frac{4\pi n t}{T_0}\right)dt$$
$$=\frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi(2n+1)t}{T_0}\right)-\text{sen}\left(\frac{2\pi(2n-1)t}{T_0}\right)\right]dt=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{4}{4n^2-1}\right]$$

portanto:

$$a_1=\frac{-4}{3\pi}\Rightarrow C_1=\frac{4}{3\pi},\quad \theta_1=\pi$$

A potência nos dois primeiros termos é

$$C_0^2+\frac{C_1^2}{2}=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{9\pi^2}=0{,}9907\,P_g$$

Portanto os dois primeiros termos não nulos já contêm 99% da potência, e

$$g_p(t)\approx\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi}\cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}+\pi\right)$$

b) podemos derivar a série

$$g_p(t)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos\left(\frac{4\pi nt}{T_0}+\pi\right)=\frac{2}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos\left(\frac{4\pi nt}{T_0}\right)$$

$$\frac{d\,g_p(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n}{(4n^2-1)T_0}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi nt}{T_0}\right)\quad ,$$

que, pela fórmula de Euler pode ser convertida para a série exponencial

$$\frac{d\,g_p(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n}{(4n^2-1)T_0}\frac{1}{2j}\left(e^{j4\pi nt/T_0}-e^{-j4\pi nt/T_0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{8n}{(4n^2-1)T_0}e^{-j\pi/2}e^{j4\pi nt/T_0}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

Dados os seguintes sinais,

i) desenhe o sinal;
ii) calcule sua energia;
iii) ache suas transformadas de Fourier, utilizando apenas as propriedades e as transformadas disponíveis na tabela no final das prova, sem realizar a integral de Fourier;

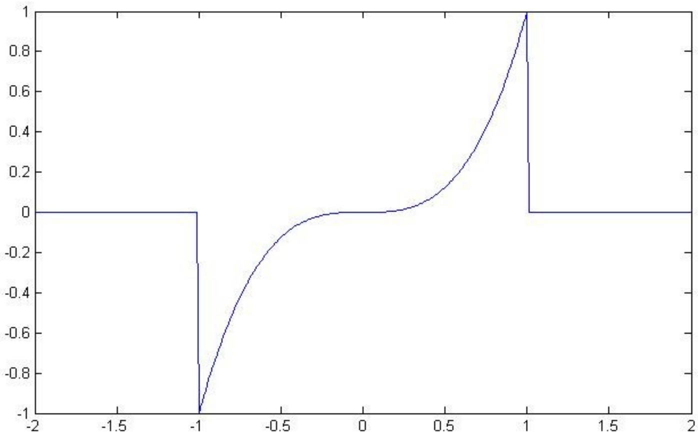
a) $g_1(t)=t^3\,\mathrm{rect}(t/2)$ (0,2 + 0,3 + 0,3 pontos)

b) $g_2(t)=e^{at}u(-t)$, $a>0$ (0,2 + 0,3 + 0,3 pontos)

c) $g_3(t)=\mathrm{rect}(t/2)*\mathrm{rect}(2t)$ (0,3 + 0,3 + 0,3 pontos)

a)

i)



ii)

$$E_{g_1}=\int_{-1}^{1}t^6\,dt=\frac{1}{7}t^7\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{7}$$

iii)

Podemos usar a propriedade da derivação. Desta forma

$$g_1'(t)=-\delta(t+1)-\delta(t-1)+3t^2\,\mathrm{rect}(t/2)$$

Fazendo $g_{aux,1}=t^2\,\mathrm{rect}(t/2)$, temos que

$$G_1'(f)=-e^{-j\pi f}-e^{j\pi f}+3G_{aux,1}(f)=-2\cos(\pi f)+3G_{aux,1}(f)$$

Agora,

$$g_{aux,1}'(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)+2t\,\mathrm{rect}(t/2)\ ,$$

e fazendo $g_{aux,2}=t\,\mathrm{rect}(t/2)$

$$G_{aux,1}'(f)=-e^{-j\pi f}+e^{j\pi f}+2G_{aux,2}(f)=2j\,\mathrm{sen}(\pi f)+2G_{aux,2}(f)$$

