Princípios de Comunicação

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 – 2011/2 (01/12/2011)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicação

Prof. André Noll Barreto

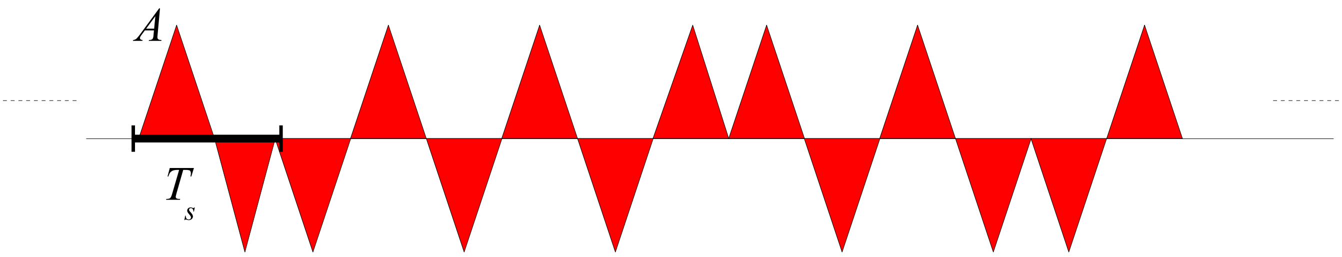
Questão 1 (2,5 pontos)

Dados os seguintes sinais recebidos, encontre

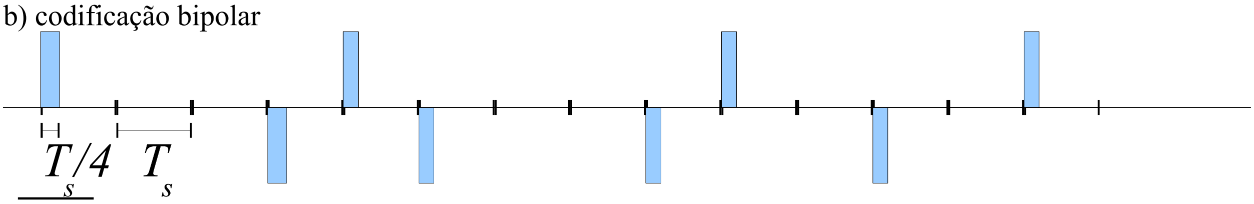
1. os bits transmitidos (se algum erro for identificado, mostre onde ele pode ter ocorrido, e ache os bits até a posição do possível erro)
2. a potência do sinal
3. a densidade espectral de potência
4. a largura de banda essencial (considere a frequência do primeiro zero)

a)

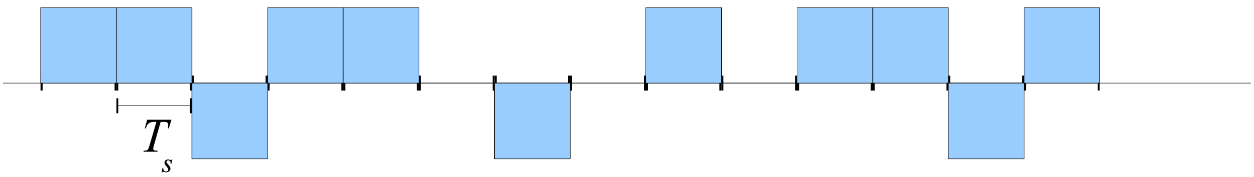
codificação polar com pulsos de Manchester



b) codificação bipolar



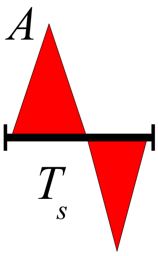
c) uma codificação em que, para facilitarmos a recuperação de sincronismo, a cada bit ímpar é utilizada codificação polar, e cada bit par é utilizada codificação on-off.



Resposta:

a)

i) Um pulso de Manchester é tal que $P(f)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} p(t)=0$, como por exemplo o pulso abaixo



Sendo assim, com codificação polar, a sequência transmitida é
1000110

ii)a potência do sinal polar é dada por

$$P=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t)\,dt$$

Devido à simetria do sinal, podemos considerar apenas

$$P=\frac{4}{T_s}\int_0^{T_s/4}\left(t\frac{4A}{T_s}\right)^2 dt=\frac{64A^2}{T_s^3}\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\frac{T_s}{4}}=\frac{A^2}{3}$$

iii)

considerando

$$p(t)=\Delta\left(\frac{t+T_s/4}{T_s/2}\right)-\Delta\left(\frac{t-T_s/4}{T_s/2}\right)$$

temos que

$$P(f)=\frac{T_s}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_s}{4}\right)\left(e^{j\pi f T_s/2}-e^{-j\pi f T_s/2}\right)=\frac{jT_s}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_s}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\pi f\frac{T_s}{2}\right)$$

$$S_y(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_s}=\frac{T_s}{4}\operatorname{sinc}^4\left(\frac{\pi f T_s}{4}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)$$

iv) o primeiro zero do espectro ocorre em $B_T=\frac{2}{T_s}$

b)

i) 10011100E... (Percebe-se um erro no nono bit enviado, já que ocorrem dois pulsos consecutivos com mesma polaridade)

ii)

a potência do pulso, considerando uma amplitude A é

$$P_p=A^2\frac{T_s}{4}\frac{1}{T_s}=\frac{A^2}{4}$$

Como em uma codificação bipolar as amplitudes 0 e ± 1 são transmitidas com igual probabilidade

$$P_T=\frac{P_p}{2}=\frac{A^2}{8}$$

iii) $p(t)=\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_s/4}\right)\Rightarrow P(f)=\frac{T_s}{4}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f T_s}{4}\right)$

$$S_{y,\text{bipolar}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_s}\sin^2(\pi f T_s)=\frac{T_s}{16}\sin^2(\pi f T_s)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_s}{4}\right)$$

iii)com o resultado do item anterior, temos que

$$B_T \approx \frac{1}{T_s}$$

c)
i)tanto na polar como na on-off um bit 1 é representado por um pulso com amplitude A. Já um bit 0 é repressentado ou por 0 ou por -1. Consequentemente a sequência é
11011000101101
ii)

$$P_p = \frac{A^2 T_s}{T_s} = A^2$$

o sinal é polar na metade do tempo e on-off na outra metade. Portanto

$$P_T = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \frac{A^2}{2} = \frac{3}{4} A^2$$

iii)

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right) \Rightarrow P(f) = T_s \mathrm{sinc}(\pi f T_s)$$

Basta observar que o sinal consiste na soma de um sinal on-off e um sinal polar independentes, ambos com período $2T_s$ e um pulso de largura T_s

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right) \Rightarrow P(f) = T_s \mathrm{sinc}(\pi f T_s) \quad .$$

sendo assim, a densidade espectral de potência será a soma das duas densidades espectrais, para um intervalo $2T_s$.

$$S_y(f) = S_{y,\,\mathrm{polar}} + S_{y,\,\text{on-off}} = \frac{|P(f)|^2}{8T_s}\left[5 + \frac{1}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{2T_s}\right)\right]$$
$$= \frac{T_s}{8} \mathrm{sinc}^2(\pi f T_s)\left[5 + \frac{1}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{2T_s}\right)\right]$$

O mesmo poderia ser encontrado calculando os valores R_n.

$$R_0 = E\{a_k^2\} = \frac{3}{4}(\pm 1)^2 + \frac{1}{4}(0)^2 = \frac{3}{4}$$

Consideramos que metade dos valores de n correspondem a uma codificação polar e a outra metade a uma codificação on-off, temos que para valores de n pares a_k e a_{k+n} tratam do mesmo esquema de codificação, e para valores ímpares de esquemas diferentes.
Portanto, para n pares

$$E\{a_{2m}^2\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left((-1)(-1)+(-1)(1)+(1)(-1)+(1)(1)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left((0)(0)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(1)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}$$

e para n ímpares

$$E\{a_{2m}^2\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left((-1)(0)+(-1)(1)+(1)(0)+(1)(1)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left((0)(-1)+(0)(1)+(1)(-1)+(1)(1)\right)\right)$$
$$= 0$$

.

iv) $B_T \approx \dfrac{1}{T_S}$

Questão 2 (3 pontos)

Um canal tem uma banda de 20 MHz para transmissão, que é utilizado para transmissão digital de vídeo não comprimido. São empregados pulsos que satisfazem o critério de Nyquist, com fator de roll-off r = 0,25. Sabemos que o sinal de vídeo ocupa uma banda de 4MHz, e que a amplitude do sinal de vídeo tem distribuição uniforme. A amostragem é feita a uma taxa 35% maior que a taxa de Nyquist.

a) o sinal é digitalizado com PCM usando quantização uniforme, e utilizamos codificação de linha polar binária. Qual a razão sinal-ruído de quantização em dB?

b) é utilizada agora codificação M-PAM com M níveis e precisamos que a razão sinal-ruído de quantização seja maior que 30dB. Qual o valor de M necessário?

c) com o mesmo esquema de codificação de linha do item (a), é feita agora a digitalização com DPCM. A codificação é feita de modo que não haja erro de sobrecarga nas frequências menores que 1,5 MHz para amplitudes iguais a $m_p/2$, considerando que o preditor é $\hat{m}_k = m_{k-1}$ (considere uma senoide de amplitude m_p nesta frequência). Qual a razão sinal-ruído de quantização neste caso? (considere que a potência do ruído de quantização é proporcional a $(\Delta v)^2$, em que Δv é o intervalo de quantização)

a)

$$R_b = R_s = \frac{2B_T}{1+r} = \frac{20\times 10^6}{1{,}25} = 32\,\text{Mbps}$$

$$f_a = 1{,}35(2B) = 1{,}35(8\times 10^6) = 10{,}8\,\text{MHz}$$

o número de bits por amostra é portanto

$$n = \frac{R_b}{f_a} = 2{,}963 \approx 3$$

e

$$L = 2^n = 8$$

A razão sinal-ruído de quantização é dada por

$$RSR_q = 3L^2 \frac{P_m}{m_p^2}$$

Para um sinal com distribuição uniforme

$$P_m = E\{m^2\} = \int_{-m_p}^{m_p} \frac{m}{2m_p}\, dm = \frac{m_p^2}{3}$$

Portanto,

$$RSR_q = L^2 = 64 = 18\,\text{dB}$$

b)

queremos agora

$$RSR_q = L^2 \geq 1000 \Rightarrow L \geq 31{,}6 \Rightarrow n = \lceil \log_2 L \rceil = 5$$

$$R_b = \log_2 M\; R_s \geq f_a n = 54\,\text{MHz} \Rightarrow \log_2 M \geq \frac{54\times 10^6}{32\times 10^6} \Rightarrow M \geq 4$$

c)

chamando a variação máxima do DPCM de d_p, e considerando um sinal de frequência 1,5MHz com amplitude $m_p/2$, temos que

$$m(t)=\frac{m_p}{2}\operatorname{sen}(2\pi f t)\Rightarrow\frac{d\,m(t)}{dt}=\pi f m_p\cos(2\pi f t)\Rightarrow m_p{}'=\pi f m_p$$

Considerando que é calculada a diferença entre uma amostra e a mostra anterior

$$d[k]=m[k]-m[k-1]\Rightarrow d[k]\leq m_p{}'T_a=\frac{\pi(1{,}5\times10^6)m_p}{10{,}8\times10^6}=0{,}4363\,m_p=d_p$$

Agora, a razão sinal ruído de quantização com PCM é

$$RSR_{q,PCM}=\frac{P_S}{P_N}=\frac{P_s}{(\Delta v_{PCM})^2}=\frac{P_s}{(2m_p/L)^2}=\frac{C}{m_p^2}$$, em que C é uma constante.

Com o DPCM, temos

$$RSR_{q,DPCM}=\frac{P_S}{P_N}=\frac{P_s}{(\Delta v_{DPCM})^2}=\frac{P_s}{(2d_p/L)^2}=\frac{C}{d_p^2}$$

Portanto

$$RSR_{q,DPCM}=RSR_{q,PCM}\frac{m_p^2}{d_p^2}=64(5{,}25)=336=25{,}3\text{ dB}$$

Questão 3 (2 pontos)

Um equalizador *zero-forcing* de 3 taps é projetado para eliminar a interferência intersimbólica causada por um pulso $p(t)$ que não satisfaz o critério de Nyquist. Sabemos que o pulso é simétrico em torno de zero, e que o equalizador emprega os ganhos $C_{-1}=-1/4$, $C_1=1/4$ e $C_0=2$. Qual a amplitude do pulso recebido nos instantes $t=\pm 2T_s, t=\pm T_s$ e $t=0$?

a)
Queremos que

$$p_{o,-1}=C_{-1}p_0+C_0 p_{-1}+C_1 p_{-2}=0$$
$$p_{o,0}=C_{-1}p_1+C_0 p_0+C_1 p_{-1}=1$$
$$p_{o,-1}=C_{-1}p_2+C_0 p_1+C_1 p_0=0$$

Dados os valores de coeficientes utilizados, e sabendo que o pulso é simétrico

$$-\frac{1}{4}p_0+2p_1+\frac{1}{4}p_2=0$$
$$-\frac{1}{4}p_1+2p_0+\frac{1}{4}p_1=1$$
$$-\frac{1}{4}p_2+2p_1+\frac{1}{4}p_0=0$$

Da segunda equação obtemos

$$p_0=\frac{1}{2} \quad ,$$

e substituindo nas outras equações

$$2p_1+\frac{1}{4}p_2=\frac{1}{8}$$
$$2p_1-\frac{1}{4}p_2=-\frac{1}{8}$$

Somando as duas temos

$$p_1=p_{-1}=0$$

e substituindo

$$p_2=p_{-2}=\frac{1}{2}$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão apresenta uma razão sinal-ruído de 6dB. Calcule a probabilidade de erro de bit para os seguintes casos:
a) pulsos retangulares com largura T_S e codificação polar binária;
b) pulsos retangulares com largura T_S e 8-PAM;
c) pulsos triangulares com largura T_S e codificação on-off.

a)

$$RSR = \frac{P_s}{P_N} = \frac{P_s}{\sigma^2} = 4 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{P_s}{4}$$

Para pulsos de amplitude A e codificação polar

$$P_s = A^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{A^2}{4}$$

A distância entre os dois pulsos é $d = 2A$ e portanto

$$p_b = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q(2) = 0{,}02275$$

b)
podemos considerar os pulsos com amplitudes
-A,A,-3A,3A,-5A,5A,-7A,7A
e a potência média será portanto

$$P_s = \frac{1}{4}\left(A^2 + (3A)^2 + (5A)^2 + (7A)^2\right) = 21A^2$$

a distância também é $2A$ e

$$\sigma^2 = \frac{21A^2}{4}$$

A probabilidade de erro de símbolo é

$$p_e = \frac{2}{8} Q\left(\frac{2A}{A\sqrt{21}}\right) + \frac{6}{8} 2Q\left(\frac{2A}{A\sqrt{21}}\right) = \frac{7}{4} Q(0{,}4364) \approx 0{,}5797$$

e, considerando apenas um bit errado a cada símbolo

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2 M} p_e = 0{,}1932$$

c)
Como calculado na questão 1, para pulsos triangulares

$$P_p = \frac{A^2}{3}$$

e

$$P_{on-off} = \frac{1}{2} P_p = \frac{A^2}{6} \quad .$$

A distância agora é A e

$$\sigma^2 = \frac{P_{on-off}}{4} = \frac{A^2}{24} \quad \text{, portanto}$$

$$p_b = p_e = Q\left(\frac{A}{2} \frac{1}{A/\sqrt{24}}\right) = Q(2{,}45) = 0{,}0072$$

Princípios de Comunicação

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn} t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\tau|\operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|}\operatorname{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Razão sinal-ruído com quantização

$$RSR_{\text{uniforme}}=3L^2\frac{P_m}{m_p^2}$$

$$RSR_{\text{lei-A}}=3L^2\frac{1}{(\ln(A))^2}$$

$$RSR_{\text{delta}}=\frac{3f_sP_m}{\sigma^2 B}=\frac{150}{\pi^2}\left(\frac{f_s}{2B}\right)^3\frac{P_m}{m_p^2} \quad \text{(para voz)}$$

Princípios de Comunicação

Prof. André Noll Barreto

Densidade Espectral de Potência de Códigos de Linha

$$S_y(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_b}=\frac{|P(f)|^2}{T_b}\left(R_0+2\sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos 2\pi n f T_b\right)$$

$$S_{y,\,\text{polar}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_b}$$

$$S_{y,\,\text{on-off}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{4T_b}\left[1+\frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_b}\right)\right]$$

$$S_{y,\,\text{bipolar}}(f)=\frac{|P(f)|^2}{T_b}\sin^2(\pi f T_b)$$

Probabilidade de erro de detecção

$P(\epsilon)=Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$, em que d é a distância entre os dois pulsos e σ^2 a variância (potência) do ruído

Função Q

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0.0	0.50000	2.0	0.02275
0.1	0.46017	2.1	0.01786
0.2	0.42074	2.2	0.01390
0.3	0.38209	2.3	0.01072
0.4	0.34458	2.4	0.00820
0.5	0.30854	2.5	0.00621
0.6	0.27425	2.6	0.00466
0.7	0.24196	2.7	0.00347
0.8	0.21186	2.8	0.00256
0.9	0.18406	2.9	0.00187
1.0	0.15866	3.0	0.00135
1.1	0.13567	3.1	0.00097
1.2	0.11507	3.2	0.00069
1.3	0.09680	3.3	0.00048
1.4	0.08076	3.4	0.00034
1.5	0.06681	3.5	0.00023
1.6	0.05480	3.6	0.00016
1.7	0.04457	3.7	0.00011
1.8	0.03593	3.8	0.00007
1.9	0.02872	3.9	0.00005

Equalização

$$p_{o,k}=p_o(kT_s)=\sum_{n=-N}^{N} C_n p((k-n)Ts)=\sum_{n=-N}^{N} C_n p_{k-n}$$