Teoria das Comunicações

Profs. André Noll Barreto / Judson Braga

Prova 2 – 2014/2 (16/10/2014)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias são fornecidas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas adicionais serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues, devem conter o nome e matrícula do aluno, mas o professor não se responsabiliza por eventuais perdas.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sinal em forma de escada

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2(n \bmod 4)\text{-}3)\mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

em que "mod" é a função módulo (resto da divisão), é modulado em AM (DSB+C).

a) Qual a amplitude da portadora e qual a eficiência de potência desta modulação, considerando um índice de modulação igual a 0,8? (1 ponto)

O sinal pode ser representado por uma escada com níveis -3,-1, 1 e 3, que se alternam periodicamente a intervalos Ts. Este sinal tem uma potência $P_m = \frac{1}{4}[(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2] = 5.$

A amplitude da portadora é $A = \frac{m_p}{\mu} = \frac{3}{0{,}8} = 3{,}75$

A eficiência é $\eta = \frac{P_m}{P_m + A^2} = \frac{5}{5+(3{,}75)^2} = 0{,}26$

b) Qual seria a eficiência de um sistema DSB-SC? (0,8 ponto)

Em um sistema DSB-SC a amplitude da portadora é nula, e portando a eficiência é de 100%

c) Por que é utilizado DSB+C em rádios AM comerciais? (0,7 ponto)

Apesar de sua baixa eficiência o DSB+C permite a detecção por envelope, sem a necessidade de detecção coerente.

Questão 2 (2,5 pontos)

Um receptor de TV deve ser sintonizado entre os canais VHF de 7 a 13, cujas frequências (em MHz) são definidas na tabela abaixo.

Canal	Freq. Mínima	Portadora de Vídeo	Portadora de Áudio	Freq. Máxima
7	174	175.25	179.75	180
8	180	181.25	185.75	186
9	186	187.25	191.75	192
10	192	193.25	197.75	198
11	198	199.25	203.75	204
12	204	205.25	209.75	210
13	210	211.25	215.75	216

É utilizado um receptor super-heteródino, que emprega como filtro de imagem um filtro passa-baixa ideal com frequência de corte igual a 220MHz.

a) Qual a frequência intermediária mínima que pode ser utilizada? (1,5 ponto)

Como o filtro de imagem é um filtro passa-baixa, podemos deduzir que
$f_{LO} = f_c + f_I$.
Agora, o canal vai de
$f_1 = f_c - 1{,}25\text{M}$
a
$f_2 = f_c + 4{,}75\text{M}$.

Após a conversão em frequência o sinal vai estar entre
$f_2' = f_{LO} - f_2 = f_I - 4{,}75\text{M}$
e
$f_1' = f_{LO} - f_1 = f_I + 1{,}25\text{M}$.

O pior caso seria a interferência de um sinal em 220MHz, que não foi filtrado, no canal 7. Após a conversão em frequência, queremos portanto que

$$|220\text{M} - f_{LO}| = |220\text{M} - f_C - f_I| \leq f_I - 4{,}75\text{M}$$

e, com $f_c = 175{,}25\text{M}$, temos que

$$f_I \geq 24{,}75\text{MHz}$$

b) Qual a frequência do oscilador local caso seja sintonizado o canal 9? Em que frequência vai cair a portadora de áudio após a conversão de frequência? (1 ponto)

Uma vez que $f_{im} = f_c + 2f_I$ sabemos que
$f_{LO} = f_c + f_I$ =187,25MHz+24,75MHz = 212MHz

Após a multiplicação da portadora de áudio f_{au} pelo oscilador local teremos dois componentes, em $|f_{au} \pm f_{LO}| = |191{,}75\text{MHz} \pm 212\text{MHz}|$.
Como a frequência mais alta será filtrada, teremos $f_{I,au} = 20{,}25\text{MHz}$.

Questão 3 (2,5 pontos)

Os sinais

$m_1(t) = \cos(1000\pi t) - \sin(1500\pi t)$

e

$m_2(t) = \cos(800\pi t - \pi/4) + \sin(2000\pi t)$

devem ser transmitidos em paralelo, utilizando um de dois esquemas possíveis

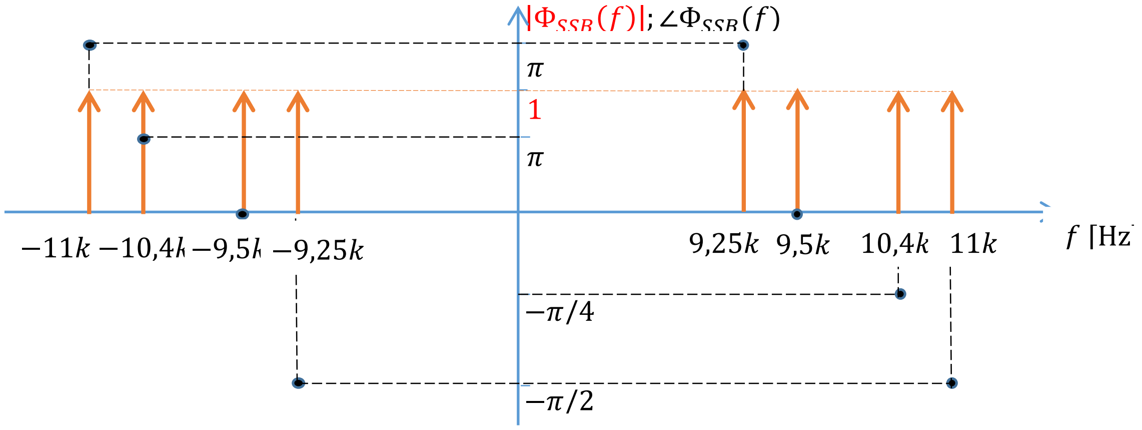
a) Enviando o sinal m_1 em LSB e o sinal m_2 em USB
b) Utilizando-se QAM

Nos dois casos

i) Escreva a expressão para o sinal modulado, para uma portadora de frequência igual a 10kHz.
Esboce o espectro de fase e amplitude do sinal modulado. (1,3 ponto)

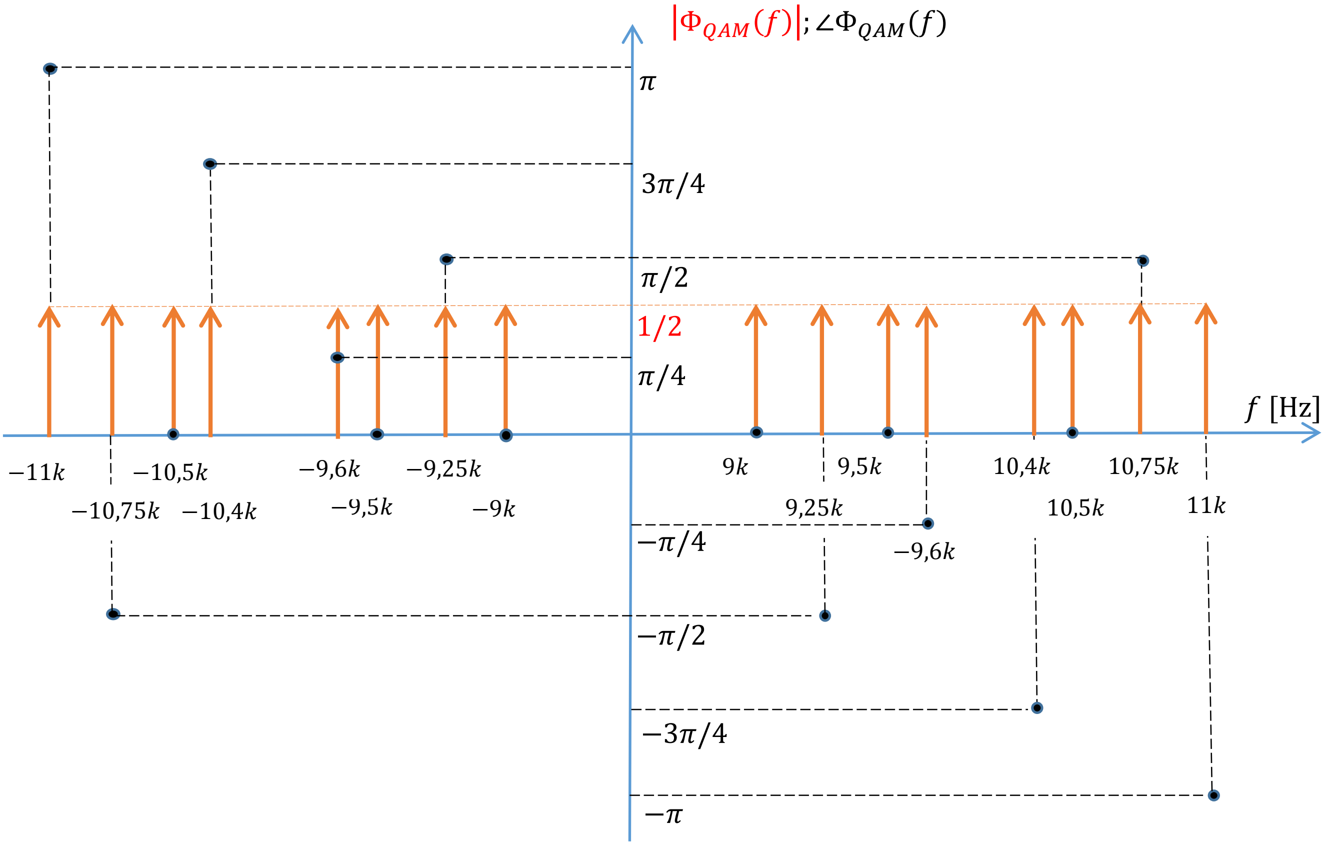
a) Sabendo que no sinal USB (LSB) enviamos apenas a parte positiva (negativa) do espectro de m_1, deslocado para f_c, e lembrando que a fase da parte negativa é o contrário da fase da parte positiva, temos que:

$$\varphi_{SSB} = \cos(19000\pi t) + \sin(18500\pi t) + \cos\left(20800\pi t - {}^{\pi}/_{4}\right) + \sin(22000\pi t)$$



b) Já no QAM um sinal é modulado com um cosseno e outro com um seno (ou seja, com -π/2 de fase), e supondo m1 com o cosseno e m2 com o seno, teremos

$$\varphi_{QAM} = \cos(21000\pi t) + \cos(19000\pi t) - \sin(21500\pi t) + \sin(18500\pi t) + \cos\left(20800\pi t - {}^{3\pi}/_{4}\right) + \cos\left(19200\pi t - {}^{\pi}/_{4}\right) - \cos(22000\pi t) + \cos(18000\pi t)$$



ii) Nos 2 casos, determine os sinais demodulados caso tenhamos no receptor um erro de fase de 45 graus. (1,2 ponto)

a) Devemos filtrar o sinal, separando a USB da LSB, e multiplicá-lo pela portadora, neste caso com erro de fase, $\cos(2\pi f_c t + \pi/4)$, e filtrá-lo na recepção. Teremos então

$$\hat{m}_1(t) = \cos(1000\pi t + \pi/4) - \sin(1500\pi t + \pi/4)$$
$$\hat{m}_2(t) = \cos(800\pi t) + \sin(2000\pi t - \pi/4)$$

ou seja, teremos o sinal original defasados $\pm\pi/4$.

b) Neste caso multiplicamos o sinal pela portadora (cos) em um ramo e pela portadora defasada (sen) em outro ramo, e filtramos na recepção. Sendo assim, enviamos o sinal $\varphi(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + m_2(t)\cos(2\pi f_c t - \pi/2)$

Ao multiplicarmos o sinal por $\cos(2\pi f_c t + \pi/4)$ e filtrá-lo, teremos

$$\hat{m}_1(t) = m_1(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + m_2(t)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(m_1(t) - m_2(t))$$

Ao multiplicarmos o sinal por $\sin\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi f_c t - \frac{\pi}{4}\right)$ e filtrá-lo, teremos

$$\hat{m}_2(t) = m_1(t)\cos(\pi/4) + m_2(t)\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(m_1(t) + m_2(t))$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sinal $m(t) = \cos(500\pi t) + 2\sin(3000\pi t)$ é transmitido por meio de modulação FM. Considerando que é utilizado um filtro de pré-ênfase $H_p(f) = \begin{cases} 1 & f < 1kHz \\ j\frac{f}{1000} & f \geq 1kHz \end{cases}$ antes da modulação em FM,

a) qual o máximo valor do parâmetro k_f para que a largura de banda do sinal modulado $\varphi_{FM(t)}$ seja menor que 200kHz? (1 ponto)

$$m_p^{FM}(t) = m(t) * h_p^{FM}(t) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} M_p^{FM}(f) = M(f)H_p^{FM}(f)$$

Sendo $M(f) = \frac{\delta(f-250)+\delta(f+250)}{2} + \frac{\delta(f-1500)-\delta(f+1500)}{j}$ e

$H_p^{FM}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 1\text{ kHz} \\ j\frac{f}{1000} & |f| \geq 1\text{ kHz} \end{cases}$

$M_p^{FM}(f) = \frac{\delta(f-250)+\delta(f+250)}{2} + \frac{[\delta(f-1500)+\delta(f+1500)]}{2} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\Longleftrightarrow}$

$m_p^{FM}(t) = \cos(2\pi 250t) + 3\cos(2\pi 1500t)$

$\max\left(\left|m_p^{FM}(t)\right|\right) = 1 + 3 = 4$

$B_{FM} = 2(\Delta f + B_m)$

$200k = 2(4k_f + 1{,}5k)$; $\boxed{k_f = 24625\text{ Hz/V}}$

b) Se em vez de um modulador FM tivéssemos um modulador PM, qual deveria ser o filtro de pré-ênfase para termos o mesmo sinal $\varphi_{FM(t)}$ na saída? (1 ponto)

Sendo $\varphi_{FM}(t) = A\cos\left(2\pi f_c t + k_\omega \int m_p^{FM}(\tau)d\tau\right)$ e $\varphi_{PM}(t) = A\cos\left(2\pi f_c t + k_p m_p^{PM}(t)\right)$

Para que $\varphi_{FM}(t) = \varphi_{PM}(t)$, $k_\omega \int m_p^{FM}(\tau)d\tau = k_p m_p^{PM}(t) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \frac{M_p^{PM}(f)}{M_p^{FM}(f)} = \frac{k_\omega}{k_p j2\pi f}$

Usando $\begin{cases} m_p^{FM}(t) = m(t) * h_p^{FM}(t) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} M_p^{FM}(f) = M(f)H_p^{FM}(f) \\ m_p^{PM}(t) = m(t) * h_p^{PM}(t) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} M_p^{PM}(f) = M(f)H_p^{PM}(f) \end{cases} \Longrightarrow \frac{M_p^{PM}(f)}{M_p^{FM}(f)} = \frac{H_p^{PM}(f)}{H_p^{FM}(f)}$

E, portanto, $H_p^{PM}(f) = \frac{k_\omega}{k_p j2\pi f} H_p^{FM}(f)$

Então $\boxed{H_p^{PM}(f) = \begin{cases} -j\frac{k_\omega}{2\pi f\, k_p} & |f| < 1\text{ kHz} \\ \frac{k_\omega}{2000\pi\, k_p} & |f| \geq 1\text{ kHz} \end{cases}}$ ou $\boxed{H_p^{PM}(f) = \begin{cases} -j\frac{k_f}{f\, k_p} & |f| < 1\text{ kHz} \\ \frac{k_f}{1000\, k_p} & |f| \geq 1\text{ kHz} \end{cases}}$

c) Por que deve ser aplicado o filtro de pré-ênfase em um sinal FM? (0,5 ponto)

Porque em um sinal FM demodulado o ruído cresce linearmente com a frequência, e, desta forma, o filtro de pré-ênfase produz ganhos em $m(t)$ em frequências que normalmente são mais afetadas pelo ruído de fase do sinal FM após a demodulação. Outra maneira de se ver é considerando que, por outro lado, em um sinal PM demodulado, o ruído independe da frequência, e o filtro de pré-ênfase faz com que a partir de certa frequência o sinal comporte-se como PM.

Teoria das Comunicações

Profs. André Noll Barreto / Judson Braga

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right), \quad \text{se} \;\; a > 0$$

Tabela de Transformadas de Hilbert:

$$g(t) \overset{H}{\Rightarrow} g_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha$$

$$g_h(t) \overset{H}{\Rightarrow} -g(t)$$

$$\sin(t) \overset{H}{\Rightarrow} -\cos(t)$$

$$\cos(t) \overset{H}{\Rightarrow} \sin(t)$$

$$\frac{1}{t^2 + 1} \overset{H}{\Rightarrow} \frac{t}{t^2 + 1}$$

$$\mathrm{sinc}(t) \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1 - \cos(t)}{t}$$

$$\delta(t) \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1}{\pi t}$$

$$\mathrm{rect}(t) \overset{H}{\Rightarrow} \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{t + \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}}\right|$$

Regra de Carson

$B \approx 2(\Delta f + B)$,

$\Delta f = \max|f_i(t) - f_c|$

Teoria das Comunicações

Profs. André Noll Barreto / Judson Braga

Tabela de Transformadas de Fourier:

$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$
$\delta(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	1
1	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\delta(f)$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{n!}{(a + j2\pi f)^{n+1}}$
$e^{-a\|t\|}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$u(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}\delta(f) + \dfrac{1}{j2\pi f}$
$\operatorname{sgn} t$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{j\pi f}$
$\operatorname{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\| \tau \| \operatorname{sinc}(\pi f \tau)$
$\operatorname{sinc}(2\pi B t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{\| 2B \|}\operatorname{rect}(f/2B)$
$\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi f \tau}{2}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \dfrac{n}{T}\right)$
$k_1 g_1(t) + k_2 g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$k_1 G_1(f) + k_2 G_2(f)$
$G(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$g(-f)$
$g(at)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{\| a \|} G\left(\dfrac{f}{a}\right)$
$g(t - t_0)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f) e^{-j2\pi f t_0}$
$g(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f - f_0)$
$g_1(t) * g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G_1(f) G_2(f)$
$g_1(t) g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G_1(f) * G_2(f)$
$\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$(j2\pi f)^n G(f)$
$\int_{-\infty}^{t} g(x) dx$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{G(f)}{j2\pi f} + \dfrac{1}{2} G(0) \delta(f)$