Finalmente,

$$g_{aux,2}'(t)=-\delta(t+1)-\delta(t-1)+\mathrm{rect}(t/2)\ ,$$

e

$$G_{aux,2}'(f)=-e^{-j\pi f}-e^{j\pi f}+2\,\mathrm{sinc}(2\pi f)=-2\cos(\pi f)+2\,\mathrm{sinc}(2\pi f)\ .$$

Sabemos que

$$G_{aux,2}'(f)=j2\pi f\,G_{aux,2}(f)\Rightarrow G_{aux,2}(f)=\frac{\mathrm{sinc}(2\pi f)-\cos(\pi f)}{j\pi f}$$

Da mesma forma

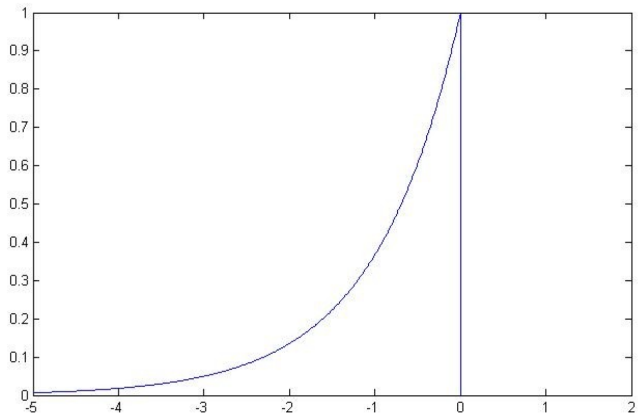
$$G_{aux,1}{}'(f)=2j\,\text{sen}(\pi f)+2\frac{\text{sinc}(2\pi f)-\cos(\pi f)}{j\pi f}=j2\pi f\,G_{aux,1}(f)$$

$$\Rightarrow G_{aux,1}(f)=\text{sinc}(\pi f)-\frac{\text{sinc}(2\pi f)-\cos(\pi f)}{\pi^2 f^2}$$

$$G_1{}'(f)=-2\cos(\pi f)+3G_{aux,1}(f)=-2\cos(\pi f)+3\,\text{sinc}(\pi f)-3\frac{\text{sinc}(2\pi f)-\cos(\pi f)}{\pi^2 f^2}$$

$$G_1(f)=\frac{G_1{}'(f)}{j2\pi f}=\frac{j\cos(\pi f)}{\pi f}-\frac{3j\,\text{sinc}(\pi f)}{2\pi f}+3j\frac{\text{sinc}(2\pi f)-\cos(\pi f)}{2\pi^3 f^3}$$

b)
i)



ii)

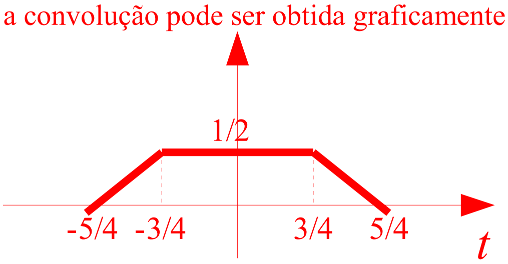
$$E_{g_2}=\int_{-\infty}^{0}e^{2at}\,dt=\frac{1}{2a}e^{2at}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2a}$$

iii)
fazendo

$$g_{aux}(t)=e^{-at}u(t)\Rightarrow g_2(t)=g_{aux}(-t)$$

$$G_{aux}(f)=\frac{1}{a+j2\pi f}\Rightarrow G_2(f)=G_{aux}(-f)=\frac{1}{a-j2\pi f}$$

c)
i)
a convolução pode ser obtida graficamente como



ii)a energia pode ser calculada somando-se a energia dos 3 trechos diferentes:
E_1 em [-5/4,-3/4], E_2 em [-3/4,3/4] e $E_3 = E_1$ em [3/4,5/4] .

Como um deslocamento não altera a energia, podemos calcular $E_1=\int_0^{1/2}t^2\,dt=\dfrac{1}{24}$.

