Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Prova 1 – 2014/1 (17/04/2014)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de duas questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias são fornecidas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas adicionais serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues, devem conter o nome e matrícula do aluno.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (5 pontos)

Um sinal $x(t)$ é transmitido através de um canal de propagação modelado como um sistema linear de resposta ao impulso $h(t)$, resultando no sinal $y(t)$ na saída deste canal. A função de auto-correlação de $x(t)$ é dada por $R_x(\tau) = \frac{W}{2\pi}\text{sinc}^2\left(\frac{W}{2}\tau\right)$, e a relação entrada/saída deste sistema é dada por $\frac{1}{k}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$. Responda os itens a seguir:

(a) Qual a resposta ao impulso $h(t)$ deste sistema? 1,25 pt

$$TF\left\{\frac{1}{k}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)\right\};\ \frac{1}{k}j\omega Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega);$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega/k} = k\frac{1}{k + j\omega}$$

$$\boxed{h(t) = TF^{-1}\{H(\omega)\} = ke^{-kt}u(t)}$$

(b) Encontre a função densidade espectral de potência de $y(t)$, e esboce seu gráfico. 1,25 pt

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega);\ \Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2\Psi_x(\omega)$$

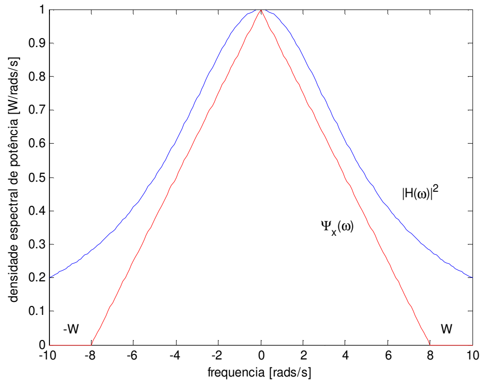
$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 TF\{R_x(\tau)\}$$

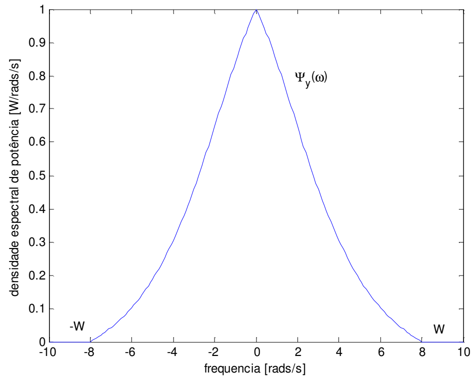
$$|H(\omega)|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2};\ TF\{R_x(\tau)\} = TF\left\{\frac{W}{2\pi}\text{sinc}^2\left(\frac{W}{2}\tau\right)\right\}$$

Sabendo $\Delta(t/k) \Leftrightarrow \frac{k}{2}\text{sinc}^2\left(\omega\frac{k}{4}\right)$, e usando operação $G(t) \Leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$;

$$\frac{k/2}{2\pi}\text{sinc}^2\left(t\frac{k/2}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2k/2}\right)$$, e fazendo $W = k/2$, $TF\{R_x(\tau)\} = \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$;

$$\boxed{\Psi_y(\omega) = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2}\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)} \text{ ou } \boxed{\Psi_y(f) = \frac{k^2}{k^2 + (2\pi f)^2}\Delta\left(\frac{\pi f}{W}\right)}.$$





(c) Considerando que a distorção máxima aceitável que este canal possa exercer sobre $x(t)$ ocorre quando $|H(f)|^2$ (ou $|H(\omega)|^2$) varia em até de 50% dentro da banda de $x(t)$. Qual o valor de k em função de W nesta condição limite? 1,25 pt

$$|H(0)|^2_{\max} = \frac{k^2}{k^2} = 1;$$

$$|H(W)|^2_{50\%} = \frac{k^2_{50\%}}{k^2_{50\%} + W^2} = 0.5|H(0)|^2_{\max} = 0.5$$

$$\boxed{k_{50\%} = W}$$

(d) Suponha que o sinal $x(t)$ passe por uma não linearidade, de modo que na saída $z(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + \alpha_3 x^3(t)$, qual a largura de banda máxima do sinal $z(t)$ 1,25 pt

O 3º termo terá a maior largura de banda, e esta será a banda de $z(t)$. Se $x(t)$ tem banda W, a banda de $z(t)$ será <u>**3*W***</u> (ou <u>**3*W*/2π**</u>).

Questão 2 (5 pontos)

Dado um sinal anti-periódico, tal que $g_p(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i g(t-nT_0)$, com $g(t)=\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$,

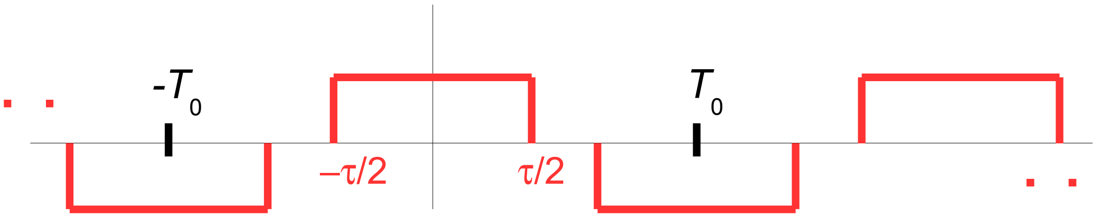
a) Esboce o sinal para (0,8 pt)

i) $\tau<T_0$

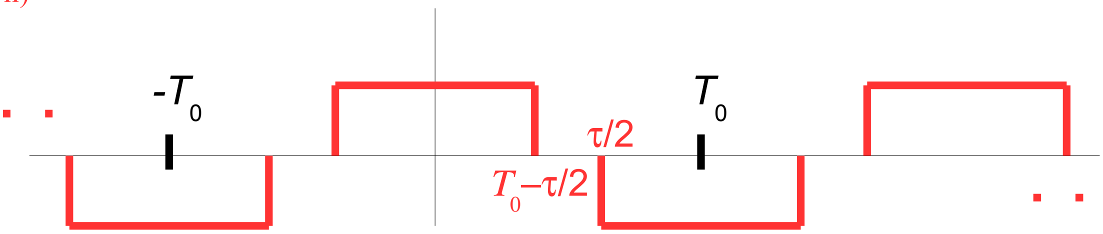
ii) $\tau>T_0$

a)

i)



ii)



b) Qual o período deste sinal? (0,8 pt)

Nos 2 casos, o período é $T = 2\,T_0$

c) Ache a série de Fourier exponencial nos dois casos, e esboce seus espectros de amplitude e fase. (1,0 pt)

Para simplificar, fazemos $\tau'=\begin{cases}\frac{\tau}{2} & ,\tau<T_0\\ T_0-\frac{\tau}{2} & ,\ \tau\geq T_0\end{cases}$.

A frequência fundamental é $f_0=\frac{1}{T}=\frac{1}{2T_0}$

Como a função é par, é mais fácil fazer pela série trigonométrica, sabendo que b_n=0.

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_0}^{T_0} g_p(t)\,dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T_0}^{T_0} g_p(t)\cos\left(2\pi n f_0 t\right)dt=\frac{2}{T_0}\left[\int_0^{\tau'}\cos(2\pi n f_0 t)\,dt-\int_{T_0-\tau'}^{T_0}\cos(2\pi n f_0 t)\,dt\right]$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left[\sin\left(\pi n\frac{t}{T_0}\right)\Big|_0^{\tau'}-\sin\left(\pi n\frac{t}{T_0}\right)\Big|_{T_0-\tau'}^{T_0}\right]=\frac{2}{\pi n}\left[\sin\left(\pi n\frac{\tau'}{T_0}\right)-\sin(\pi n)+\sin\left(\pi n-\pi n\frac{\tau'}{T_0}\right)\right]$$

Portanto

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ \dfrac{4}{\pi n}\sin\left(\pi n \dfrac{\tau'}{T_0}\right) & , n \text{ ímpar} \end{cases} ,$$

ou seja,

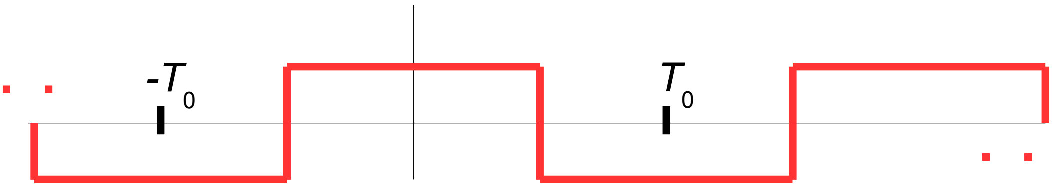
$$g_p(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\pi\frac{\tau'}{T_0}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T_0}\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\pi\frac{\tau'}{T_0}\right)\cos\left(3\pi\frac{t}{T_0}\right) + \frac{4}{5\pi}\sin\left(5\pi\frac{\tau'}{T_0}\right)\cos\left(5\pi\frac{t}{T_0}\right) + \cdots$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\left(\pi\frac{\tau'}{T_0}\right)\left(e^{j\pi\frac{t}{T_0}} + e^{-j\pi\frac{t}{T_0}}\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(3\pi\frac{\tau'}{T_0}\right)\left(e^{j3\pi\frac{t}{T_0}} + e^{-j3\pi\frac{t}{T_0}}\right) + \cdots$$

. ou os coeficientes da série são dados por

$$D_n = \frac{|a_n|}{2}e^{j\theta_n} = \frac{4}{\pi|n|}\left|\sin\left(\pi n\frac{\tau'}{T_0}\right)\right|e^{j\theta_n} \text{ , com } \theta_n = 0 \text{ ou } \pi \ .$$

A partir de agora, considere $\tau = T_0 = 1\text{ms}$



d) qual a largura de banda essencial deste sinal, que contém 98% da potência? (0,8 pt)

Como o sinal é periódico, a potência do sinal é $P_T = \dfrac{1}{2T_0}\displaystyle\int_{-T_0}^{T_0} g_p^2(t)\,dt = 1$

Com $\tau'/T_0 = 1/2$ A potência no primeiro temo é

$$P_1 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{8}{\pi^2}\sin^2(\pi/2) = 0{,}8105 \ ,$$

até o 3º termo é

$$P_3 = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_3^2}{2} = \left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\frac{8}{\pi^2}\sin^2(\pi/2) = 0{,}9006 \ ,$$

e até o n-ésimo termo

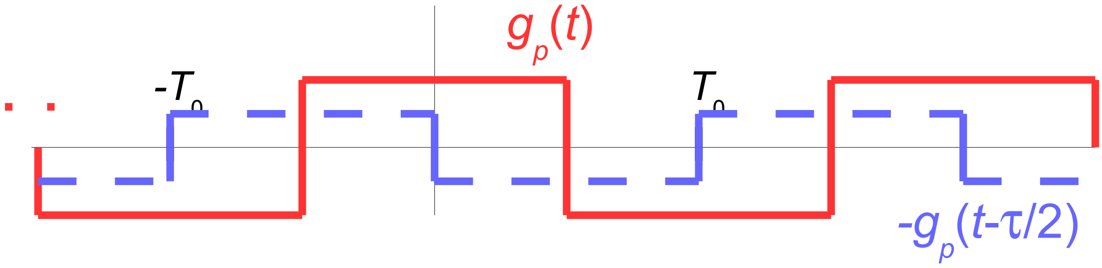
$$P_n = \left(\sum_{k=1, k \text{ ímpar}}^{n} \frac{1}{n^2}\right)\frac{8}{\pi^2}\sin^2(\pi/2) = 0{,}9006 \ ,$$

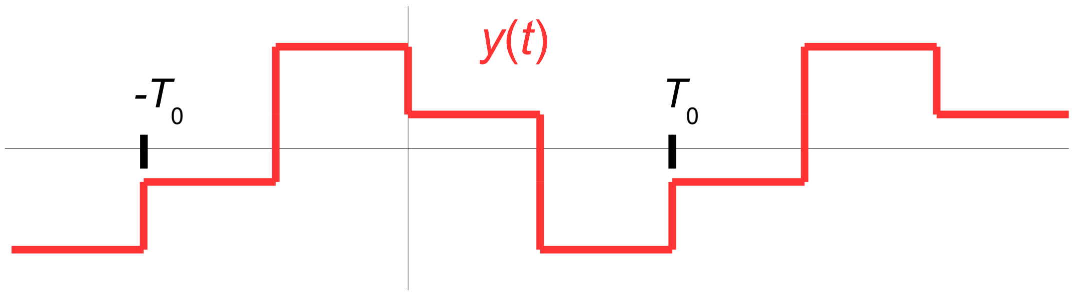
e para n = 21, $P_{21} = 0{,}9816 > 0{,}98$

A banda será então

$$B_{ess} = 21 f_0 = 10{,}5\,\text{kHz}$$

e)suponha que o sinal passe por um canal com multipercursos, de modo que na saída $y(t)=g_p(t)-\frac{1}{2}g_p\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$, esboce o sinal, ache sua série de Fourier exponencial e calcule a largura de banda essencial do sinal $y(t)$ (0,8 pt)





A resposta impulsional do sistema é dada por

$$H(f)=1-\frac{1}{2}e^{-j\pi f\tau}=1-\frac{1}{2}\cos(\pi f\tau)+\frac{j}{2}\sin(\pi f\tau)$$, e, portanto,

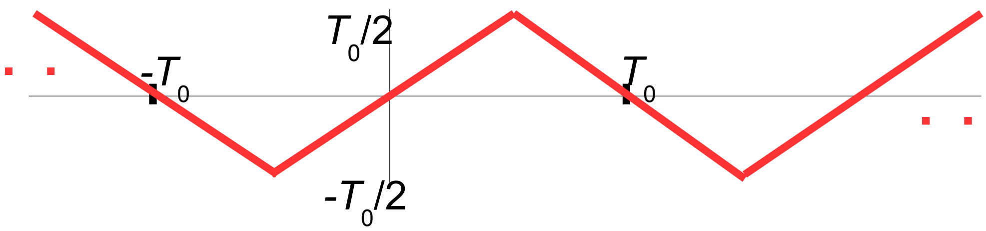
$$H(nf_0)=H\left(\frac{n}{2T_0}\right)=H\left(\frac{n}{2\tau}\right)=1-\frac{1}{2}\cos(n\pi/2)+\frac{j}{2}\sin(n\pi/2)$$, e,

$$H(nf_0)=1+\frac{j}{2}\sin(n\pi/2)=1\pm\frac{j}{2}$$, ou seja, todos os harmônicos serão afetados por um ganho de mesma amplitude $\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ e em desvio de fase de $\pm\tan^{-1}(1/2)$.

Como não há variação de amplitude entre os harmônicos não há mudança na largura de banda.

f) repita o item (e), supondo agora que o sinal passa por um integrador (considere que o sinal na saída não tem componente DC). O que podemos observar com relação à banda e por quê? (0,8 pt)

O sinal após a integração vai ser



com potência $P=\frac{T_0^2}{12}=0{,}08333$.

A resposta do integrador é $H(f)=\frac{1}{j2\pi f}$, e portanto os coeficientes passam a ser, para *n* ímpar

$$|a_n|=\begin{cases}0 & ,\ n\ \text{par}\\ \frac{4}{\pi n}\frac{T_0}{\pi n}\left|\sin\left(\pi n\frac{\tau'}{T_0}\right)\right| & ,\ n\ \text{ímpar}\end{cases}$$, ou seja,

A potência no primeiro temo é agora

$$P_1=\frac{a_1^2}{2}=\frac{8}{\pi^4}\sin^2(\pi/2)=0{,}82112=0{,}9855\,P$$,

Ou seja o primeiro termo já contém 98% da energia, e a banda é igual a f_0 = 1kHz.
Um integrador funciona como filtro passa-baixa e, como esperado, diminui a largura de banda.

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \ \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais:

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$
$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$
$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$
$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$
$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$
$$\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4 + x^4} dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < 1/2 \\ 1/2 & , |t| = 1/2 \\ 0 & , |t| > 1/2 \end{cases}$$
$$\Delta(t) = \mathrm{rect}(t)\left(1 - 2|t|\right)$$

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$

$$c_n = \frac{1}{E_n} \int_{T_0} g(t)\, x_n^* \, dt$$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t)\, dt; \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} g(t) \cos(2\pi n f_0 t); \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} g(t) \sin(2\pi n f_0 t)$$

$$C_0 = a_0; \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j 2\pi n f_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t)\, e^{-j 2\pi n f_0 t}\, dt = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}; \quad D_{-n} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j 2\pi k n / N} \qquad g_n = T_a g(n T_a) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j 2\pi k n / N}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad 1$$

$$1 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn} t \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad |\tau|\operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|2B|}\operatorname{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad g(-f)$$

$$g(at) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica