Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2011/2 (01/11/2011)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sinal $g(t)$ tem função de autocorrelação dada por $R_g(\tau)=\dfrac{1}{1+4\pi^2\tau^2}$.

a) Qual a potência deste sinal? (0,5 ponto)

b) Este sinal é recebido adicionado de ruído branco Gaussiano, cuja densidade espectral de potência é $\dfrac{N_0}{2}=10^{-1}\,W/Hz$.

É aplicado na recepção um filtro passa-baixa ideal a fim de se filtrar o ruído. Qual a frequência de corte f_{LP} deste filtro de modo que a potência de distorção na saída seja minimizada? (A distorção é causada pelo corte dos componentes de frequência do sinal acima de f_{LP} e pelo ruído filtrado) (2 pontos)

a)

$$P_g=E\{x^2(t)\}=R_g(0)=1$$

b)

A DEP é

$$S_g(f)=F\{R_g(\tau)\}=\frac{1}{2}e^{-|f|}$$

a potência do sinal que foi cortada pelo filtro é

$$P_D=2\int_{f_{LP}}^{\infty}S_g(f)\,df=\int_{f_{LP}}^{\infty}e^{-f}\,df=-e^{-f}\Big|_{f_{LP}}^{\infty}=e^{-f_{LP}}$$

a potência do ruído é

$$P_N=N_0B=2\times10^{-1}f_{LP}$$

a potência de distorção total é

$$P_T=P_N+P_D=0{,}2\,f_{LP}+e^{-f_{LP}}$$

para minimizarmos a distorção queremos

$$\frac{dP_T}{df_{LP}}=0{,}2-e^{-f_{LP}}=0\Rightarrow f_{LP}=-\ln 0{,}2=1{,}602$$

Teoria das Comunicações

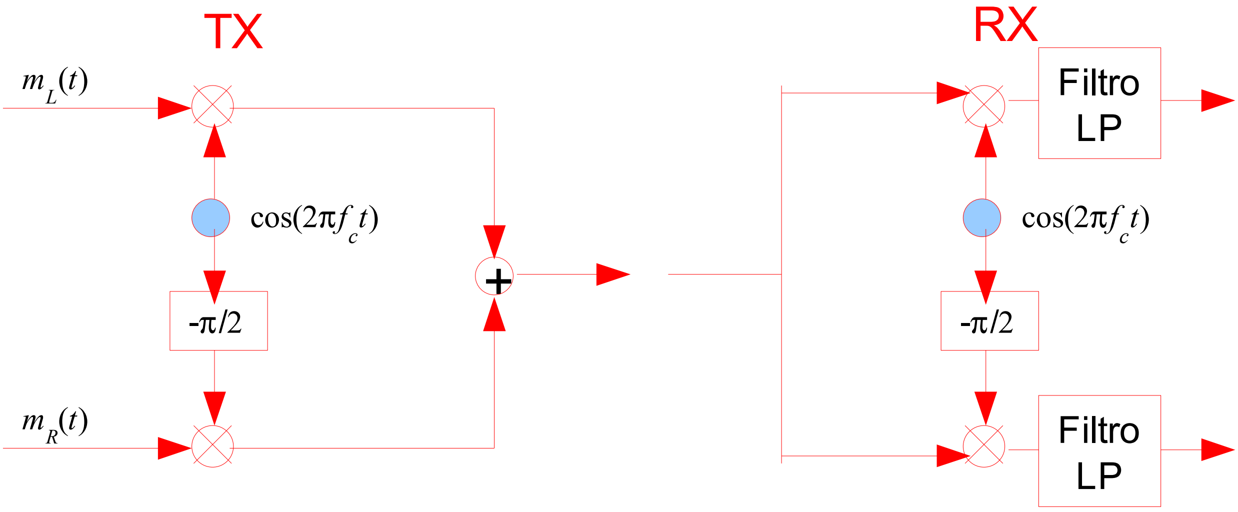
Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