$E_2=\dfrac{1}{4}\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{8}$. A energia total é dada por $E_{g_3}=2E_1+E_2=\dfrac{11}{24}$

iii)
fazendo

$$g_{aux,1}(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\Rightarrow G_{aux,1}(f)=2\,\mathrm{sinc}(2\pi f)$$

$$g_{aux,2}(t)=\mathrm{rect}(2t)\Rightarrow G_{aux,2}(f)=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi f}{2}\right)$$

$$g(t)=g_{aux,1}(t)*g_{aux,2}(t)\Rightarrow=G(f)=G_{aux,1}(f)G_{aux,2}(f)=\mathrm{sinc}(2\pi f)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi f}{2}\right)$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2,5 pontos)

Um pulso $g(t)=\text{sinc}(200.000\pi t)$ é enviado por um transmissor não linear sem memória, cuja resposta é aproximada por $x(t)\approx 10g(t)-g^2(t)$. Este sinal é transmitido por um canal com múltiplos percursos, tal que $y(t)=0{,}1x(t)-0{,}05x(t-\tau)$, com $\tau=10\mu s$.

a. Qual a densidade espectral de energia deste sinal na saída do canal? (1,5 ponto)
b. O sinal recebido na saída do canal é amostrado para ser processado digitalmente. Qual a taxa mínima de amostragem necessária para que não ocorra *aliasing*? (1 ponto)

a)

$$G(f)=\frac{1}{200\text{k}}\text{rect}\left(\frac{f}{200\text{k}}\right)$$

$$X(f)=10G(f)-G(f)*G(f)=\frac{1}{20\text{k}}\text{rect}\left(\frac{f}{200\text{k}}\right)-\frac{1}{200\text{k}}\Delta\left(\frac{f}{400\text{k}}\right)$$

A densidade espectral de potência de x(t) é

$$\Psi_x(f)=|X(f)|^2=\frac{1}{400\text{M}}\text{rect}\left(\frac{f}{200\text{k}}\right)-\frac{1}{4\text{G}}\text{rect}\left(\frac{f}{200\text{k}}\right)\Delta\left(\frac{f}{400\text{k}}\right)+\frac{1}{40\text{G}}\Delta^2\left(\frac{f}{400\text{k}}\right)$$

Na saída do canal

$$Y(f)=0{,}1X(f)-0{,}05X(f)e^{-j2\pi f\tau}=0{,}05X(f)\left[2-e^{-j2\pi f\tau}\right]$$

$$\Psi_y(f)=(0{,}05)^2|X(f)|^2\left|2-e^{-j2\pi f\tau}\right|^2$$

b)

pela expressão de $X(f)$ sabemos que na saída da não linearidade temos uma largura de banda de $B_X=200$ kHz.

O canal é linear e portanto não altera a banda do sinal.

Sendo assim, a taxa de amostragem de Nyquist é

$$R_a=2B_X=400\,\text{kHz}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 4

Em um experimento um sinal real é amostrado 8 vezes a uma taxa R_a = 1kHz, e os resultados de sua DFT foram anotados. Entretanto, alguns resultados foram apagados inadvertidamente, como vemos na tabela abaixo:

f **(Hz)**	***k***	G_k
0	0	$\frac{19}{8}$
125	1	$\frac{14+\sqrt{2}}{16}-\frac{5\sqrt{2}+2}{16}j$
250	2	$\frac{3}{4}-\frac{3}{8}j$
375	3	$\frac{14-\sqrt{2}}{16}+\frac{2-5\sqrt{2}}{16}j$
500	4	$\frac{5}{8}$
-375	5	$\frac{14-\sqrt{2}}{16}-\frac{2-5\sqrt{2}}{16}j$
-250	6	$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}j$
-125	7	$\frac{14+\sqrt{2}}{16}+\frac{5\sqrt{2}+2}{16}j$

a) A quais frequências correspondem as 8 amostras da DFT? (0,6 ponto)
b) Encontre os valores faltantes da DFT e justifique. (0,6 ponto)
c) Quais os valores amostrados (mostre os cálculos)? A quais instantes de amostragem eles correspondem? (0,7 ponto)
d) É realizada uma filtragem na frequência, com um filtro digital passa-baixa ideal, que deixa passar todo sinal com frequência menor ou igual a 250Hz. Quais os valores das amostras após a filtragem? Justifique. (0,6 ponto)

a)
a resolução de frequência (espaçamento entre as amostras da transformada de Fourier na frequência) é

$f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{NT_a}=\frac{R_a}{N}=\frac{1\,\mathrm{kHz}}{8}=125\,\mathrm{Hz}$. Ou seja o elemento G_k da DFT corresponde aproximadamente à transformada de Fourier na frequência kf_0 .
Devemos levar em conta também que $G_5=G_{-3}$, $G_6=G_{-2}$, $G_7=G_{-1}$. As frequências foram acrescentadas na tabela.

