Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Prova 1 – 2014/2 (23/09/2014)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de três questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias são fornecidas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1

Mostre que a Transformada de Fourier de $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a|\tau|} d\tau$ é dada por
$Y(f) = \frac{1}{a}\delta(f) - j\frac{2a}{2\pi f a^2 + (2\pi f)^3}$. (1,5 ponto)
Dica: Lembre-se que $a(t) * b(t) = \int_{-\infty}^{t} a(x)b(t-x)dx$.

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = g(t) * u(t)$

$U(f) = TF\{u(t)\} = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$

$Y(f) = TF\{y(t)\} = G(f)U(f)$

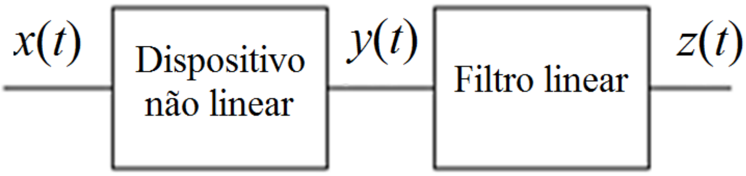
$Y(f) = \frac{G(0)}{2}\delta(f) + \frac{G(f)}{j2\pi f}$

$g(t) = e^{-a|\tau|} \leftrightarrow G(f) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

$\boxed{Y(f) = \frac{1}{a}\delta(f) - j\frac{2a}{2\pi f a^2 + (2\pi f)^3}}$.

Questão 2

O sinal $x(t) = \cos(200000\pi t) + \text{sen}(202000\pi t)$ é introduzido no sistema representado pela figura abaixo e composto pela concatenação de um dispositivo não linear e um filtro linear. O dispositivo não linear segue o modelo $y(t) = 2x(t) + x^3(t)$, e o filtro possui uma resposta impulsional dada por $h_F(t) = 2.10^4\,\text{sinc}[\,10^4\pi(t - 2{,}5.10^{-4})]\,\cos(2.10^5\pi t)$. (5,0 pontos)



a) Encontre função de transferência $H_F(f) = TF\{h_F(t)\}$ do filtro linear. (1 ponto)

$h_F(t) \leftrightarrow\; H_F(f)$
$g(t-\tau)\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[G(f - f_0)e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + G(f + f_0)e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}\right]$
para $f_0 = 10^5$ e $\tau = 2{,}5.10^{-4}$;
Sendo $g(t) = 2.10^4\,\text{sinc}(10^4\pi t) \leftrightarrow G(f) = 2\,\text{rect}\left(\frac{f}{10^4.}\right)$;
Então $\boxed{H_F(f) = \text{rect}\left(\frac{f-10^5}{10^4.}\right)e^{-j2\pi(f-10^5)2{,}5.10^{-4}} + \text{rect}\left(\frac{f+10^5}{10^4.}\right)e^{-j2\pi(f+10^5)2{,}5.10^{-4}}}$;

b) Encontre as características elétricas do filtro (Ideal/Não ideal; Passa-baixa/faixa/alta; Largura de banda; Frequência de ressonância se houver). (0,5 ponto)

Tendo $H_F(f)$ amplitude constante e defasagem linear dentro da banda do filtro:
Filtro IDEAL, Passa-Faixa, LB = 10kHz; f_r = 100kHz.

c) Encontre a expressão para o sinal de saída deste sistema $z(t)$. (1,5 ponto)

$y(t) = 2x(t) + x^3(t)$; $x(t) = \cos(2\pi 100kt) + \text{sen}(2\pi 101kt)$;
$y(t) = \frac{17}{4}\cos(2\pi 100kt) + \frac{17}{4}\text{sen}(2\pi 101kt) - \frac{3}{4}\cos(2\pi 102kt) - \frac{3}{4}\text{sen}(2\pi 99kt) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 300kt) - \frac{1}{4}\text{sen}(2\pi 303kt) - \frac{3}{4}\cos(2\pi 302kt) + \frac{3}{4}\text{sen}(2\pi 301kt)$;
Com coeficientes da série exponencial dada por:
$D_{100k} = \frac{17}{8}e^{j0}$; $D_{-100k} = \frac{17}{8}e^{j0}$; $D_{101k} = \frac{17}{8}e^{\frac{-j\pi}{2}}$; $D_{-101k} = \frac{17}{8}e^{\frac{j\pi}{2}}$;
$D_{102k} = \frac{3}{8}e^{j\pi}$; $D_{-102k} = \frac{3}{8}e^{j\pi}$; $D_{99k} = \frac{3}{8}e^{\frac{j\pi}{2}}$; $D_{-99k} = \frac{3}{8}e^{\frac{-j\pi}{2}}$;
$D_{300k} = \frac{1}{8}e^{j0}$; $D_{-300k} = \frac{1}{8}e^{j0}$; $D_{302k} = \frac{3}{8}e^{j\pi}$; $D_{-302k} = \frac{3}{8}e^{j\pi}$;
$D_{303k} = \frac{1}{8}e^{j\frac{\pi}{2}}$; $D_{-303k} = \frac{1}{8}e^{\frac{-j\pi}{2}}$; $D_{301k} = \frac{3}{8}e^{-j\frac{\pi}{2}}$; $D_{-301k} = \frac{3}{8}e^{j\frac{\pi}{2}}$;

$D^{saída} = H_F(\omega)D^{entrada} =$

$D^{entrada}\left[\text{rect}(\frac{\omega-2\pi 10^5}{2\pi 10^4.})e^{-j(\omega-2\pi 10^5)2{,}5.10^{-4}} + \text{rect}(\frac{\omega+2\pi 10^5}{2\pi 10^4.})e^{-j(\omega+2\pi 10^5)2{,}5.10^{-4}}\right]$

$D_{100k} = \frac{17}{8}e^{j0}\ e^{-j(0)2{,}5.10^{-4}} = \frac{17}{8}e^{j0}\ ;\ D_{-100k} = \frac{17}{8}e^{j0}e^{-j(0)2{,}5.10^{-4}} = \frac{17}{8}e^{j0};$

$D_{101k} = \frac{17}{8}e^{\frac{-j\pi}{2}}\ e^{-j(2\pi 10^3)2{,}5.10^{-4}} = \frac{17}{8}e^{j\pi}\ ;\ D_{-101k} = \frac{17}{8}e^{j\pi};$

$D_{102k}=\frac{3}{8}e^{j\pi}e^{-j(4\pi 10^3)2{,}5.10^{-4}} = \frac{3}{8}e^{j0};\ D_{-102k} = \frac{3}{8}e^{j0};$

$D_{99k}=\frac{3}{8}e^{\frac{j\pi}{2}}e^{-j(-2\pi 10^3)2{,}5.10^{-4}} = \frac{3}{8}e^{j\pi};\ D_{-99k}=\frac{3}{8}e^{j\pi};$

Os outros termos são filtrados pelo FPF. Então:

$\boxed{z(t) = \frac{17}{4}\cos(2\pi 100kt) - \frac{17}{4}\cos(2\pi 101kt) + \frac{3}{4}\cos(2\pi 102kt) - \frac{3}{4}\cos(2\pi 99kt)};$

d) Qual a largura de banda do sinal $z(t)$? (0,5 ponto)

O sinal apresenta componentes entre 99kHz e 102kHz, portanto B =3 kHz

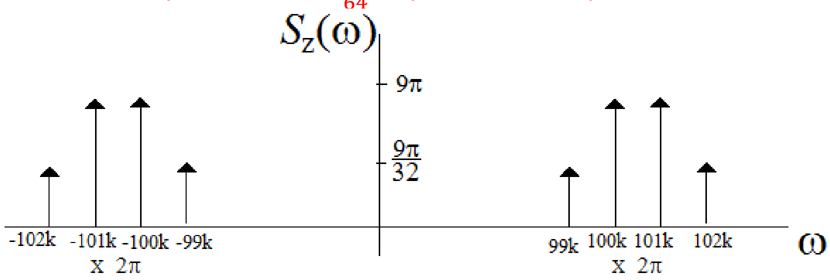
e) Encontre a função de auto-correlação de $z(t)$. (0,75 ponto)

$R_z(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(\tau)z(t+\tau)d\tau$

$R_z(\tau) = 9\cos(2\pi 100k\,\tau) + 9\cos(2\pi 101k\,\tau) + \frac{9}{32}\cos(2\pi 102k\,\tau) + \frac{9}{32}\cos(2\pi 99k\,\tau);$

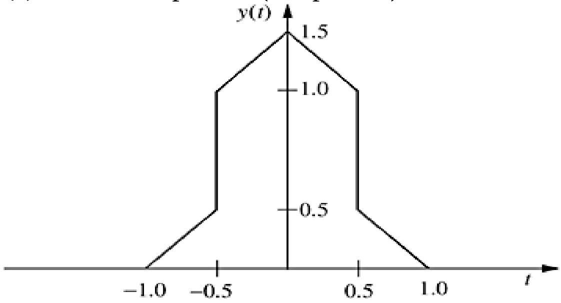
f) Esboce a função densidade espectral de potência de $z(t)$. (0,75 ponto)

$S_z(f) = TF\{R_z(\tau)\} = \frac{9}{2}[\delta(f-100k) + \delta(f+100k)] + \frac{9}{2}[\delta(f-101k) + \delta(f+101k)] +$
$\frac{9}{64}[\delta(f-102k) + \delta(f+102k)] + \frac{9}{64}[\delta(f-99k) + \delta(f+99k)]$.



Questão 3

Com respeito ao sinal $y(t)$ abaixo, responda. (3,5 pontos)



a) Qual a Transformada de Fourier de $y(t)$? (1,5 pontos)

$y(t) = 0.5\,\mathrm{rect}(t) + \Delta\left({}^{t}/_{2}\right)$

$TF[A\,\mathrm{rect}(t/\tau)] = A\tau\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$

$TF\left[A\Delta\left({}^{t}/_{\tau}\right)\right] = \frac{A\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f\tau}{2}\right)$

$\boxed{TF[\mathrm{y}(t)] = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\pi f) + \mathrm{sinc}^2(\pi f)}$

b) Qual a largura de banda efetiva de $y(t)$? Considere como banda efetiva a menor frequência em que a densidade espectral cai à zero, ou seja, seu primeiro nulo. (0,5 ponto)

Tanto sinc(x) quanto sinc^2(x) possuem 1º nulo em x = π, ou seja $\pi f = \pi$.

A largura de banda efetiva é $\boxed{1\text{ Hz}}$.

c) Qual a transformada de Fourier de $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-2n)$? (1,5 pontos)

Dica: Lembre-se que $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t-iT_0) = x(t) * \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-iT_0)$.

$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-2n) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n)$,

$TF[a(t) * b(t)] = A(f)B(f)$,

$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0)\right] = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$,

$TF[g(t)] = Y(f)\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$, com $T_0 = 2$,

$TF[g(t)] = \left[\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\pi f) + \mathrm{sinc}^2(\pi f)\right]\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{2}\right)$, onde apenas as frequências $f = n/2$ terão componentes.

$\boxed{TF[g(t)] = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(n\pi/2) + \mathrm{sinc}^2(n\pi/2)\right]\delta(f-n/2)}$

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais

$$\int x\sin ax dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$
$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$
$$\int x^2\sin ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$
$$\int x^2\cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$
$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$
$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4 + x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & , |t| < \tau/2 \\ 1/2 & , |t| = \tau/2 \\ 0 & , |t| > \tau/2 \end{cases}$$
$$\Delta(t/\tau) = \mathrm{rect}(t/\tau)(1 - 2|t|/\tau)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\mathrm{sen}\theta$$
$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$\mathrm{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$
$$c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t)x_n^* dt$$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$
$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)dt; a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t); b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)$$
$$C_0 = a_0; C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$
$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n}; D_{-n} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N} g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

UnB departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$\delta(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	1
1	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\delta(f)$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$
$e^{-a\|t\|}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$u(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}\delta(f)+\dfrac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}t$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{j\pi f}$
$\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\mid\tau\mid \mathrm{sinc}(\pi f\tau)$
$\mathrm{sinc}(2\pi Bt)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{\mid 2B\mid}\mathrm{rect}(f/2B)$
$\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi f\tau}{2}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\dfrac{n}{T}\right)$
$k_1g_1(t)+k_2g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$k_1G_1(f)+k_2G_2(f)$
$G(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$g(-f)$
$g(at)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{\mid a\mid}G\left(\dfrac{f}{a}\right)$
$g(t-t_0)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f)e^{-j2\pi ft_0}$
$g(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f-f_0)$
$g_1(t)*g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G_1(f)G_2(f)$
$g_1(t)g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G_1(f)*G_2(f)$
$\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$(j2\pi f)^n G(f)$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga