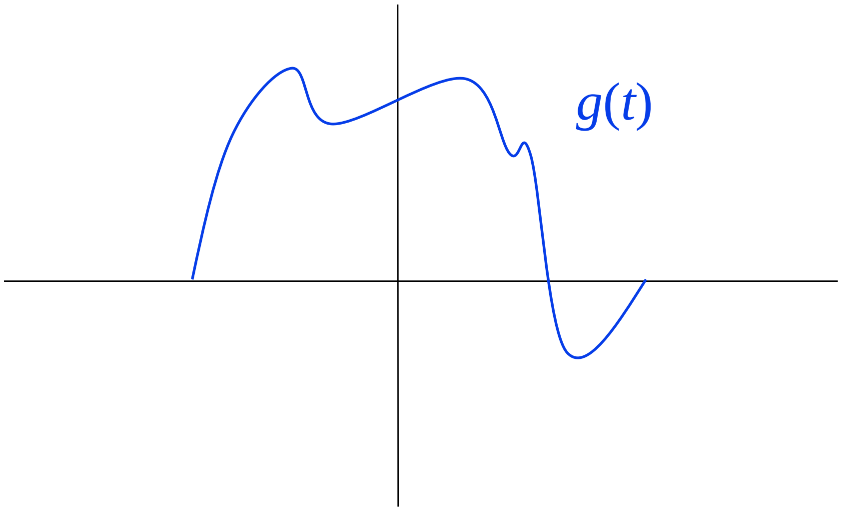
# Teoria das Comunicações

## 2.3 Transformada de Fourier

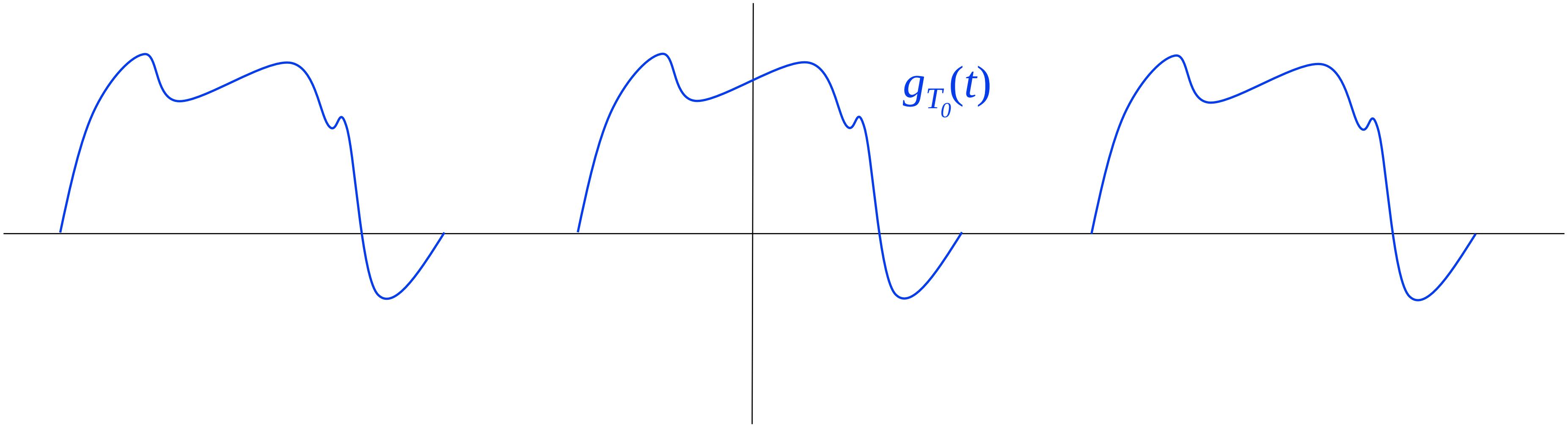
# Transformada de Fourier (1)

- Como representar um sinal não periódico no domínio da freqüência?



# Transformada de Fourier (2)

- Criamos um sinal periódico $g_{T_0}(t)$ com período $T_0$




$$g(t) = \lim_{T_0 \to \infty} g_{T_0}(t)$$

# Transformada de Fourier (3)

- Sinal periódico $g_{T_0}(t)$ pode ser representado por uma série exponencial de Fourier

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad , f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

# Transformada de Fourier (4)

- definimos

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\Downarrow$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} G(nf_0)$$

# Transformada de Fourier (5)

- Podemos reescrever

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(nf_0)}{T_0} e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$\text{com } T_0 \to \infty \quad , f_0 \to 0$$

$$\text{definimos } \Delta f = \frac{1}{T_0}$$

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f)\Delta f \, e^{j2\pi n f_0 t}$$

# Transformada de Fourier (6)

- No limite $\Delta f \to 0$ temos a integral

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f)\Delta f \, e^{j2\pi n f_0 t} \xrightarrow[T_0 \to \infty]{} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

Integral de Fourier

# Transformada de Fourier (7)

$$G(f) = \mathcal{F}\left[g(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformada de Fourier

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[G(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} dt$$

$$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$

- $G(f)$ é a densidade espectral de $g(t)$

# Linearidade da Transformada de Fourier

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

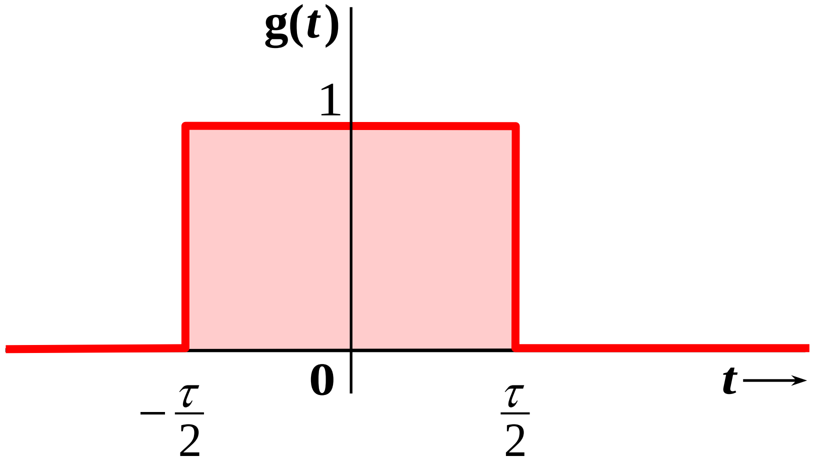
$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}\left[z(t)\right] = a\mathcal{F}\left[x(t)\right] + b\mathcal{F}\left[y(t)\right]$$

# Transformada de Fourier de algumas funções (1)

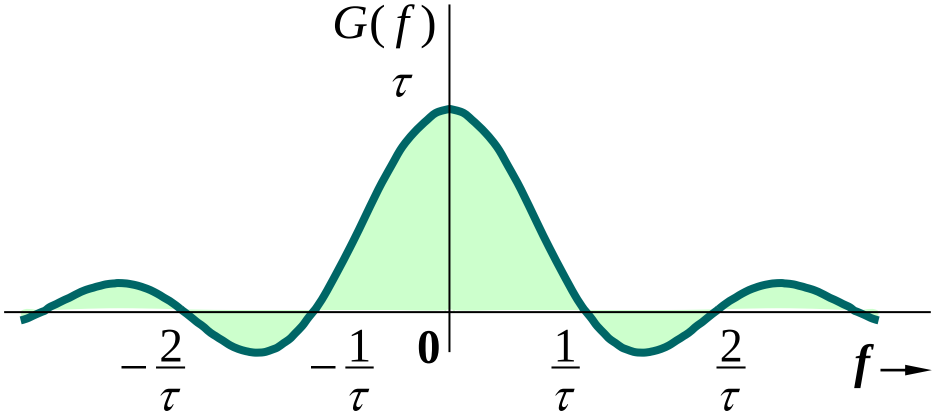
- Pulso retangular (função porta)

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}0 & ,|t|>\tau/2\\ 1/2 & ,|t|=\tau/2\\ 1 & ,|t|<\tau/2\end{cases}$$




$$\mathcal{F}\left[\mathrm{rect}\left(t/\tau\right)\right]=\tau\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

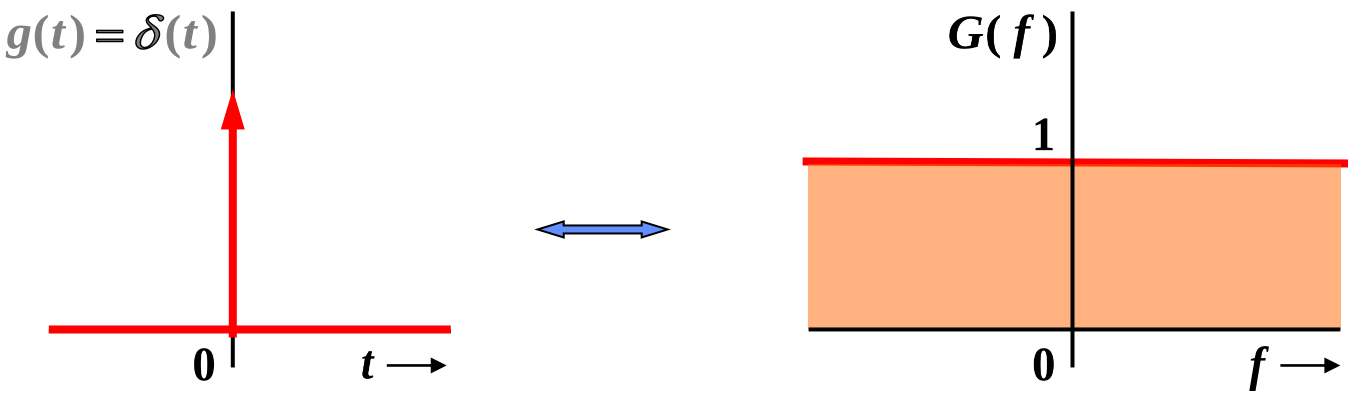
$$\text{onde } \mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}$$



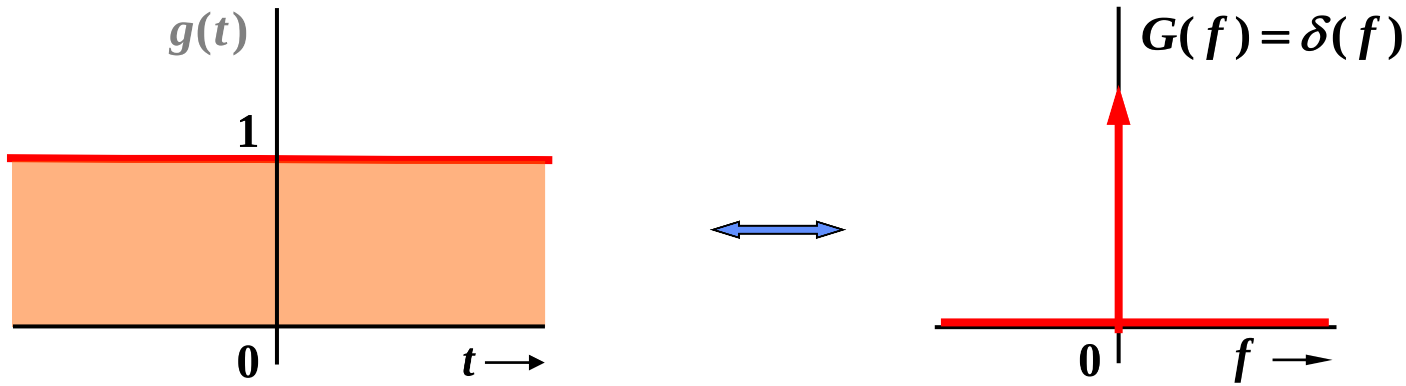
# Transformada de Fourier de algumas funções (2)

- Impulso (delta de Dirac)

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right]=1$$




$$\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(f)\right]=1$$



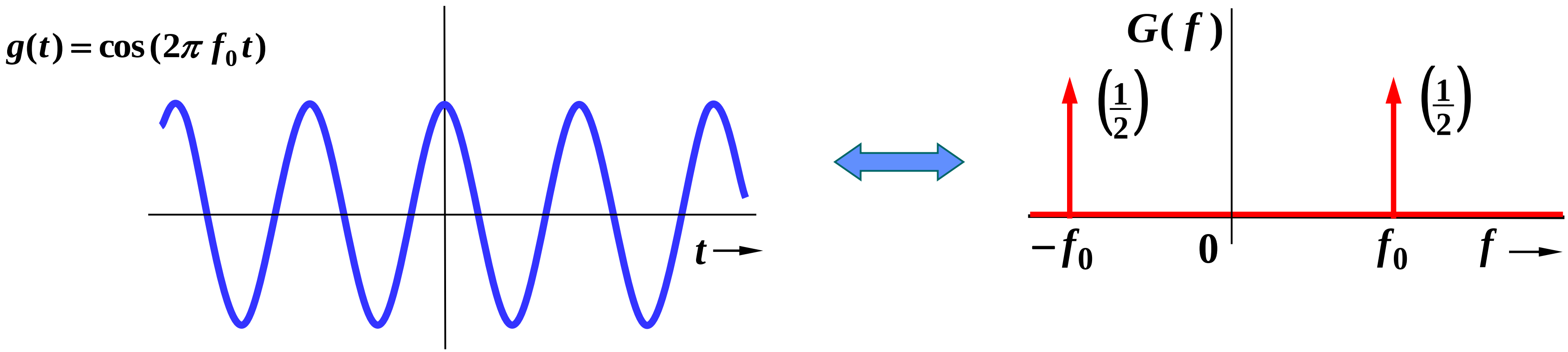
# Transformada de Fourier de algumas funções (3)

- Exponencial periódica

$$\mathcal{F}\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

- cosseno

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi_0 ft)] = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$




- seno

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi_0 ft)] = \frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

# Transformada de Fourier de algumas funções (4)

- Funçao signum (sinal)

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} -1 & ,t < 0 \\ 0 & ,t = 0 \\ 1 & ,t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sign}(t)] = \frac{1}{j\pi f}$$

# Transformada de Fourier de algumas funções (5)

- Funçao degrau

$$u(t)=\begin{cases}1 & ,t\geq 0\\ 0 & ,t<0\end{cases}$$

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{2}\left[\delta(f)+\frac{1}{j\pi f}\right]$$

# Transformada de Fourier de algumas funções (5)

- Funçao degrau

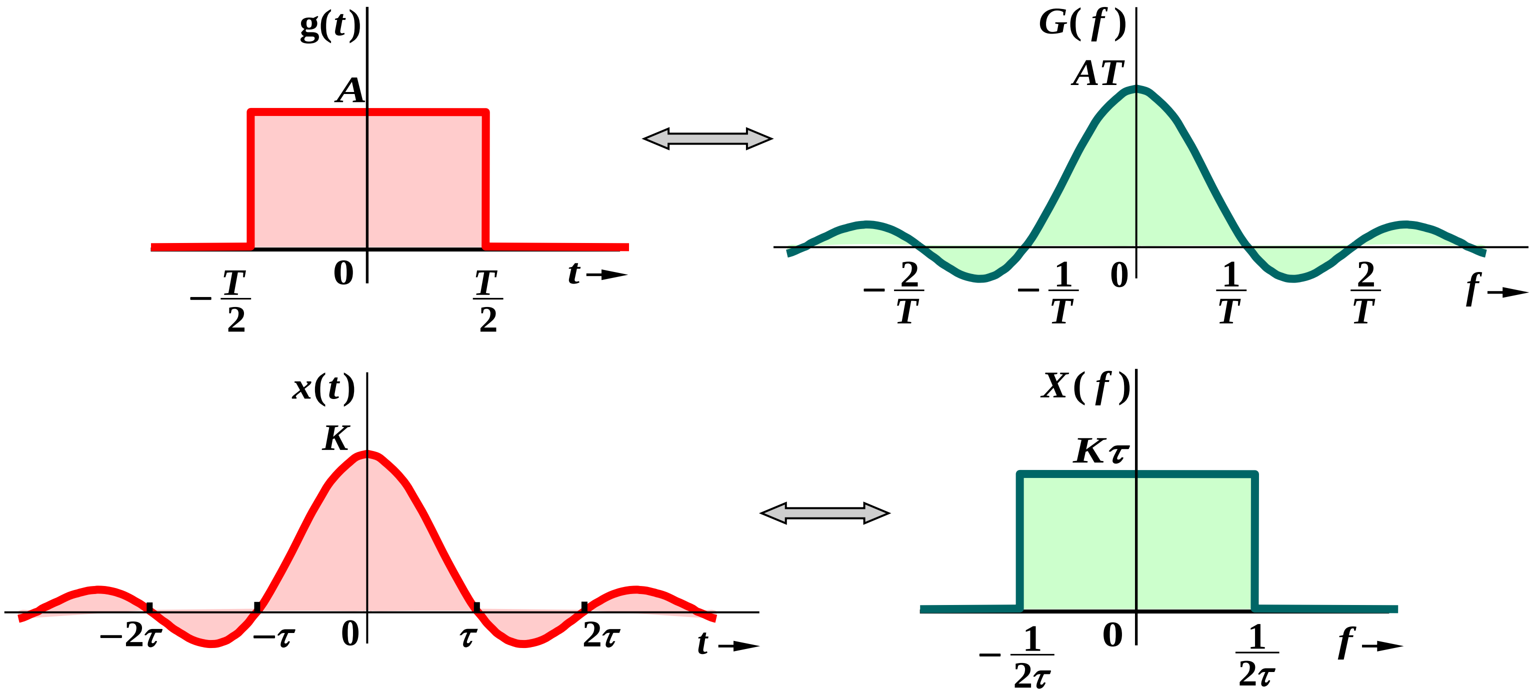
$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t \geq 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\left[\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right]$$

# Propriedades da Transformada De Fourier (1)

- Simetria

$$g(t) \leftrightarrow G(f)$$
$$G(t) \leftrightarrow g(-f)$$



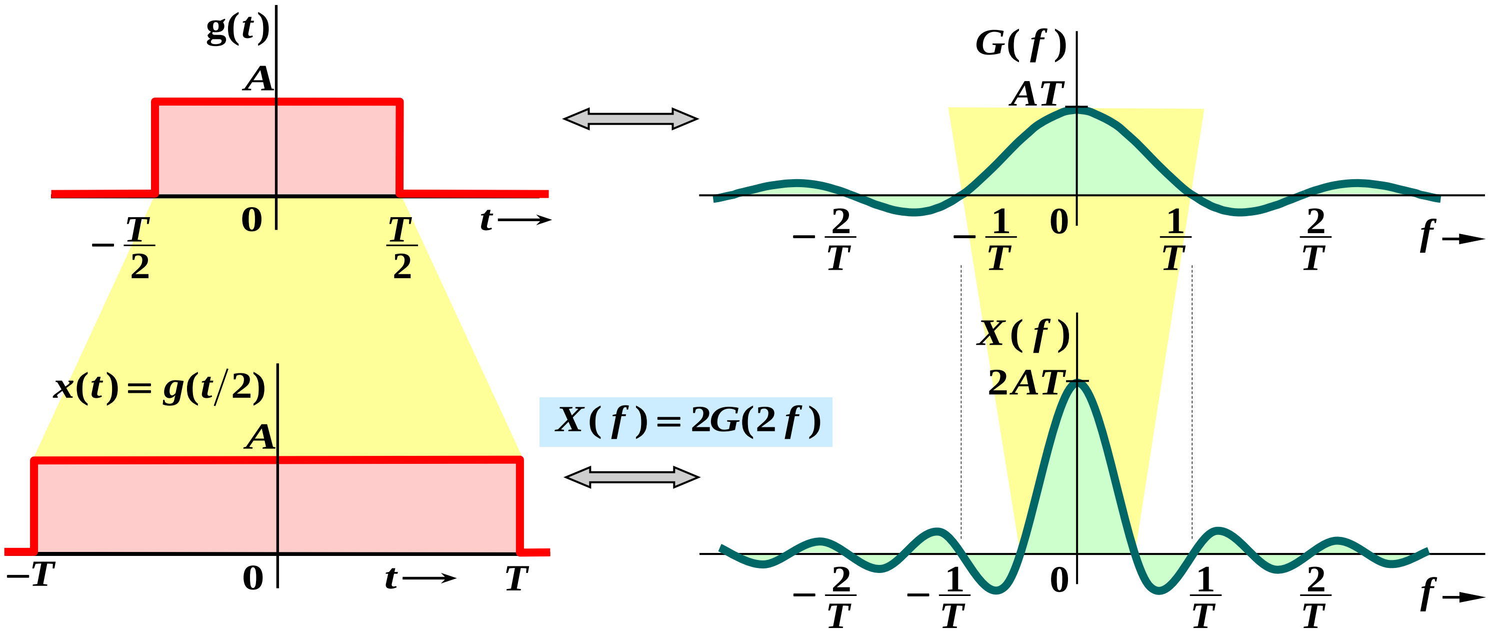
# Propriedades da Transformada De Fourier (2)

- Escalonamento (Expansão/Compressão)

$$g(t) \quad \leftrightarrow \quad G(f)$$

$$g(at) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

  - Expansão/compressão no tempo = compressão/expansão na freqüência



# Propriedades da Transformada De Fourier (3)

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} g(t) &\leftrightarrow G(f) \\ g(t-t_0) &\leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} G(f) \end{aligned}$$

- Deslocamento na Freqüência

$$\begin{aligned} g(t) &\leftrightarrow G(f) \\ e^{j2\pi f_0 t} g(t) &\leftrightarrow G(f-f_0) \end{aligned}$$

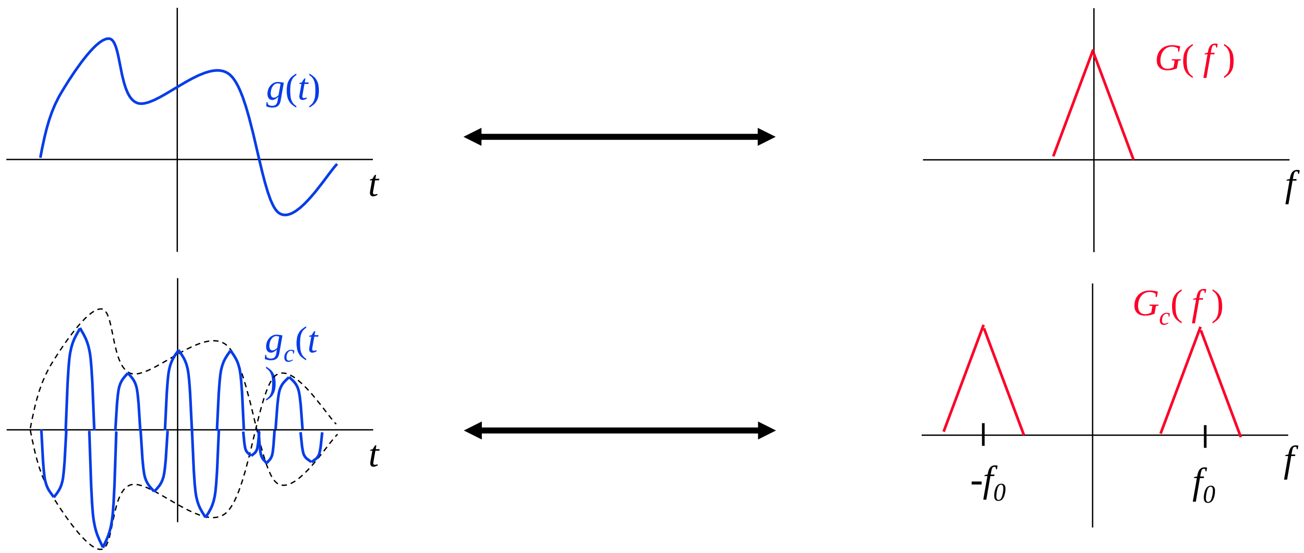
# Deslocamento na freqüência (Exemplo)

- Modulação por cosseno

$$g_c(t) = g(t)\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} g(t)\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$G_c(f) = \frac{1}{2}\left[G(f - f_0) + G(f + f_0)\right]$$



# Propriedades da Transformada De Fourier (3)

- Convolução $g_1(t)*g_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau$

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &\leftrightarrow G_1(f)\\
g_2(t) &\leftrightarrow G_2(f)\\
g_1(t)*g_2(t) &\leftrightarrow G_1(f)G_2(f)\\
g_1(t)g_2(t) &\leftrightarrow G_1(f)*G_2(f)
\end{aligned}
$$

# Propriedades da Transformada De Fourier (4)

- Diferenciação no tempo

$$g(t) \quad \leftrightarrow \quad G(f)$$

$$\frac{\partial^n g(t)}{\partial t^n} \quad \leftrightarrow \quad \left(j2\pi f\right)^n G(f)$$

- Integração no tempo

$$g(t) \quad \leftrightarrow \quad G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau \quad \leftrightarrow \quad \frac{G(0)\delta(f)}{2} + \frac{G(f)}{j2\pi f}$$

# Propriedades da Transformada De Fourier (5)

- Função Conjugada

$$
\begin{aligned}
g(t) &\leftrightarrow G(f) \\
g^*(t) &\leftrightarrow G^*(-f)
\end{aligned}
$$

# Propriedades da Transformada De Fourier (6)

- Área de $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = G(0)$$

- Área de $G(f)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f)df = g(0)$$