b)
sabemos que

$$G_k=G_{-k}^*=G_{N-k}^*\Rightarrow G_1=G_7^*,\ G_2=G_6^*, G_5=G_3^*$$

Os valores foram preenchidos na tabela.

c)

$$g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} G_k e^{j2\pi kn/8}$$

Para facilitar, podemos observar que, para um sinal real

$$G_{N-k} e^{j2\pi(N-k)n/N} = G_{N-k} e^{-j2\pi kn/N} = \left[G_k e^{j2\pi kn/N}\right]^*$$

$$\Rightarrow G_k e^{j2\pi kn/N} + G_{N-k} e^{j2\pi(N-k)n/N} = 2\Re\left\{G_k e^{j2\pi kn/N}\right\}$$

$$g_0 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[G_1 + G_2 + G_3\right] + G_4\right\} = 1$$

$$g_1 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 + jG_2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_3\right] - G_4\right\} = \frac{1}{2}$$

$$g_2 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[jG_1 - G_2 - jG_3\right] + G_4\right\} = \frac{1}{4}$$

$$g_3 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 - jG_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_3\right] - G_4\right\} = \frac{1}{4}$$

$$g_4 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[-G_1 + G_2 - G_3\right] + G_4\right\} = \frac{1}{8}$$

$$g_5 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 + jG_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_3\right] - G_4\right\} = \frac{1}{8}$$

$$g_6 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[-jG_1 - G_2 + jG_3\right] + G_4\right\} = \frac{1}{8}$$

$$g_7 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\Re\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 - jG_2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_3\right] - G_4\right\} = 0$$

e as amostras

$$g(0) = \frac{g_0}{T_a} = 1000$$

$$g(0{,}001) = \frac{g_1}{T_a} = 500$$

$$g(0{,}002) = \frac{g_2}{T_a} = 250$$

$$g(0{,}003) = \frac{g_3}{T_a} = 250$$

$$g(0{,}004) = \frac{g_4}{T_a} = 125$$

$$g(0{,}005) = \frac{g_5}{T_a} = 125$$

$$g(0{,}006) = \frac{g_6}{T_a} = 125$$

$$g(0{,}007) = \frac{g_7}{T_a} = 0$$

d)
após a filtragem na frequência temos

$$Y_k = G_k H_k \quad .$$

Sabendo que os componentes de frequência foram zerados, temos que

$$Y_0 = G_{0,} \quad Y_1 = G_{1,} \quad Y_2 = G_{2,} \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0, \quad Y_5 = 0, \quad Y_6 = G_{6,} \quad Y_7 = G_7$$

Portanto

$$y_0 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[G_1 + G_2\right]\right\} = \frac{45+\sqrt{2}}{64} = 0{,}7252$$

$$g_1 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 + j\,G_2\right]\right\} = \frac{31+8\sqrt{2}}{64} = 0{,}6612$$

$$g_2 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[j\,G_1 - G_2\right]\right\} = \frac{9+5\sqrt{2}}{64} = 0{,}2511$$

$$g_3 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 - j\,G_2\right]\right\} = 0{,}1330$$

$$g_4 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[-G_1 + G_2\right]\right\} = 0{,}2435$$

$$g_5 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 + j\,G_2\right]\right\} = 0{,}1201$$

$$g_6 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[-j\,G_1 - G_2\right]\right\} = -0{,}0324$$

$$g_7 = \frac{1}{8}\left\{G_0 + 2\,\Re\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)G_1 - j\,G_2\right]\right\} = 0{,}2732$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais:

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$
$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$
$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$
$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$
$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$
$$\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4+x^4} dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < 1/2 \\ 1/2 & , |t| = 1/2 \\ 0 & , |t| > 1/2 \end{cases}$$
$$\Delta(t) = \mathrm{rect}(t)\left(1 - 2|t|\right)$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$

$$c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t)\,x_n^*\,dt$$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(2\pi n f_0 t + \theta_n\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\,dt\,; \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,; \quad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)$$

$$C_0 = a_0\,; \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\,e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n}\,; \quad D_{-n} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n}$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\text{sgn } t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\tau|\text{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\text{sinc}(2\pi B t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|}\text{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k=\sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi k n/N} \qquad g_n=T_a g(nT_a)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi k n/N}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica