Material de Apoio 2

Introdução à Amostragem e à Estimação Espectral Utilizando a Transformada Discreta de Fourier

1. Sinais Discretos no Tempo

Sinais discretos no tempo podem ser gerados a partir da amostragem de sinais contínuos no tempo, ou diretamente por algum processo discreto no tempo. Eles são representados por uma sequência de números, formalmente escrito como:

$$x = \{x[n]\}, -\infty < n < \infty, n \in Z \quad (1)$$

O sinal discreto no tempo pode surgir da amostragem periódica de um sinal analógico contínuo no tempo. Neste caso, o valor numérico da n-*ésima* amostra da sequência é igual ao valor do sinal analógico, $x_c(t)$, no instante nT_s; isto é:

$$x[n] = x_c(nT_s), -\infty < n < \infty \quad (2)$$

T_s é o período de amostragem, ou intervalo de amostragem, e o seu recíproco, $f_s = \frac{1}{T_s}$, é chamado de taxa de amostragem.

A Figura 1(a) mostra um sinal de voz de 32ms, e a Figura 1(b) mostra uma sequência de 256 amostras desse sinal, o que nos leva a um intervalo de amostragem de 125 μ s.

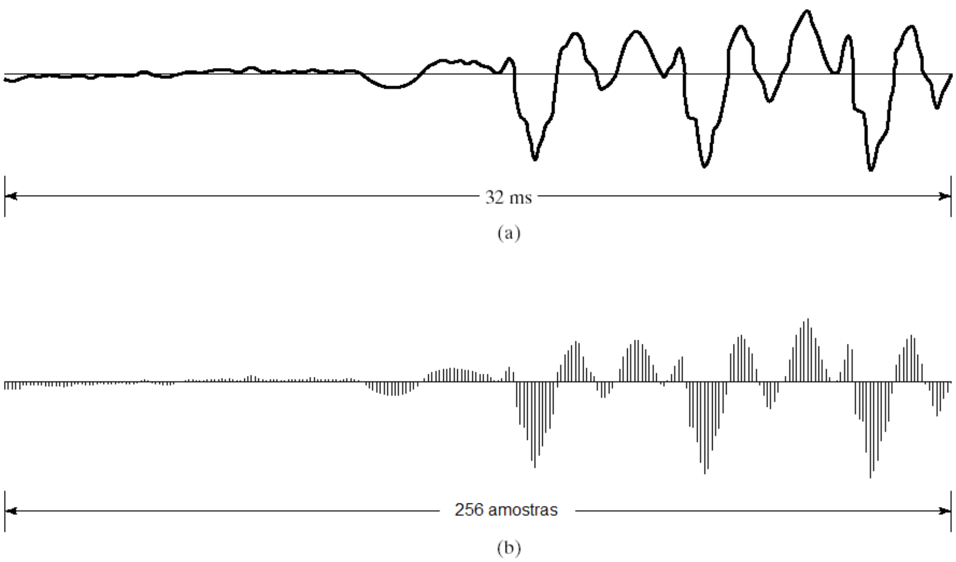


Figura 1 – (a) Segmento de um sinal de voz contínuo no tempo. (b) Sequência de amostras obtidas do sinal da parte (a).

2. O Teorema da Amostragem

Uma pergunta que naturalmente pode surgir é: a que taxa um sinal deve ser amostrado de forma que ele possa ser posteriormente reconstruído a partir de suas amostras? Esta é a pergunta fundamental da conversão analógico-digital e é respondida pelo teorema da amostragem (Nyquist, 1928; Shannon, 1949), enunciado como:

Seja $x_c(t)$ *um sinal limitado em banda de B Hz. Este sinal pode ser reconstruído a partir de suas amostras* $x[n] = x_c(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ *se:*

$$T_s \leq \frac{1}{2B} \tag{3}$$

B em geral é conhecido como frequência de Nyquist, e $\frac{1}{T_s} = 2B$ é conhecida como taxa de Nyquist.

Caso $f_s < 2B$, ocorrerá um fenômeno denominado *aliasing*, no qual as componentes de alta frequência que foram desprezadas introduzirão distorções nas frequências mais baixas, de forma que a correta reconstrução do sinal ou a estimação de seu espectro a partir de suas amostras não será possível.

