Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto

Prova 1 – 2015/2 (24/09/2015)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de três questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias são fornecidas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

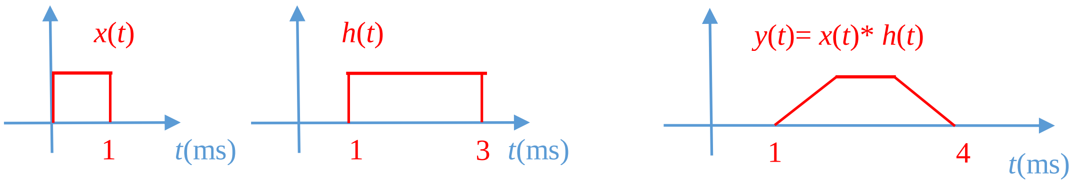
Questão 1

Em uma fábrica, um sensor em um equipamento comunica a ocorrência de falha enviando um pulso retangular de largura 1ms para uma central de monitoramento.

i) sabendo que uma falha ocorre no instante t=0, e que na transmissão o sinal passa por um canal, cuja resposta ao impulso é dada por $h(t) = \alpha \; \text{rect}\left(\frac{t-2\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}\right)$, esboce o sinal recebido na central de monitoramento.

ii) suponha que a central faça continuamente a correlação do sinal recebido com um pulso igual ao pulso enviado, e que identifique a ocorrência de falha se o coeficiente de correlação for maior que 0,5. Em que instante de tempo a central irá identificar a falha?

i)



ii)
no instante t é feita a correlação do sinal recebido com o sinal x(t) conhecido no período de 1ms anterior

$$\rho(\tau) = \frac{\int_{\tau-1}^{\tau} x(t-\tau+1)y(t)dt}{\sqrt{E_x}\sqrt{\int_{\tau-1}^{\tau} y^2(t)dt}}$$

Considerando que no intervalo de integração, $x(t)=A$, e que

$$y(t) = \begin{cases} B(t-1) & ,1 < t \leq 2 \\ B & ,2 < t \leq 3 \\ B(4-t) & ,3 < t \leq 4 \\ 0 & ,t \leq 1 \text{ ou } t > 4 \end{cases}$$

Para $\tau < 1 \Rightarrow \rho(\tau) = 0$
Para $1 \leq \tau < 2$, temos que

$$\rho(t) = \frac{\int_1^{\tau} AB(t-1)dt}{A\sqrt{\int_1^{\tau} B^2(t-1)^2 dt}} = \frac{\frac{1}{2}(\tau-1)^2}{\sqrt{\frac{1}{3}(\tau-1)^3}} = \sqrt{\frac{3}{4}(\tau-1)}$$

Queremos ainda que

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau = \frac{4}{3}\text{ms}$$

Questão 2

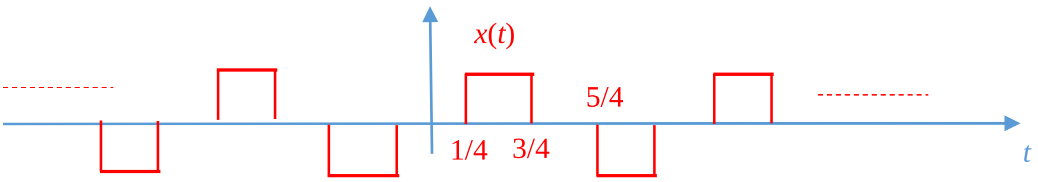
Dado um sinal periódico $g_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t-2k)$,
com $g(t) = rect(\,t - 1/4) - rect(t + 1/4)$

i) Esboce o sinal $g_p(t)$ e ache sua série de Fourier exponencial.

ii) Supondo que o sinal passe por um filtro ideal que elimine todas as componentes de frequência maiores que 2Hz, qual a porcentagem da potência que é conservada na saída do filtro?

iii) Considerando ainda o filtro do item (iii), qual a potência na saída do filtro se o sinal passar por um integrador antes de ser filtrado?

i)



pela série trigonométrica, como a função é ímpar

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)\sin(\pi n t)dt = 2\int_{1/4}^{3/4} \sin(\pi n t)dt$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\cos(\pi n t)\Big|_{1/4}^{3/4} = \frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & , n = 2,4,6,8,\ldots \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{n\pi} & , n = 1,7,9,\ldots \\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{n\pi} & , n = 3,5,11,13,\ldots \end{cases}$$

Ou seja

$$g_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_n e^{-j\pi/2}}{2}\left(e^{j\pi n t} - e^{-j\pi n t}\right)$$

ii)

O sinal original tem potência $P_g = \frac{1}{2}$

Na saída do filtro, teremos apenas os componentes de frequência até n=4, ou seja,

$$g_{fil}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin(\pi t) - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

Com potência $P_{fil} = \frac{1}{2}\frac{8}{\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{8}{9\pi^2} = 0{,}4503$, ou seja, 90% da potência do sinal original.

iii)
Se passarmos por um integrador, equivale a multiplicarmos cada elemento por $\frac{1}{(j2\pi n f_0)} = e^{-j\pi/2}\frac{1}{\pi n}$, ou seja

$$g_{int,fil}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{\sqrt{2}}{9\pi^2}\cos(3\pi t)$$

que terá potência

$$P_{int,fil} = \frac{1}{2}\frac{8}{\pi^4} + \frac{1}{2}\frac{8}{81\pi^4} = 0{,}0416$$

Questão 3

Com base nas propriedades da transformada de Fourier no final da prova, ache a transformada de Fourier e esboce graficamente a amplitude da transformada das funções:

i) $x_1(\mathrm{t}) = \sin(t)u(t)$

ii) $x_2(t) = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$, Dica: $\frac{d}{dt}\frac{1}{1+t^2} = x_2(t)$

i)

$$X_1(f) = F\{\sin(t)\} * F\{\mathrm{u}(t)\} = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right] * \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}\right]$$

$$X_1(f) = \frac{1}{4j}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{j2\pi\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)} - \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) - \frac{1}{j2\pi\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)}\right]$$

ii)

Pela reciprocidade e consultando a tabela, sabemos que

$$F\left\{\frac{1}{1 + 4\pi^2 t^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|f|}$$

Fazendo $t' = t/2\pi$, temos que

$$F\left\{\frac{1}{1 + t^2}\right\} = \pi e^{-|2\pi f|}$$

E, como $x_2(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{1+t^2}$

$$X_2(f) = j2\pi^2 f e^{-|2\pi f|}$$

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais

$$\int x\sin ax dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$
$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$
$$\int x^2\sin ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$
$$\int x^2\cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$
$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$
$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4 + x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & , |t| < \tau/2 \\ 1/2 & , |t| = \tau/2 \\ 0 & , |t| > \tau/2 \end{cases}$$
$$\Delta(t/\tau) = \mathrm{rect}(t/\tau)(1 - 2|t|/\tau)$$

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto

Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\mathrm{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$

$$c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t)x_n^* dt$$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)dt;\ a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t);\ b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)$$

$$C_0 = a_0;\ C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n};\ D_{-n} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N}, \quad g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

Produto Interno e correlação

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$$

$$\rho = \frac{\langle x(t), y(t)\rangle}{\sqrt{E_x E_y}}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Princípios de Comunicações

Profs. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$\delta(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	1
1	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\delta(f)$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$
$e^{-a\|t\|}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$u(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}\delta(f)+\dfrac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}t$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{j\pi f}$
$\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\mid\tau\mid \mathrm{sinc}(\pi f\tau)$
$\mathrm{sinc}(2\pi Bt)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{\mid 2B\mid}\mathrm{rect}(f/2B)$
$\Delta(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi f}{2}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\dfrac{n}{T}\right)$
$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$
$G(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$g(-f)$
$g(at)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$\dfrac{1}{\mid a\mid}G\left(\dfrac{f}{a}\right)$
$g(t-t_0)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f)e^{-j2\pi f t_0}$
$g(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G(f-f_0)$
$g_1(t)*g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G_1(f)G_2(f)$
$g_1(t)g_2(t)$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$G_1(f)*G_2(f)$
$\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$	$\overset{F}{\Leftrightarrow}$	$(j2\pi f)^n G(f)$

UnB

departamento de engenharia elétrica