Teoria das Comunicações

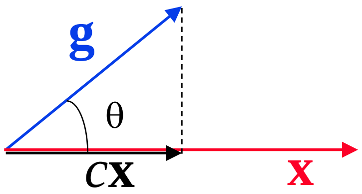
2.2 Série de Fourier

departamento de engenharia elétrica

Sinais e Vetores

Vetores

- Componente de um vetor **g** em **x**



é o vetor $c\mathbf{x}$, tal que c minimiza o vetor erro $\mathbf{e} = \mathbf{g} - c\mathbf{x}$

- Produto interno ou escalar

$$\mathbf{g}\cdot\mathbf{x} = \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{g}||\mathbf{x}|\cos\theta$$

- Comprimento (amplitude) do vetor

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$$

- $c = \dfrac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$

Vetores Ortogonais

- Se vetores são perpendiculares, então

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{g}||\mathbf{x}| \cos(\pi / 2) = 0$$

- Vetores são ortogonais se

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = 0$$

Sinais e Vetores

- Conceitos de vetores podem ser aplicados também a sinais
- Componente de $g(t)$ em $x(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$ é o sinal $cx(t)$, tal que c minimiza a energia da função erro $e(t) = g(t) - cx(t)$ neste intervalo
- O valor de c é: $$c = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt$$
- Para vetores o produto interno é: $$\mathbf{g}\cdot\mathbf{x} = c|\mathbf{x}|^2$$
- Podemos definir o produto interno entre $x(t)$ e $g(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\langle g, x\rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt$$

Sinais e Vetores

- $E_x = \langle x, x \rangle$

- para funções reais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$ se

$$\langle x, g \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) g(t) dt = 0$$

Sinais Complexos

- Para funções complexas $g(t)$ e $x(t)$

$$\langle x, g\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)g^*(t)dt$$

$$\langle g, x\rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t)dt = \langle x, g\rangle^*$$

- $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$ se

$$\langle x, g\rangle = \langle g, x\rangle = 0$$

Energia da Soma de Sinais Ortogonais

- se dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1,t_2]$,
  e se $z(t) = x(t) + y(t)$

- Então $E_z = E_x + E_y$

Correlação

- Coeficiente de correlação indica a similaridade entre dois sinais

- Para vetores:

$$c_n = \cos\theta = \frac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{g}||\mathbf{x}|}$$

$$-1 \le c_n \le 1$$

- Para sinais:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{E_g E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x^*(t)dt$$

Função de correlação

- Correlação cruzada

$$\psi_{gx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)x(t+\tau)dt$$

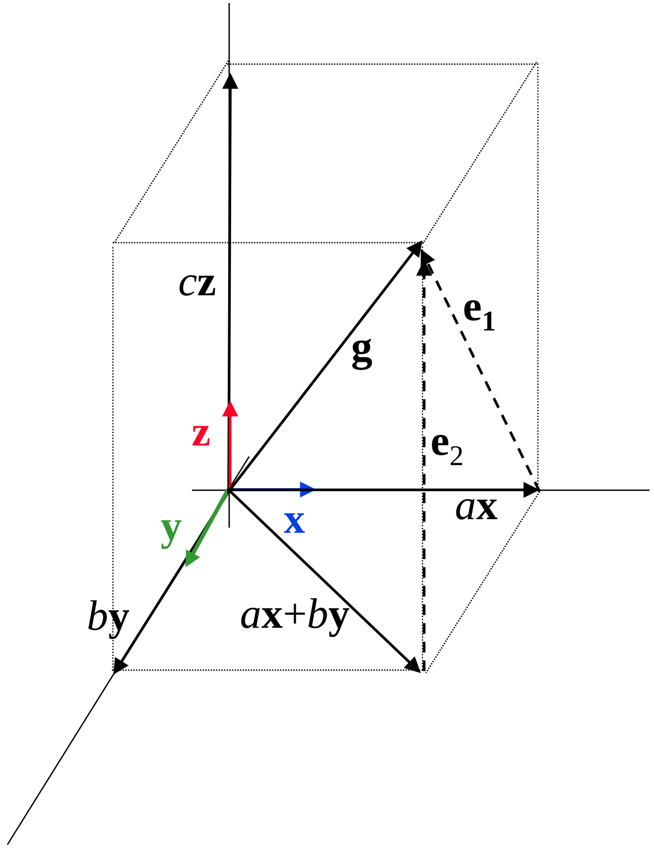
- Autocorrelação

$$\psi_{g}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)g(t+\tau)dt$$

Representação de Sinais por Conjunto de Sinais Ortogonais

Espaço Vetorial Ortogonal

- Ex: espaço Cartesiano tridimensional
  - $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são ortogonais
  - $\mathbf{g}$ é um vetor qualquer



$$\mathbf{g} = a\mathbf{x} + \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{g} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + \mathbf{e}_2 \quad , |\mathbf{e}_2| \leq |\mathbf{e}_1|$$

$$\boxed{\mathbf{g} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}}$$

Espaço Vetorial Ortogonal

- **x**, **y** e **z** representam um conjunto completo de vetores ortogonais no espaço tridimensional
- Neste espaço não há nenhum vetor ortogonal a **x**, **y** e **z**
- Todo vetor neste espaço pode ser representado sem erro como a soma das projeções deste vetor em **x**, **y** e **z**
- Esta escolha de vetores base não é única
- Se |**x**|=|**y**|=|**z**|=1 este é um conjunto ortonormal

Espaço Ortogonal de Sinais

- Temos um conjunto de sinais ortogonais em $[t_1, t_2]$
  - $x_1(t), x_2(t), \ldots.. x_N(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} x_n(t) x_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ E_n & , m = n \end{cases}$$

  - Se $E_n = 1, \forall n$, então temos um conjunto ortonormal
- Um sinal $g(t)$ pode ser representado como

$$g(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) + e(t)$$

$$\text{com } c_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} g(t) x_n^*(t) dt = \frac{1}{E_n} \langle g, x_n \rangle$$

- Se $E_e = 0$ para todos sinais $g(t)$, o conjunto $x_1(t), x_2(t), \ldots.. x_N(t)$

é um conjunto completo ou conjunto de funções base

Espaço Ortogonal de Sinais

- Série generalizada de Fourier:

$$g(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \qquad\qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

- $\{x_n(t)\}$ é um conjunto de sinais ou funções base ortogonais

Teorema de Parseval

$$g(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \qquad\qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$\Downarrow$$

$$E_g = c_1^2 E_1 + c_2^2 E_2 + \cdots + c_n^2 E_n + \cdots$$
$$= \sum_n c_n^2 E_n$$

Série de Fourier

departamento de engenharia elétrica

Série Trigonométrica de Fourier

- Para qualquer intervalo $[t_1, t_1 + T_0]$ temos o conjunto trigonométrico de sinais

$$\{1, \cos 2\pi f_0 t, \sin 2\pi f_0 t, \cos 4\pi f_0 t, \sin 4\pi f_0 t, \cdots, \cos 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t, \cdots\}$$

onde $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$

- Este é um conjunto completo e ortogonal neste intervalo

Série Trigonométrica de Fourier

- Qualquer sinal $[t_1, t_1+T_0]$ no intervalo pode ser representado por uma série trigonométrica de Fourier

$$g(t) = a_0 + a_1\cos(2\pi f_0 t) + b_1\sin(2\pi f_0 t) + a_2\cos(4\pi f_0 t) + b_2\sin(4\pi f_0 t) + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(2\pi n f_0 t) \qquad t_1 \le t \le t_1 + T_0$$

- onde

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} g(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt$$

Série Trigonométrica de Fourier Compacta

- Podemos combinar os termos seno e cosseno de mesma freqüência como:

$$a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

onde

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- A série fica:

$$g(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \qquad , t_1 \le t \le t_1 + T_0$$

Periodicidade da Série de Fourier

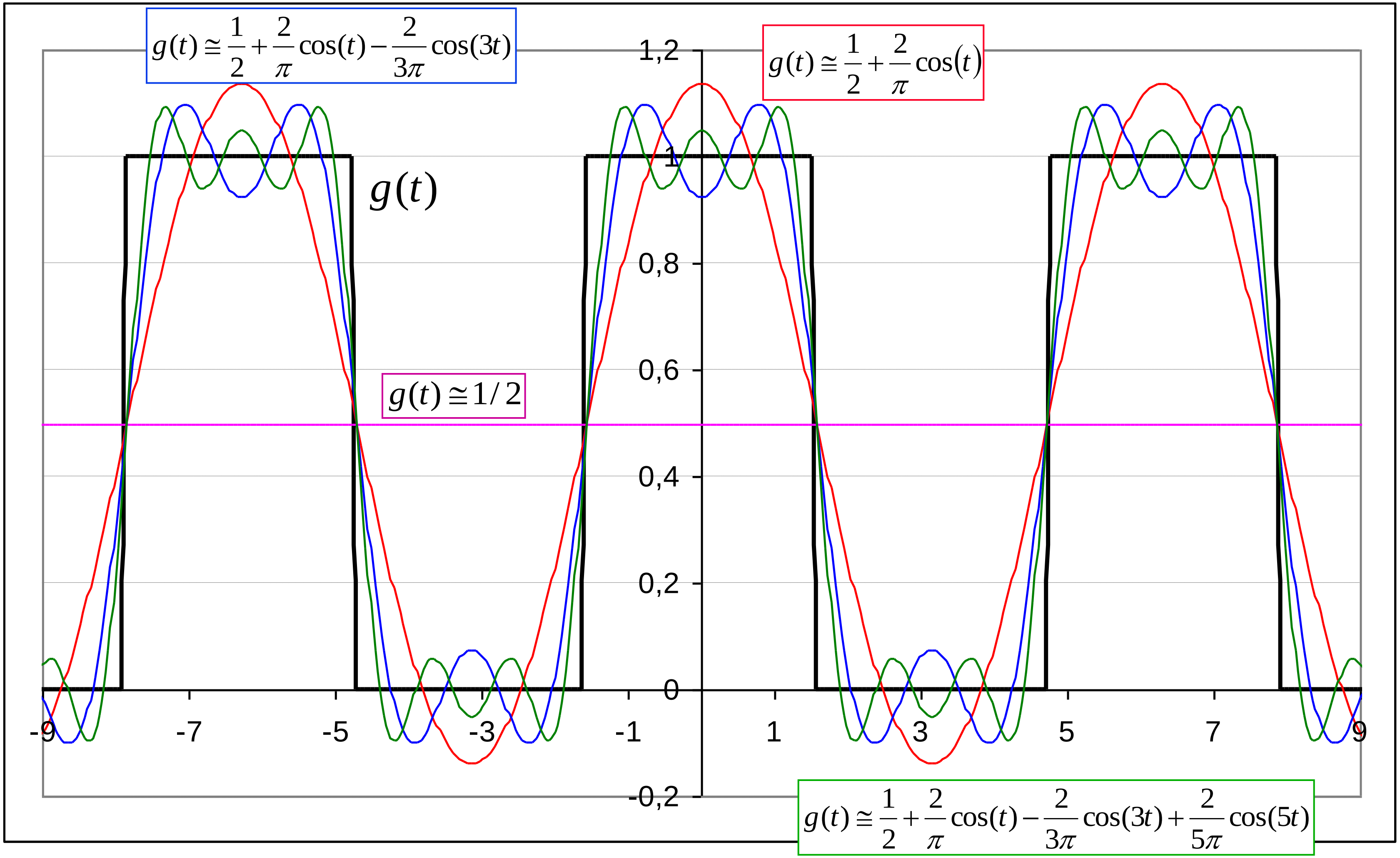
- considerando

$$\varphi(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \qquad , t \in \Re$$

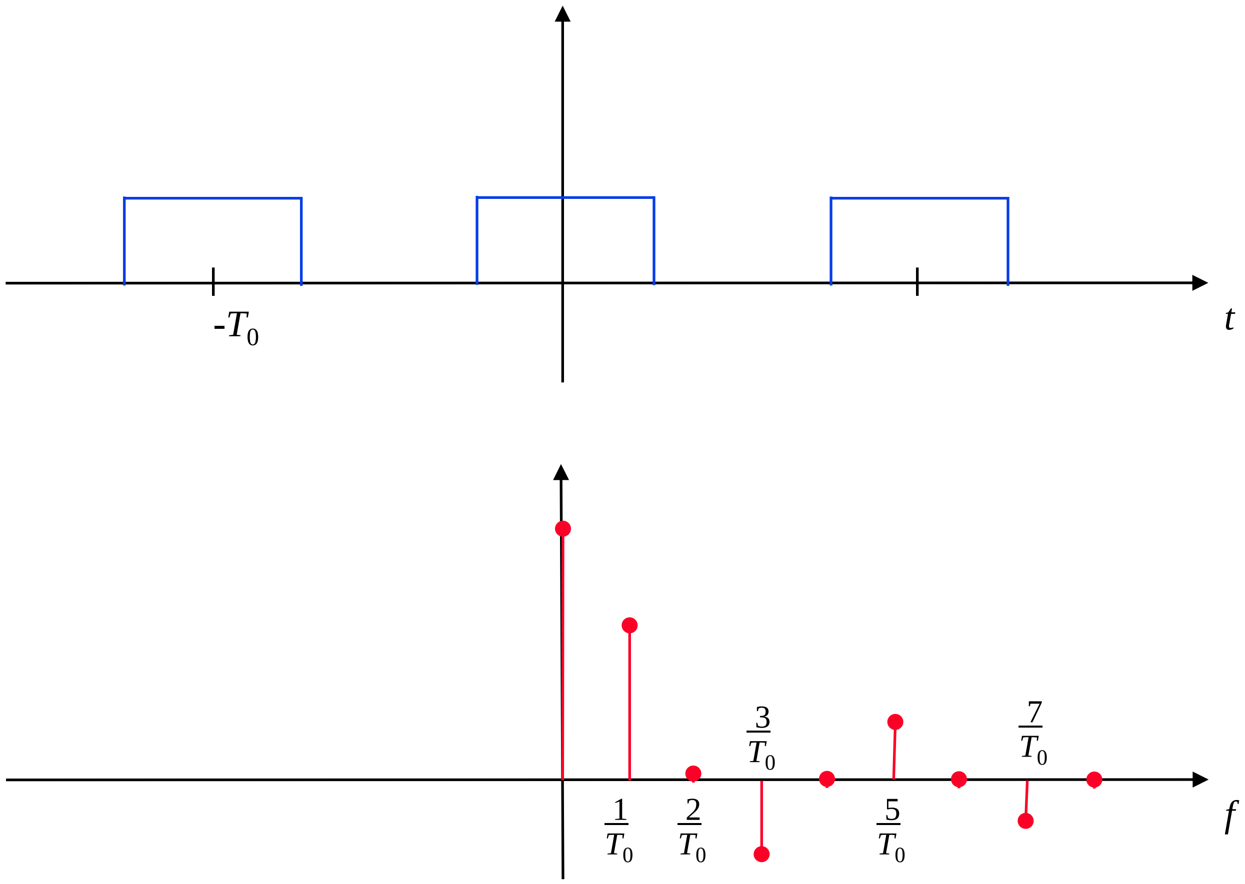
- Temos que

$$\varphi(t + T_0) = \varphi(t)$$

Série Trigonométrica de Fourier



Espectro de Fourier



Condições de Dirichlet

- Condições para existência da série de Fourier
  - $\int_{t_1}^{t_2} |g(t)| dt < \infty$
  - $g(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades em $[t_1, t_1+T_0]$

departamento de engenharia elétrica

Série Exponencial de Fourier

- O conjunto de funções

$$\left\{1, e^{j2\pi f_0 t}, e^{-j2\pi f_0 t}, e^{j4\pi f_0 t}, e^{-j4\pi f_0 t}, \cdots\right\} \qquad , f_0 = \frac{1}{T_0}$$

é um conjunto completo de funções ortogonais em $[t_1, t_1 + T_0]$

- Toda função $g(t)$ pode ser representada como

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

onde

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Série Exponencial de Fourier

- Toda função $g(t)$ pode ser representada como

$$g(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n e^{j2\pi n f_0 t} + D_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} \right)$$

onde

$$D_0 = C_0$$

$$D_n = \frac{1}{2} C_n e^{j\theta_n}$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2} C_n e^{-j\theta_n}$$

Teorema de Parseval

$$g(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \quad \Rightarrow P_g = C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

$$g(t) = D_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \Rightarrow \quad P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| D_n \right|^2$$