Maiores detalhes quanto à demonstração desse teorema podem ser encontradas em [1] e [2].

3. Representação de Sinais Analógicos

De modo rigoroso, não é possível a análise de sinais analógicos utilizando o MATLAB. Entretanto, se amostrarmos o sinal $x_c(t)$ sobre um conjunto de valores suficientemente pequenos de incrementos temporais (*grid* temporal), então é possível obter uma representação satisfatória, em termos de resolução temporal, para o sinal analógico.

Seja Δt o valor de incremento do *grid* temporal, de tal forma que $\Delta t << T_s$, o intervalo de amostragem. Então a aproximação:

$$x_G(m) = x_c(m\Delta t) \tag{4}$$

pode ser utilizada para simular um sinal analógico. É importante lembrar que o intervalo de amostragem T_s não deve ser confundido com o intervalo do *grid* temporal, Δt, este último usado estritamente para a representação de um sinal analógico.

Para ilustrar os conceitos, considere o sinal $x_c(t) = e^{-1000|t|}$. Sua transformada de Fourier é, aplicando a definição, $X_c(\omega) = \dfrac{0.002}{1+\left(\dfrac{\omega}{1000}\right)^2}$.

Como $X_c(\omega) \approx 0$ para $\omega > 4000\pi$ rad/s (2000 Hz), podemos considerá-lo limitado em banda com B = 2000Hz. Para aproximá-lo como um sinal analógico, escolhemos $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} << \dfrac{1}{2(2000)} = 25 \cdot 10^{-5}$ s.

A Figura 1 mostra o código em MATLAB que implementa a aproximação de (4) para o sinal considerado.

```
% Aproximação do sinal analógico
dt = 5e-5;
t = -5e-3:dt:5e-3;
xc = exp(-1000*abs(t));

% Gráfico
plot(t,xc)
xlabel('Tempo t(s)');
ylabel('x_c (t)');
title('Aproximação de um sinal analógico');
```

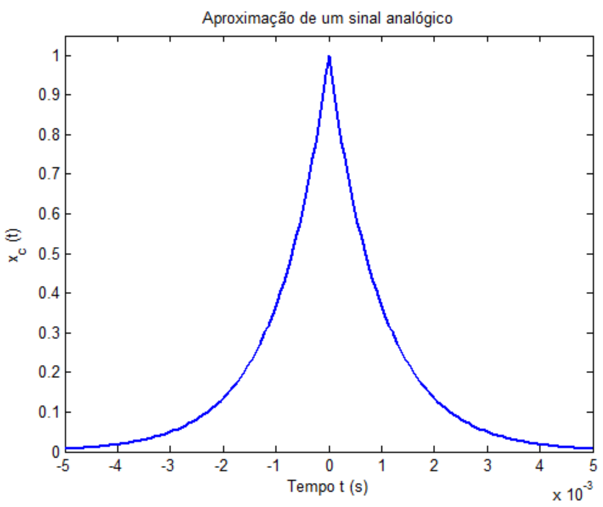


Figura 1 – Representação do Sinal Analógico.

4. Reconstrução de Sinais Amostrados

Do teorema da amostragem, segue que se um sinal analógico limitado em banda é amostrado a uma taxa igual ou superior à Taxa de Nyquist, ele pode ser reconstruído a partir de suas amostras.

Uma forma de reconstruir o sinal é por meio de uma análise no domínio da frequência. Se aplicarmos o sinal amostrado a um filtro passa-baixas ideal de frequência de corte de $f_s / 2$ (onde f_s é a taxa de amostragem), obteremos novamente o sinal $x_c(t)$.

No domínio do tempo, essa operação pode ser vista como uma convolução entre as amostras do sinal e a função *Sinc* (a demonstração mais detalhada pode ser encontrada em [2]):

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \mathrm{Sinc}\left[f_s (t - nT_s) \right] \tag{5}$$

em que:

$$\mathrm{Sinc}\ (b) = \frac{\mathrm{sen}(\pi b)}{\pi b} \tag{6}$$

Podemos interpretar a equação (5) como uma fórmula de interpolação para a reconstrução do sinal original a partir da sequência de valores das amostras, e a função Sinc($f_s\ t$) exerce o papel de função de interpolação. Cada amostra é multiplicada por uma versão atrasada da função de interpolação, e todas as formas de onda resultantes são somadas para obter $x_c(t)$.

Para $x[n]$ definido entre $n_1 \le n \le n_2$ e utilizando a aproximação obtida por (4), podemos estão reescrever a equação (5) como:

$$x_G(m\Delta t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \mathrm{Sinc}\left[f_s (m\Delta t - nT_s) \right] \tag{7}$$

Dessa forma, é possível obter o sinal com uma nova resolução temporal, dada por Δt, que seja mais adequada para analisar seu comportamento temporal (se necessário).

5. A Transformada Discreta de Fourier

A Transformada de Fourier é utilizada para representar um sinal contínuo no tempo como uma superposição de senóides complexas, ou seja, a representação de um sinal no domínio da frequência.

A transforma de Fourier de um sinal $x_c(t)$ contínuo no tempo é definida como:

$$X_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega t} dt \tag{8}$$

A transformada inversa de Fourier é dada por:

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{9}$$

Nas equações (8) e (9), ω é a variável utilizada para frequência angular, medida em radianos por segundos.

Ao tratar de sinais discretos no tempo, podemos representá-los utilizando a transformada de Fourier de tempo discreto. A transformada de Fourier de tempo discreto de uma sequência x[n] de tamanho infinito é definida como:

$$X(e^{j\omega'}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega' n} \tag{10}$$

e a transformada inversa de Fourier de tempo discreto é:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'}) e^{j\omega' n} d\omega' \tag{11}$$

A transformada de Fourier de tempo discreto é definida para todos os valores da variável de frequência normalizada (isto é, no contexto de transformadas discretas, ω' é a variável utilizada para representar a frequência normalizada, medida em radianos. Note que $\omega = \omega' f_s$). Uma das principais diferenças entre a transformada de Fourier de um sinal contínuo e de um sinal discreto é o fato de que a transformada de Fourier de um sinal discreto é uma função periódica da frequência. Isso é uma consequência da função exponencial complexa, periódica de período 2π. Sendo assim, $X(e^{j(\omega'+2\pi)}) = X(e^{j\omega'})$.

Podemos ainda mostrar que se x[n] é um sinal discreto no tempo obtido a partir da amostragem de um sinal analógico, de tal forma que $x[n] = x_c(nT_s), -\infty < n < \infty$, a relação entre as transformadas de Fourier dos sinais discreto e contínuo no tempo é [1]:

$$X(e^{j\omega'}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega'}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right) \tag{12}$$

Ou seja, $X(e^{j\omega'})$ é composta de cópias de $X_c(\omega)$ repetidas a intervalos de 2π.

Considere agora uma sequência finita de comprimento N amostras. A transformada de Fourier de tempo discreto para essa sequência é, utilizando a definição fornecida, dada por:

$$X(e^{j\omega'}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega' n} \tag{13}$$

$$X(e^{j\omega'}) = x[0] + x[1]e^{-j\omega'} + x[2]e^{-j2\omega'} + \ldots + x[N-1]e^{-j\omega'(N-1)} \quad (14)$$

Da equação (13), podemos constatar que x[n] possui N amostras não-nulas, contudo $X(e^{j\omega})$ possui infinitas frequências em virtude da transformada de Fourier de tempo discreto mapear de forma contínua o domínio das frequências. Como já é sabido, uma das principais vantagens dos sinais discretos no tempo é que eles podem ser processados e representados por computadores digitais. Entretanto, quando examinamos a definição da transformada de Fourier de tempo discreto, percebemos que tal caracterização depende de uma variável contínua. A transformada assim definida não serve para o processamento discreto em computadores digitais. Podemos então pensar em uma forma mais eficiente de representação, que utilize também componentes discretas no domínio da frequência, fazendo um mapeamento de uma variável discreta de tempo *n* que dependa de uma variável discreta na frequência *k*. Tal mapeamento é chamado de transformada discreta de Fourier (DFT – *Discrete Fourier Transform*)

Dada a periodicidade, podemos discretizar o intervalo [0;2π) em N frequências distintas.

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega_0}) &= x[0] + x[1]e^{-j\omega_0} + x[2]e^{-j2\omega_0} + \ldots + x[N-1]e^{-j\omega_0(N-1)} \\
X(e^{j\omega_1}) &= x[0] + x[1]e^{-j\omega_1} + x[2]e^{-j2\omega_1} + \ldots + x[N-1]e^{-j\omega_1(N-1)} \qquad (15) \\
&\vdots \\
X(e^{j\omega_{N-1}}) &= x[0] + x[1]e^{-j\omega_{N-1}} + x[2]e^{-j2\omega_{N-1}} + \ldots + x[N-1]e^{-j\omega_{N-1}(N-1)}
\end{aligned}$$

Escolhendo convenientemente as amostras uniformemente espaçadas no intervalo considerado, temos $\omega_k = \dfrac{2\pi}{N}k, k = 0,\ldots,N-1$, e podemos adotar a notação:

$$X[k] = X(e^{j\omega'})\Big|_{\omega'=\omega_k} = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \quad (16)$$

Explicitando cada um dos termos da equação (15), temos:

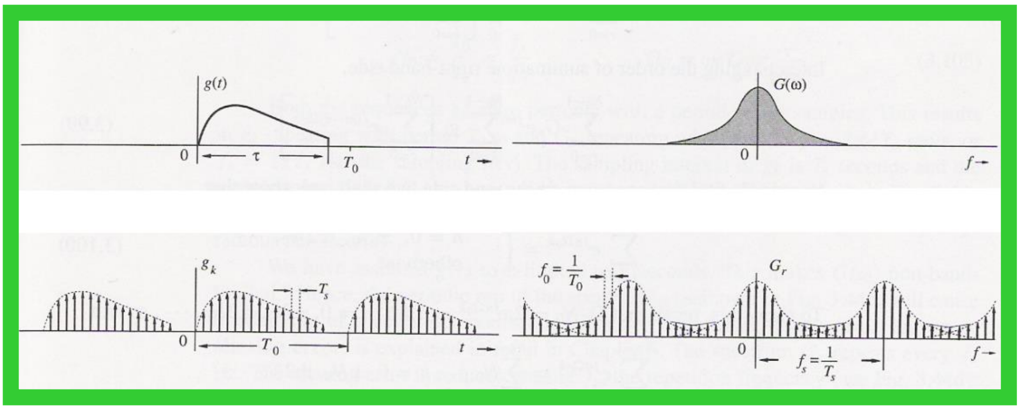
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (17)$$

De forma semelhante, é possível mostrar que a transformada discreta de Fourier inversa é dada por:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (18)$$

Como exemplo, considere um sinal $g(t)$ cuja transformada de Fourier é dada por $G(\omega)$. $s(t)$ é amostrado de 0 a T_0 com N amostras espaçadas de T_s resultando em $g[k]$ (para $k = 1,2,\ldots,N$) e

$G[r]$ (para $r = 1, 2, \dots, N$). $T_0 = \frac{1}{f_0}$ e $T_s = \frac{1}{f_s}$ são a chave pra encontrar as frequências discretas associadas às amostras de $G[r]$, em que f_0 é o passo entre as frequências e f_s é a frequência de amostragem e ao mesmo tempo o período do espectro discreto.



Resumindo a relação entre os parâmetros, temos:

$$g[k] = T_s g(kT_s) \qquad G[r] = G(r\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s$$

$$N = \frac{T_0}{T_s} = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \frac{f_s}{f_0}$$

O papel da DFT como ferramenta computacional é muito ampliado pela disponibilidade de algoritmos que são eficientes para avaliá-la de forma direta e inversa. Esses algoritmos são conhecidos coletivamente como transformadas rápidas de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform* e IFFT – *Inverse Fast Fourier Transform*). A FFT é usada para a transformada de Fourier discreta, enquanto que a IFFT é usada para a transformada inversa de Fourier discreta.

No Matlab, use as funções $G_r = \mathrm{fft}(g_k)$ e $g_k = \mathrm{ifft}(G_r)$. Apenas um período de G_r é apresentado como resultado da $\mathrm{fft}(g_k)$ com frequências variando entre 0 e f_s.

6.Referências Bibliográficas

[1] OPPENHEIM, A. V. SHAFER, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 2nd Edition.

[2] LATHI, B. P. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford University Press, 3rd Edition.

[3] LYONS, R. G. *Understanding Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 2nd Edition.

Material adaptado de apostilas do prof. João Leite, ENE/UnB - 2012.