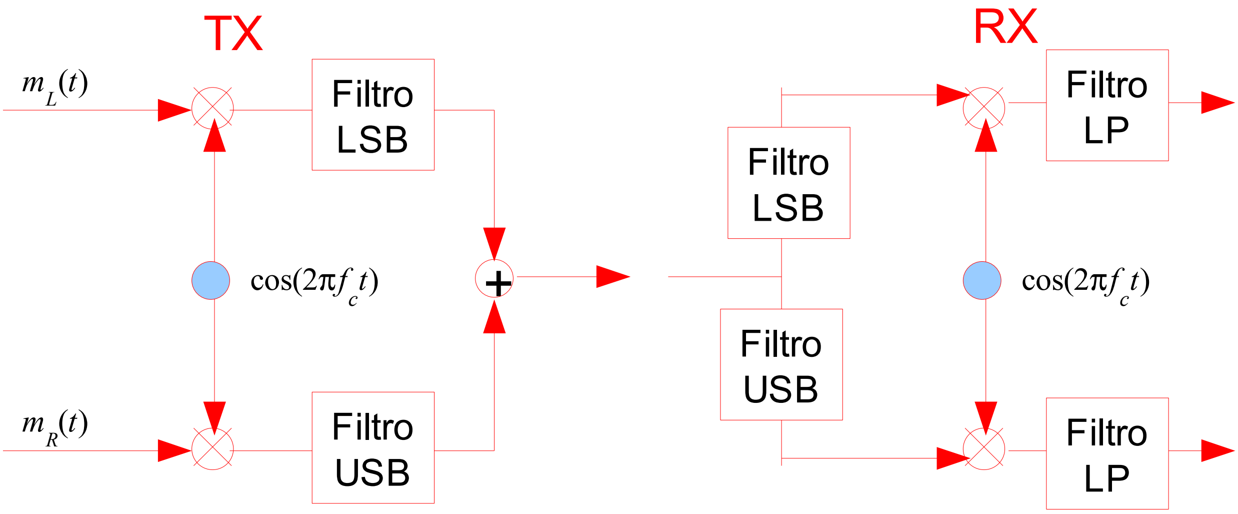
Um engenheiro de telecomunicações pretende desenvolver um sistema estereofônico utilizando modulação em amplitude. Para isto, ele investigou duas possibilidades:
a) Um sistema QAM
b) Um sistema USB + LSB, em que o canal esquerdo ocupa a LSB e o canal direito a banda USB

i) desenhe o sistema para as duas possibilidades, incluindo o transmissor e o receptor (0,6 ponto)
ii) Seja o sinal do canal esquerdo $m_L(t)$ e o do canal direito $m_R(t)$, ambos com potência igual a P_m. Escreva a expressão para o sinal modulado nos dois casos. Normalize, de modo que ambos os sinais modulados tenham a mesma potência igual a $P_S = 2P_m$.(0,7 ponto)
iii) Supondo $m_L(t)=\cos(2\pi f_1 t)$ e $m_R(t)=\cos(2\pi f_2 t)$, $f_2 > f_1$, qual a largura de banda do sinal modulado nos dois casos? (0,5 ponto)
iv) Nos dois casos precisamos de um receptor coerente. Supondo os sinais do item (iii), o que acontece com o sinal modulado em cada um dos sistemas se tivermos um desvio de fase de π/4 no receptor? (basta mostrar o canal esquerdo) (0,7 ponto)

i)
a)



b)



ii)

a)

$$\varphi_{QAM}(t)=A\,m_L(t)\cos(2\pi f_c t)+A\,m_R(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$, cuja potência é

$$P_{QAM}=2\left(\frac{A^2}{2}P_m\right)=A^2 P_m=2P_m\Rightarrow A=\sqrt{2}$$.

Portanto

$$\varphi_{QAM}(t)=\sqrt{2}\,m_L(t)\cos(2\pi f_c t)+\sqrt{2}\,m_R(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

b)

$$\varphi_{SSB}(t)=A'\,m_L(t)\cos(2\pi f_c t)+A'\,m_{L,H}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)+\\ A'\,m_R(t)\cos(2\pi f_c t)-A'\,m_{R,H}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

A transformada de Hilbert não altera a potência, portanto:

$$P_{SSB}=4\left(A\frac{'^2}{2}P_m\right)=2A'^2P_m=2P_m\Rightarrow A=1$$

$$\varphi_{SSB}(t)=m_L(t)\cos(2\pi f_c t)+m_{L,H}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)+\\ m_R(t)\cos(2\pi f_c t)-m_R(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

iii)

a)

no QAM, cada componente de sinal, vai aparecer, com fases diferentes, nas duas bandas laterais. Sendo assim, tendo em vista que o componente do sinal $B_{QAM}=2f_2$

b)

no LSB+USB, o canal esquerdo modulado vai resultar em um componente de frequência em f_c-f_1 e o direito em f_c+f_2 . Portanto a largura de banda é de $B_{SSB}=f_1+f_2$

iv)

a)

o receptor consiste em uma multiplicação coerente pela portadora seguida de uma filtragem passa-baixa

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=[\varphi_{QAM}(t)\cos(2\pi f_c t+\pi/4)]*h_{LP}(t)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}m_L(t)\cos(\pi/4)-\frac{1}{\sqrt{2}}m_R(t)\,\mathrm{sen}(\pi/4)\\&=\frac{1}{2}m_L(t)-\frac{1}{2}m_R(t)=\frac{1}{2}\cos(2\pi f_1 t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_2 t)\end{aligned}$$

b)

o receptor deve inicialmente filtrar e eliminar o componente USB, e depois proceder como acima. Ou seja

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=[\varphi_{LSB}(t)\cos(2\pi f_c t+\pi/4)]*h_{LP}(t)\\&=\left\{\left[m_L(t)\cos(2\pi f_c t)+m_{L,H}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\right]\cos(2\pi f_c t+\pi/4)\right\}*h_{LP}(t)\\&=m_L(t)\cos(\pi/4)-m_{L,H}\,\mathrm{sen}(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}m_L(t)-\frac{\sqrt{2}}{2}m_{L,H}(t)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\pi f_1 t)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(2\pi f_1 t)=\cos(2\pi f_1 t+\pi/4)\end{aligned}$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Um sinal $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t)$, com $C_n=\frac{1}{2^n}$ e $f_0=3\,\text{kHz}$ é modulado em um transmissor com modulação angular, com largura de banda modulada $B_\varphi=200\,\text{kHz}$.

i) Se este for um modulador FM, determine o coeficiente de modulação k_f em Hz/V. (0,6 ponto)

ii) Se for um modulador PM, determine o coeficiente de modulação k_p em rad/V. (0,7 ponto)

Considere a banda de $g(t)$ B que contém 99% da potência do sinal, e utilize as séries $\sum_0^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r}$, $\sum_0^{\infty} n r^n=\frac{r}{(1-r)^2}$ $|r|<1$.

iii) Desejamos gerar o sinal **PM** do item (ii) em uma portadora de 110MHz. Para isso utilizamos um transmissor de Armstrong, com 2 multiplicadores de frequência de 48x, e um gerador FM banda estreita modulado em 100kHz. Desenhe o diagrama do transmissor, incluindo o gerador do sinal FM banda estreita. Em cada etapa indique qual a frequência da portadora e o desvio de frequência. (1,2 ponto)

i) Para um sinal FM $B_{FM}\approx 2(k_f g_p+B)\Rightarrow k_f=\frac{\frac{B_{FM}}{2}-B}{g_p}=\frac{100\text{k}-B}{g_p}$

a amplitude de pico pode ser achada supondo que todos os cossenos da série são iguais a um, ou seja

$$g_p=\max(g(t))=\sum_{n=1}^{\infty} C_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1-1/2}-1=1$$

A potência total pode ser achada como

$$P_g=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/4}-1\right)=\frac{1}{6}$$

A potência no primeiro termo é

$$P_1=\frac{C_1^2}{2}=\frac{1}{8}=0{,}75\,P_g$$

no segundo termo

$$P_2=P_1+\frac{C_2^2}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{5}{32}=0{,}9375\,P_g$$

no terceiro termo

$$P_3=P_2+\frac{C_3^2}{2}=\frac{5}{32}+\frac{1}{128}=\frac{21}{128}=0{,}9844\,P_g$$

no quarto termo

$$P_4=P_3+\frac{C_4^2}{2}=\frac{21}{128}+\frac{1}{512}=\frac{85}{512}=0{,}9961\,P_g$$

Portanto a banda $B=4f_0=12\,\text{kHz}$, e

$$k_f=\frac{100\text{k}-B}{g_p}=100\text{k}-12\text{k}=88\text{ kHz/V}$$

ii)Para um sinal PM $B_{FM} \approx 2\left(\frac{k_p}{2\pi}\dot{g}_p + B\right) \Rightarrow k_p = \frac{\frac{B_{PM}}{2} - B}{\frac{\dot{g}_p}{2\pi}} = \frac{2\pi(100\text{k} - 12\text{k})}{\dot{g}_p}$

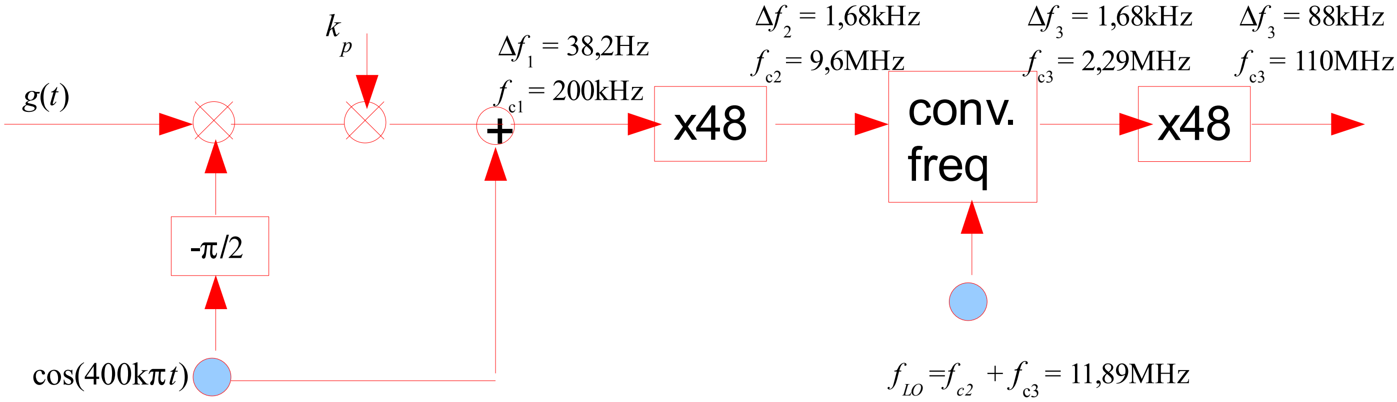
$$\frac{dg(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} -2\pi n f_0 C_n \text{sen}(2\pi n f_0 t) \quad \text{e}$$

$$\dot{g}_p = \max\left(\frac{dg(t)}{dt}\right) = 2\pi f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2\pi f_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2\pi f_0 \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 4\pi f_0$$

Portanto

$$k_p = \frac{2\pi(100\text{k} - 12\text{k})}{4\pi(3\text{k})} = \frac{44}{3}$$

iii) temos dois multiplicadores M=N=48, e o desvio de frequência na saída é 88kHz. Portanto o desvio de frequência no gerador FM banda estreita é $\Delta f_1 = \Delta f / M / N = 38{,}2\ Hz$



Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sinal de vídeo, com largura de banda de 4 MHz é transmitido via VSB. Para isso é utilizado um filtro que deixa passar idealmente (com resposta na frequência unitária) toda a banda lateral inferior e 1 MHz da banda lateral superior. Entre 1 MHz e 1,5MHz da banda lateral superior o filtro tem uma resposta na frequência que decai linearmente, de modo que acima de 1,5 MHz a resposta na frequência é nula. Um sinal de áudio é enviado em FM com portadora em 1,7MHz acima da portadora do sinal de vídeo, e largura de banda igual a 200kHz.

Um receptor super-heteródino é utilizado para sintonizar estações de TV VSB, com largura de banda de 6MHz. É utilizado um filtro. Sabemos que para uma emissora de TV utilizando o canal VHF com f_c = 210 MHz é utilizado um oscilador local com frequência f_{LO} = 230MHz.

i) Qual a frequência intermediária utilizada? (0,5 ponto)
ii) Qual a frequência do sinal imagem? (0,5 ponto)
iii) Qual seria a frequência do oscilador local e a frequência do sinal imagem para uma emissora em 198 MHz? (0,5 ponto)
iv) Esboce o sinal de vídeo + audio após a conversão para a frequência intermediária. Qual a frequência do sinal de áudio após a conversão para a frequência intermediária? (0,5 ponto)
v) Desenhe o filtro de recepção necessário para compensarmos o filtro VSB. (0,5 ponto)

i)

$$f_{LO} = f_c + f_I \Rightarrow f_I = |f_{LO} - f_c| = 20\,\text{MHz}$$

ii)

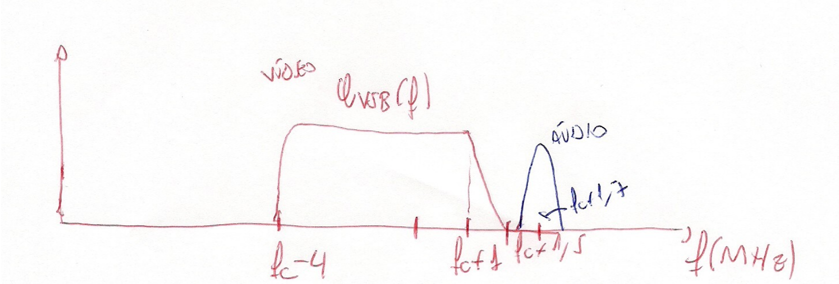
$$f_{\text{im}} = f_c + 2f_I = 250\,\text{MHz}$$

iii)

$$f_{LO} = f_c' + f_I = 198\text{M} + 20\text{M} = 218\,\text{MHz}$$

iv)

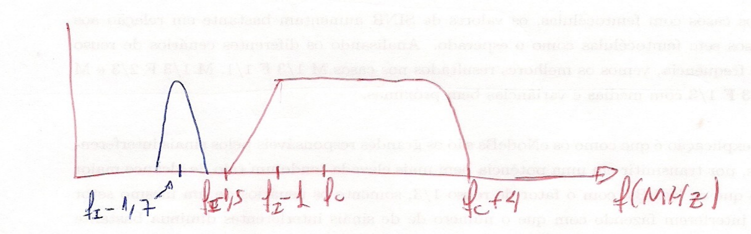
O sinal de áudio+vídeo modulado pode ser esboçado como



Um sinal de frequência $f_c + \Delta f$ ao ser multiplicado pelo sinal do oscilador local com frequência $f_c + f_i$ e filtrado com um filtra passa-faixa em f_I resulta em

$$\cos(2\pi(f_c + \Delta f)t)\cos(2\pi(f_c + f_I)t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi(f_I - \Delta f)t)$$

ou seja, ocorre uma inversão do espectro, e o LSB vira USB e vice-versa. Consequentemente, o espectro na frequência intermediária pode ser esboçado como

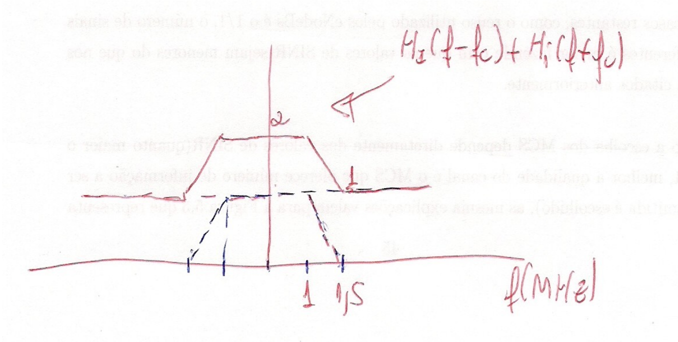


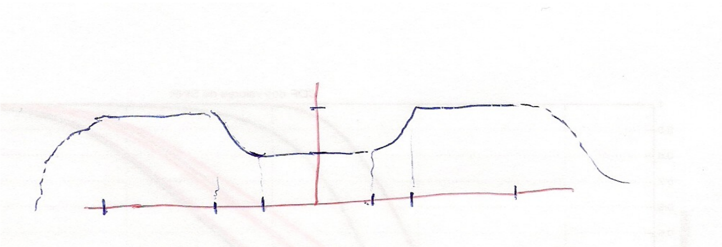
UnB

departamento de engenharia elétrica

v)

sabemos que $H_o(f)=\dfrac{1}{H_i(f-f_c)+H_i(f+f_c)}$. Portanto





Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Tabela de Transformadas de Hilbert:

$$g(t) \overset{H}{\Rightarrow} g_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{t-\alpha}\, d\alpha$$
$$g_h(t) \overset{H}{\Rightarrow} -g(t)$$
$$\sin t \overset{H}{\Rightarrow} -\cos t$$
$$\cos t \overset{H}{\Rightarrow} \sin t$$
$$\frac{1}{t^2+1} \overset{H}{\Rightarrow} \frac{t}{t^2+1}$$
$$\operatorname{sinc} t \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1-\cos t}{t}$$
$$\delta(t) \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1}{\pi t}$$
$$\operatorname{rect} t \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}\right|$$

Regra de Carson

$$B \approx 2(\Delta f + B)$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn} t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\tau|\operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|}\operatorname{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica