Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2014/2 (15/05/2014)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de três questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias são fornecidas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas adicionais serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues, devem conter o nome e matrícula do aluno.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Total	

departamento de engenharia elétrica

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (6 pontos)

Deseja-se enviar por meio de modulação AM em uma frequência f_c=50kHz a mensagem

$$m_1(t)=\cos(1000t)\text{sen}(2000t)$$

i) Supondo o uso de um modulador DSB-SC, escreva a expressão para o sinal modulado no domínio do tempo e no domínio da frequência. Esboce seu espectro de amplitude e de fase. (1 ponto)

Do formulário podemos obter $\sin x \cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$. Portanto,

$$m_1(t)=\sin(2000t)\cos(1000t)=\frac{1}{2}\sin(3000t)+\frac{1}{2}\sin(1000t)$$

$$\varphi(t)=m_1(t)\cos(314159t)=\frac{1}{4}[\sin(317159t)-\sin(311159t)+\sin(315159t)-\sin(313159t)]$$

e o espectro é dado por

$$\Phi(f)=\frac{1}{8}\Big[\delta(f-50477)e^{-j\frac{\pi}{2}}+\delta(f+50477)e^{j\frac{\pi}{2}}+\delta(f-49522)e^{j\frac{\pi}{2}}+\delta(f+49522)e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$\delta(f-50159)e^{-j\frac{\pi}{2}}+\delta(f+50159)e^{j\frac{\pi}{2}}+\delta(f-49841)e^{j\frac{\pi}{2}}+\delta(f+49841)e^{-j\frac{\pi}{2}}\Big]$$

ii) suponha que o sinal modulado em AM-DSB seja demodulado por uma portadora com um pequeno desvio de frequência, de modo que seja utilizado na recepção um oscilador com frequência $f_c'=f_c+\frac{50}{2\pi}$. Qual a razão entre a potência da mensagem $m(t)$ e a potência da distorção $e(t)=m(t)-\hat{m}(t)$, em dB? (1 ponto)

Sabendo que a potência de uma senoide de amplitude A é $A^2/2$, temos que a potência do sinal é de

$$P_{m_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Dado um sinal modulado $m(t)\cos(2\pi f_c t)$ demodulado com uma portadora f_c', pode-se mostrar facilmente que o sinal demodulado é dado por $\hat{m}(t)=m(t)\cos\left(2\pi(f_c-f_c')t\right)$. Neste caso, temos

$$\hat{m}(t)=\frac{1}{2}\left(\sin(3000t)+\sin(1000t)\right)\cos(50t)$$

e o erro é dado por

$$e(t)=\frac{1}{2}\left(\sin(3000t)+\sin(1000t)\right)\left(1-\cos(50t)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin(3000\text{t})+\frac{1}{2}\sin(1000\text{t})-\frac{1}{4}\sin(3050t)-\frac{1}{4}\sin(2950t)-\frac{1}{4}\sin(1050t)-\frac{1}{4}\sin(950t)$$

Sabendo que a potência da soma de senoides com frequências diferentes é a soma das potências, temos que

$$P_e=2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

e a RSR é

$$RSR=\frac{P_{m_1}}{P_e}=\frac{2}{3}=-1{,}76\,\text{dB}$$

iii) Suponha agora o uso de modulação SSB(USB), e repita o item (i)

Sabemos que na modulação USB apenas os componentes modulados de frequência maior de fc são mantidos, ou seja

$$\varphi(t)=\frac{1}{4}[\sin(317159t)+\sin(315159t)]$$ e o espectro é dado por

$$\Phi(f)=\frac{1}{8}\left[\delta(f-50477)e^{-j\frac{\pi}{2}}+\delta(f+50477)e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(f-50159)e^{-j\frac{\pi}{2}}+\delta(f+50159)e^{j\frac{\pi}{2}}\right]$$

iv) Poderíamos obter um sinal idêntico ao sinal obtido no item (iii) modulando um outro sinal em LSB em uma outra portadora. Qual seria este sinal e qual a frequência desta outra portadora?

A mensagem inicial correspondia a dois cossenos com frequência f_1 e f_2, $f_2>f_1$ ambos com fase -π/2 (seno). Olhando apenas a parte positiva do espectro do sinal modulado temos duas componentes espectrais com fase -π/2 nas frequências $f_c + f_1$ e $f_c + f_2$. Se tivéssemos uma portadora $f'>f_c+f_2$ este sinal poderia corresponder a um sinal LSB (veríamos apenas a parte do espectro inferior a f'), que seria obtido com um sinal mensagem composto por dois cossenos com frequências $f_1'=f'-(f_c+f_1)$ e $f_2'=f'-(f_c+f_2)$. Como no sinal LSB vemos a parte negativa do espectro da mensagem deslocada na frequência da portadora, temos que a mensagem tem fase + π/2 (-seno).
Ou seja, o sinal $m'(t)=-\sin(2\pi f_1't)-\sin(2\pi f_2't)$ se modulado em uma frequência f' resultari ano mesmo espectro.

v) Caso seja usado um modulador AM DSB + C, qual será a amplitude mínima da portadora para que possa utilizar um detector de envoltória? Qual a eficiência de potência neste caso?

A portadora enviada deve ter uma amplitude maior que a amplitude de pico do sinal, ou seja $A\geq 1$.
A eficiência é dada pela potência do sinal útil sobre a potência total, ou seja

$$\eta=\frac{P_m}{A^2+P_m}=\frac{1/4}{1+1/4}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

vi) Queremos agora transmitir um outro sinal $m_2(t)=\cos(500t)\cos(1000t)$ no mesmo canal utilizando QAM. Escreva a expressão para o sinal modulado no domínio do tempo e no domínio da frequência. Esboce seu espectro de amplitude e de fase.

$$m_2(t)=\sin(500t)\cos(1000t)=\frac{1}{2}\sin(1500t)-\frac{1}{2}\sin(500t)$$

e do formulário podemos obter $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.

Portanto,o sinal QAM é dado por

$$\varphi_{QAM}(t)=m_1(t)\cos(314159t)+m_2(t)\sin(314159t)$$
$$=\frac{1}{4}[\sin(317159t)-\sin(311159t)+\sin(315159t)-\sin(313159t)$$
$$\cos(312659t)-\cos(315659t)+\cos(313659t)-\cos(314659)]$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2 pontos)

Supondo ainda o sinal $m_1(t)$ do exercício anterior, queremos modulá-lo utilizando modulação em ângulo. Supondo o uso de PM ou FM, qual o valor das constantes *kp* e *kf*, considerando que em ambos os casos desejamos um sinal modulado com largura de banda aproximadamente igual a 100kHz?

Para a mensagem m(t) a banda corresponde à componente de maior frequência, ou seja,

$$B = \frac{3000}{2\pi} = 477{,}465\,\mathrm{Hz}$$

A amplitude de pico é quando as duas senoides se somam, ou seja, $m_p = 1$.

e a banda do sinal FM é

$$B_{FM} \approx 2(k_f m_p + B) = 2(k_f + 477{,}465) = 100\mathrm{kHz}$$

Portanto

$$k_f = 499522{,}5$$

Para o sinal PM, a banda B não muda, e

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = 1500\cos(3000t) + 500\cos(1000t) \Rightarrow m_p{}' = 2000$$

A banda do sinal FM é

$$B_{FM} \approx 2\left(\frac{k_p}{2\pi} m_p{}' + B\right) = 2(318{,}31\,k_p + 477{,}465) = 100\mathrm{kHz}$$

Portanto

$$k_p = 155{,}58$$

Questão 3 (2 pontos)

Sabe-se que em uma transmissão de TV o sinal de áudio é enviado em FM a uma frequência 4,5MHz acima da frequência da portadora. Suponha que em um receptor superheteródino com frequência intermediária de 10MHz é sintonizada uma rádio FM em 89MHz mas ouvimos, em vez da rádio sintonizada, o som do canal de TV. Por que isto acontece e qual deve ser a frequência da portadora do canal de TV?

Isto acontece porque provavelmente o filtro de imagem não é seletivo o suficiente e deixa passar o sinal de áudio da TV, que se encontra na portadora imagem do sinal desejado.

Caso seja considerado um oscilador local com frequência $f_{LO}=f_c+f_I$, sabemos que a imagem se encontra numa frequência $f_{\text{im}}=f_c+2f_I=89\text{MHz}+2\times10\text{MHz}=109\text{MHz}$. Sabendo ainda que esta imagem está a 4,5 MHz acima da portadora de TV, temos que $f_{TV}=f_{\Im}-4{,}5\,MHz=104{,}5\,\text{MHz}$

Caso seja considerado um oscilador local com frequência $f_{LO}=f_c-f_I$, então $f_{\text{im}}=f_c-2f_I=89\text{MHz}-2\times10\text{MHz}=69\text{MHz}$. Sabendo ainda que esta imagem está a 4,5 MHz acima da portadora de TV, temos que $f_{TV}=f_{\Im}-4{,}5\,MHz=64{,}5\,\text{MHz}$.

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \;\; \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Tabela de Transformadas de Hilbert:

$$g(t) \overset{H}{\Rightarrow} g_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{t-\alpha} d\alpha$$
$$g_h(t) \overset{H}{\Rightarrow} -g(t)$$
$$\sin t \overset{H}{\Rightarrow} -\cos t$$
$$\cos t \overset{H}{\Rightarrow} \sin t$$
$$\frac{1}{t^2+1} \overset{H}{\Rightarrow} \frac{t}{t^2+1}$$
$$\operatorname{sinc} t \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1-\cos t}{t}$$
$$\delta(t) \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1}{\pi t}$$
$$\operatorname{rect} t \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}\right|$$

Regra de Carson

$$B \approx 2(\Delta f + B)$$

Teoria das Comunicações

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn} t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\tau|\operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|}\operatorname{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica