Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Prova 1 – 2015/1 (23/04/2015)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias são fornecidas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

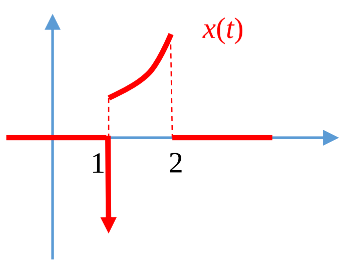
Questão 1

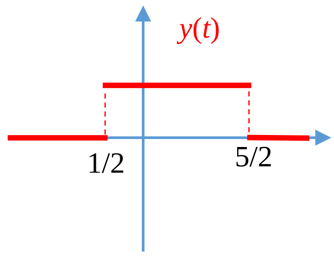
i) Esboce os sinais
$x(t) = e^{t}u(t-1)u(2-t) + \delta(t-1)\cos(\pi t)$
$y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{3}\right)$

ii) Calcule o coeficiente de correlação entre eles

Solução:

i)





ii)
O coeficiente de correlação $\rho = \frac{\langle x(t), y(t)\rangle}{\sqrt{E_x E_y}} = 0$, já que a energia $E_x = \infty$, devido à presença do impulso

Também é aceito o cálculo da correlação ou produto interno,

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_1^2 (e^t - \delta(t))dt = e^2 - e - 1$$

Questão 2

Utilizando a transformada de Fourier de um pulso triangular de largura unitária $\Delta(t)$, conforme a tabela no final da prova, ache a série de Fourier exponencial do sinal

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t-4k}{2}\right)$$

Solução:

É um sinal periódico com $T_0 = 4$, e portanto, $f_0 = 1/4$. A série é dada por

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\pi n/2}$$

com

$$D_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \Delta\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{4} F\{\Delta(t/2)\}_{f=nf_0}$$
$$= \frac{\operatorname{sinc}^2(n\pi/4)}{4}$$

Questão 3

Dado um sinal $\boldsymbol{x(t) = \cos(4\pi t) + \sin(3\pi t)\cos(5\pi t)}$

a) Qual sua largura de banda B_x?

b) Suponha que o sinal passe por uma não-linearidade, modelada por
$$y(t) = x(t) + 0{,}5\,x^2(t)$$
Esboce o espectro de amplitude e de fase do sinal $y(t)$. Qual sua largura de banda?

c) Suponha agora que o sinal $y(t)$ seja filtrado por um filtro passa-baixa ideal, de modo que todos os componentes de frequência maior que B_x sejam eliminados. Chamando o sinal filtrado de $z(t)$, qual a razão (em dB) entre a potência do sinal $x(t)$ e a potência da distorção $e(t) = x(t) - z(t)$?

Solução:

a) $x(t) = \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi t) = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ *

A largura de banda é a frequência do componente de maior frequência, ou seja $B_x = 4\text{Hz}$

b) $y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}\cos^2\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos^2(4\pi t) + \frac{1}{8}\cos^2\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\cos(4\pi t) + \frac{1}{4}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)\cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cos(4\pi t + \pi) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(8\pi t) + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cos(16\pi t - \pi) + \frac{1}{4}\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}\cos(10\pi t) + \frac{1}{8}\cos(6\pi t - \pi) + \frac{1}{4}\cos\left(12\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad **$$

$$y(t) = \frac{6}{16} - \frac{1}{2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{16}\cos(4\pi t) - \frac{1}{4}\sin(6\pi t) - \frac{1}{8}\cos(6\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{4}\cos(8\pi t) + \frac{1}{8}\cos(10\pi t) + \frac{1}{4}\sin(12\pi t) - \frac{1}{16}\cos(16\pi t)$$

$$y(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos(2\pi t + \pi/2) + \frac{\sqrt{241}}{16}\cos\left(4\pi t + \tan^{-1}\frac{4}{15}\right) + \frac{\sqrt{5}}{8}\cos(6\pi t + \tan^{-1}2 + \pi) + \frac{\sqrt{5}}{4}\cos(8\pi t + \tan^{-1}2) + \frac{1}{8}\cos(10\pi t) + \frac{1}{4}\cos(12\pi t - \pi/2) + \frac{1}{16}\cos(16\pi t + \pi)$$

Portanto, o espectro de amplitude e fase pode ser dado pela seguinte tabela

Freq (Hz)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Ampl	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{241}}{16}$	$\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$
Fase	0	$\frac{\pi}{2}$	$\tan^{-1}\frac{4}{15}$	$\tan^{-1}2+\pi$	$\tan^{-1}2$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	π

c) Da equação *

$$P_x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(1)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Da equação **, eliminando todos os termos com frequência maior que 4, podemos achar

$$z(t)=\frac{1}{2}\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(4\pi t)+\frac{1}{2}\cos\left(8\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\cos(4\pi t+\pi)+\frac{1}{4}$$
$$+\frac{1}{4}\cos(8\pi t)+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{8}\cos(6\pi t-\pi)$$
$$+\frac{1}{4}\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

E, portanto,

$$e(t)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\sin(2\pi t)-\frac{1}{16}\cos(4\pi t)+\frac{1}{4}\sin\left(4\pi t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin(6\pi t)-\frac{1}{8}\cos(6\pi t)$$
$$+\frac{1}{4}\cos(8\pi t)$$

e

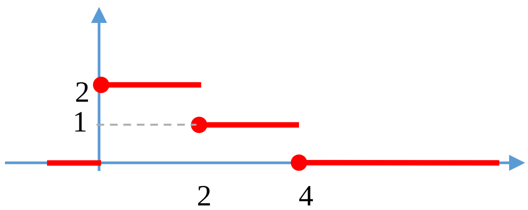
$$P_e=\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2++\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{141}{512}$$

A razão sinal-distorção é

$$\gamma=\frac{3/4}{141/512}=\frac{128}{47}=4{,}35\text{dB}$$

Questão 4

i)Ache a transformada de Fourier do sinal abaixo



ii) supondo agora que o sinal é amostrado 8 vezes no intervalo de t = 0 a 4, ache a sua transformada de Fourier discreta. A DFT será igual à transformada de Fourier amostrada? Por quê?

i)

$$g(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

E portanto

$$G(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2\pi f)e^{-j2\pi f} + \mathrm{sinc}(2\pi f)e^{-j6\pi f} = \mathrm{sinc}(2\pi f)e^{-j2\pi f}\left(2 + e^{-j4\pi f}\right)$$

ii) o intervalo de amostragem será $T_a = \frac{4}{N} = 1/2.$

Portanto $g_n = T_a g(nT_a)$, e o vetor amostrado será

$\mathbf{g} = [g(0)\ g(0{,}5)\ g(1)\ g(1{,}5)\ g(2)\ g(2{,}5)\ g(3)\ g(3{,}5)]\ /2\ = [1\ 1\ 1\ 1\ 0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5\ ]$

A DFT é dada por

$$G_0 = \sum_{k=0}^{7} g_n = 1 + 1 + 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 6$$

$$G_1 = \sum_{k=0}^{7} g_n e^{j\pi n/4}$$

$$= 1 + e^{j\pi/4} + e^{j\pi/2} + e^{j3\pi/4} + 0{,}5e^{j\pi} + 0{,}5e^{j5\pi/4} + 0{,}5e^{j3\pi/2} + 0{,}5e^{j7\pi/4}$$
$$= 1 + \sqrt{2} + j\sqrt{2} + j - \sqrt{2} + j\sqrt{2} - 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{2} - 0{,}5j\sqrt{2} - 0{,}5j + 0{,}5\sqrt{2}$$
$$- 0{,}5j\sqrt{2} = 0{,}5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)j$$

$$G_2 = \sum_{k=0}^{7} g_n e^{j\pi n/2} = 1 + e^{j\pi/2} + e^{j\pi} + e^{j3\pi/2} + 0{,}5e^{j2\pi} + 0{,}5e^{j\pi/2} + 0{,}5e^{j\pi} + 0{,}5e^{j3\pi/2}$$
$$= 1 + j - 1 - j + 0{,}5 + 0{,}5j - 0{,}5 - 0{,}5j = 0$$

$$G_3 = \sum_{k=0}^{7} g_n e^{j3\pi n/4}$$

$$= 1 + e^{j3\pi/4} + e^{j3\pi/2} + e^{j\pi/4} + 0{,}5e^{j2\pi} + 0{,}5e^{j7\pi/4} + 0{,}5e^{j\pi/2} + 0{,}5e^{j5\pi/4}$$
$$= 1 - \sqrt{2} + j\sqrt{2} - j + \sqrt{2} + j\sqrt{2} + 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{2} - 0{,}5j\sqrt{2} + 0{,}5j - 0{,}5\sqrt{2}$$
$$- 0{,}5j\sqrt{2} = 0{,}5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)j$$

$$G_4 = \sum_{k=0}^{7} g_n e^{j\pi n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}5 = 0$$

$$G_5 = G_{-3} = G_3^* = 0{,}5 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)j$$

$$G_6 = G_{-2} = G_2^* = 0$$

$$G_7 = G_{-1} = G_1^* = 0{,}5 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)j$$

Embora a DFT represente uma amostra da transformada de Fourier nas frequências $f_k = \frac{k}{NT_a}$, já que o sinal tem uma banda infinita, como vimos no item i, devido ao aliasing, haverá diferença entre a DFT e a transformada de Fourier.

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais

$$\int x\sin ax dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$
$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$
$$\int x^2\sin ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$
$$\int x^2\cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$
$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$
$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4 + x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & , |t| < \tau/2 \\ 1/2 & , |t| = \tau/2 \\ 0 & , |t| > \tau/2 \end{cases}$$
$$\Delta(t/\tau) = \mathrm{rect}(t/\tau)(1 - 2|t|/\tau)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$

$$c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t)x_n^* dt$$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)dt; a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t); b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)$$

$$C_0 = a_0; C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n}; D_{-n} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N}, \quad g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

Produto Interno e correlação

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$$

$$\rho = \frac{\langle x(t), y(t)\rangle}{\sqrt{E_x E_y}}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto / A. Judson Braga

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\mathrm{sgn}t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\,\tau\,|\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

$$\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\,2B\,|}\mathrm{rect}(f/2\,B)$$

$$\Delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\,a\,|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$