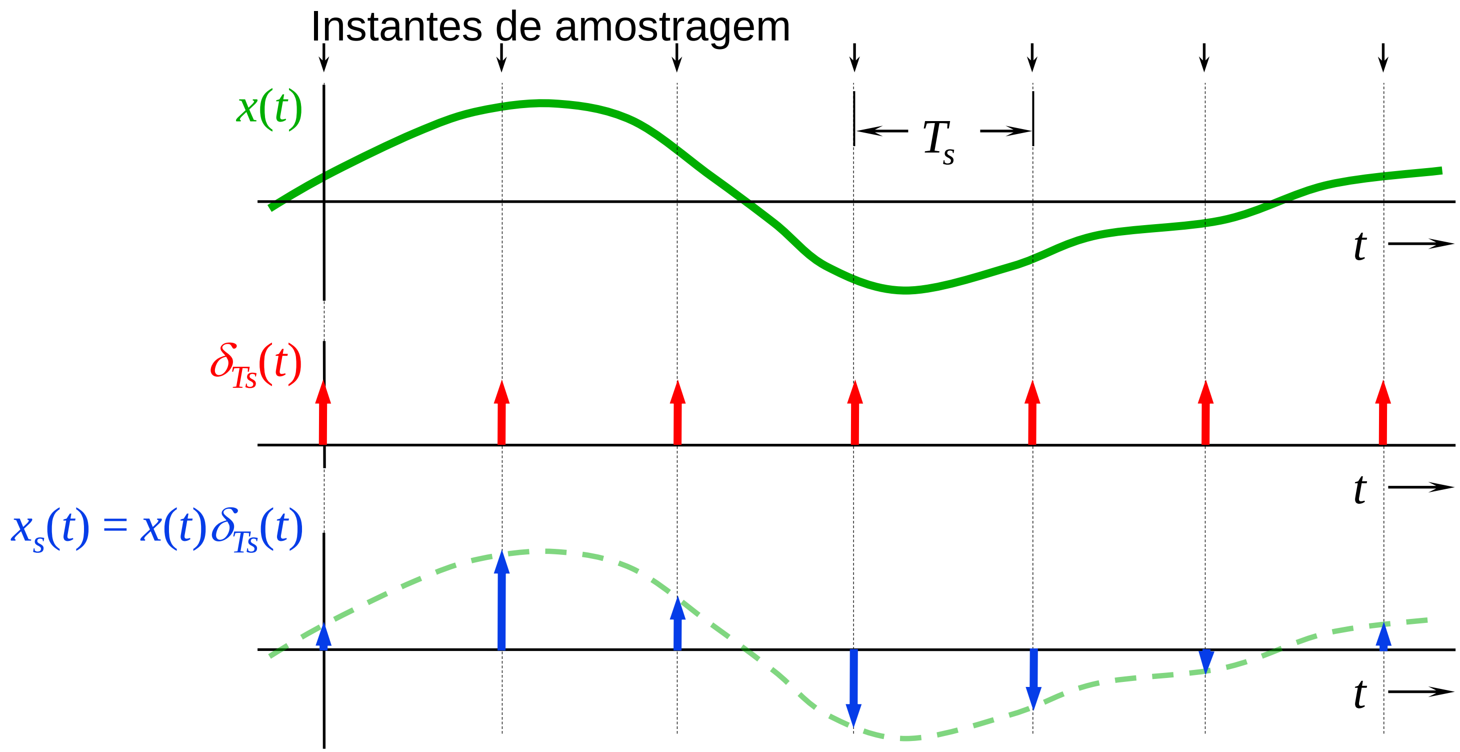
Teoria das Comunicações

2.5 Teorema da Amostragem e Transformada de Fourier Discreta

departamento de engenharia elétrica

TEOREMA DA AMOSTRAGEM

Amostragem de Sinais

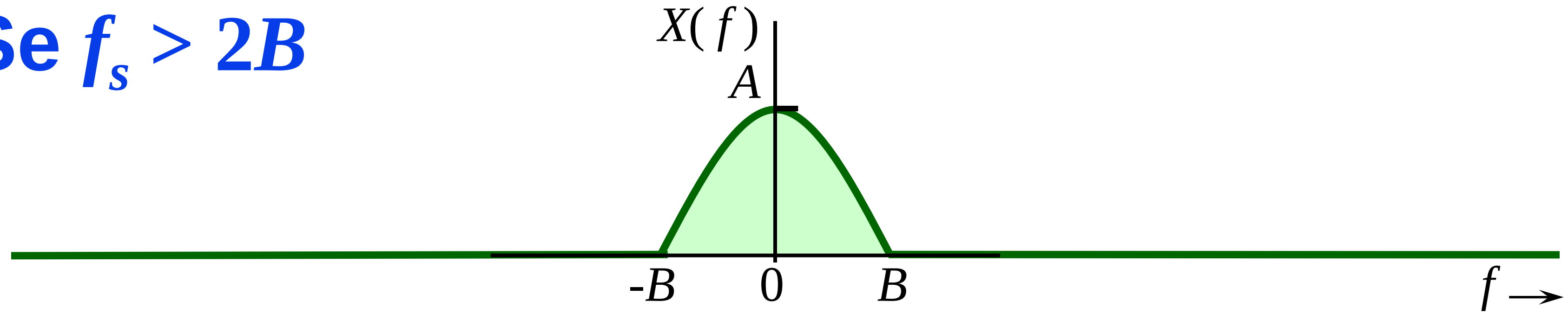


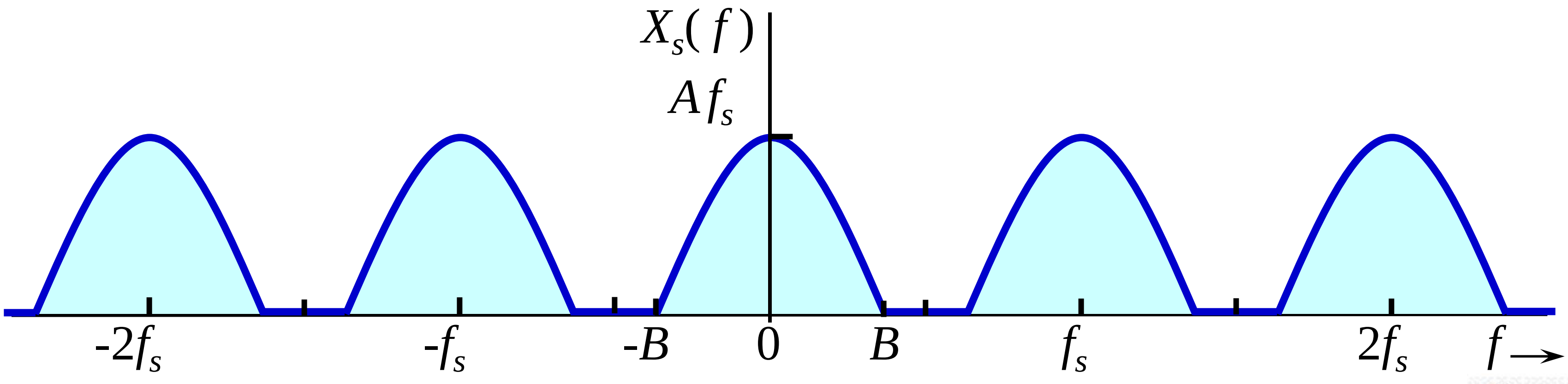
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Espectro de Sinal Amostrado

$$X_s(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

Se $f_s > 2B$

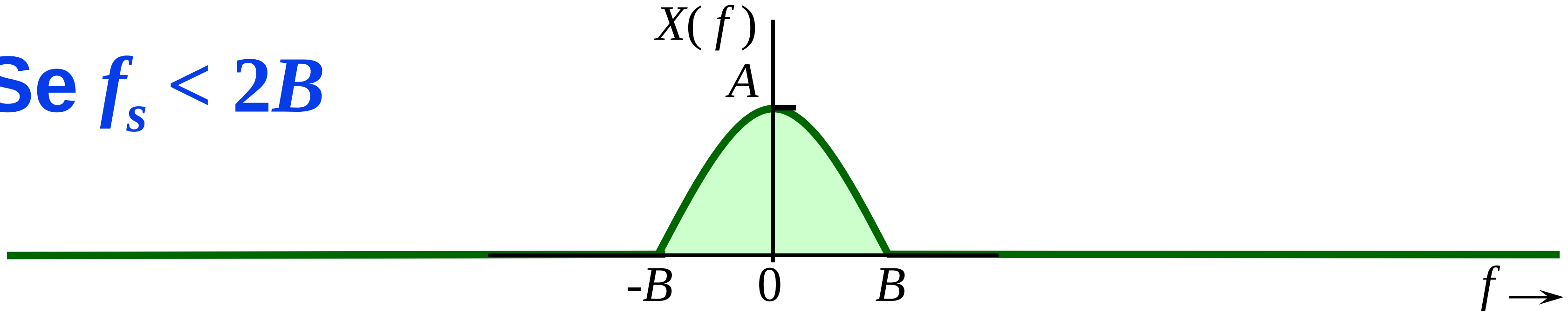


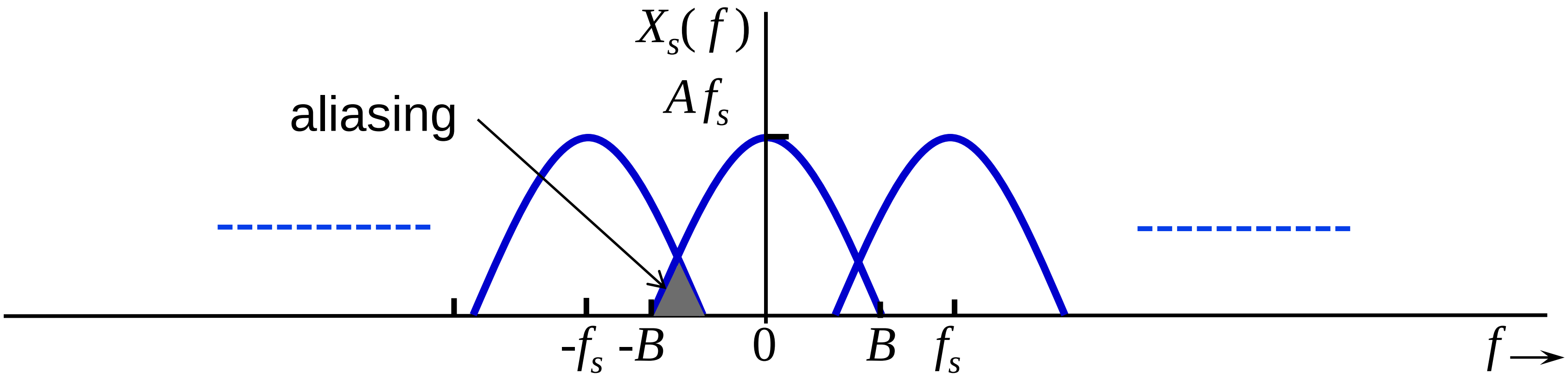


Espectro de Sinal Amostrado

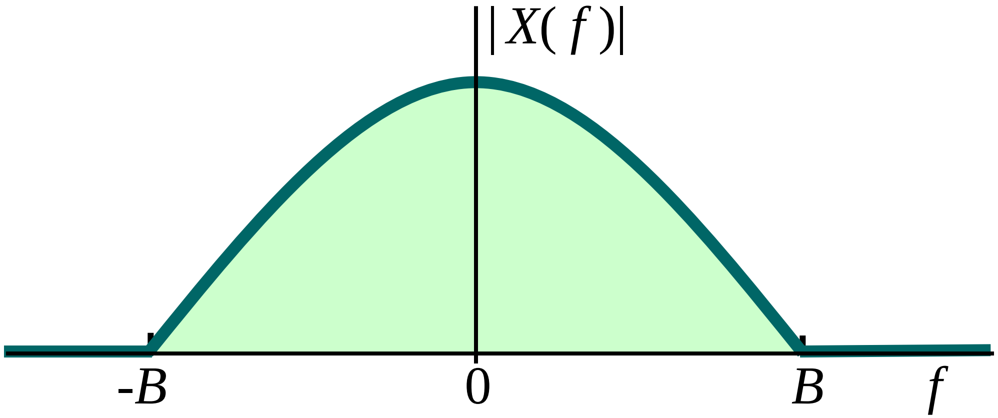
$$X_s(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

Se $f_s < 2B$



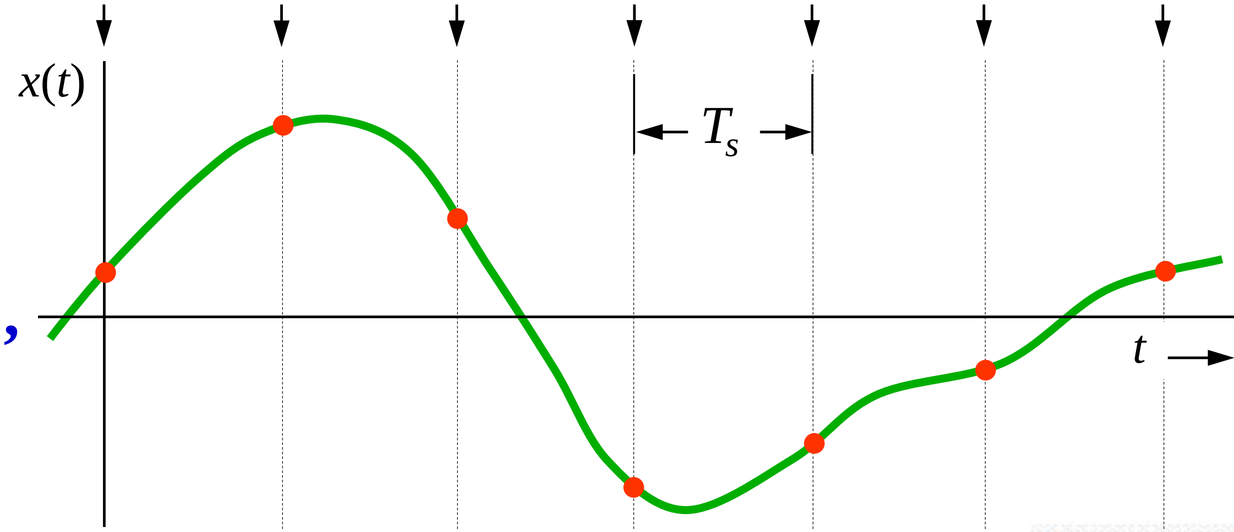


Teorema da Amostragem



$$T_s \leq \frac{1}{2B} \quad \Leftrightarrow \quad f_s \geq 2B$$

Para reconstruir $x(t)$, sem qualquer erro, são suficientes as amostras $x(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ desde que $T_s \leq \dfrac{1}{2B}$.



Definições

Taxa (de amostragem) de Nyquist: taxa de amostragem mínima teórica para um sinal de banda básica limitado frequencialmente a B hertz, isto é,

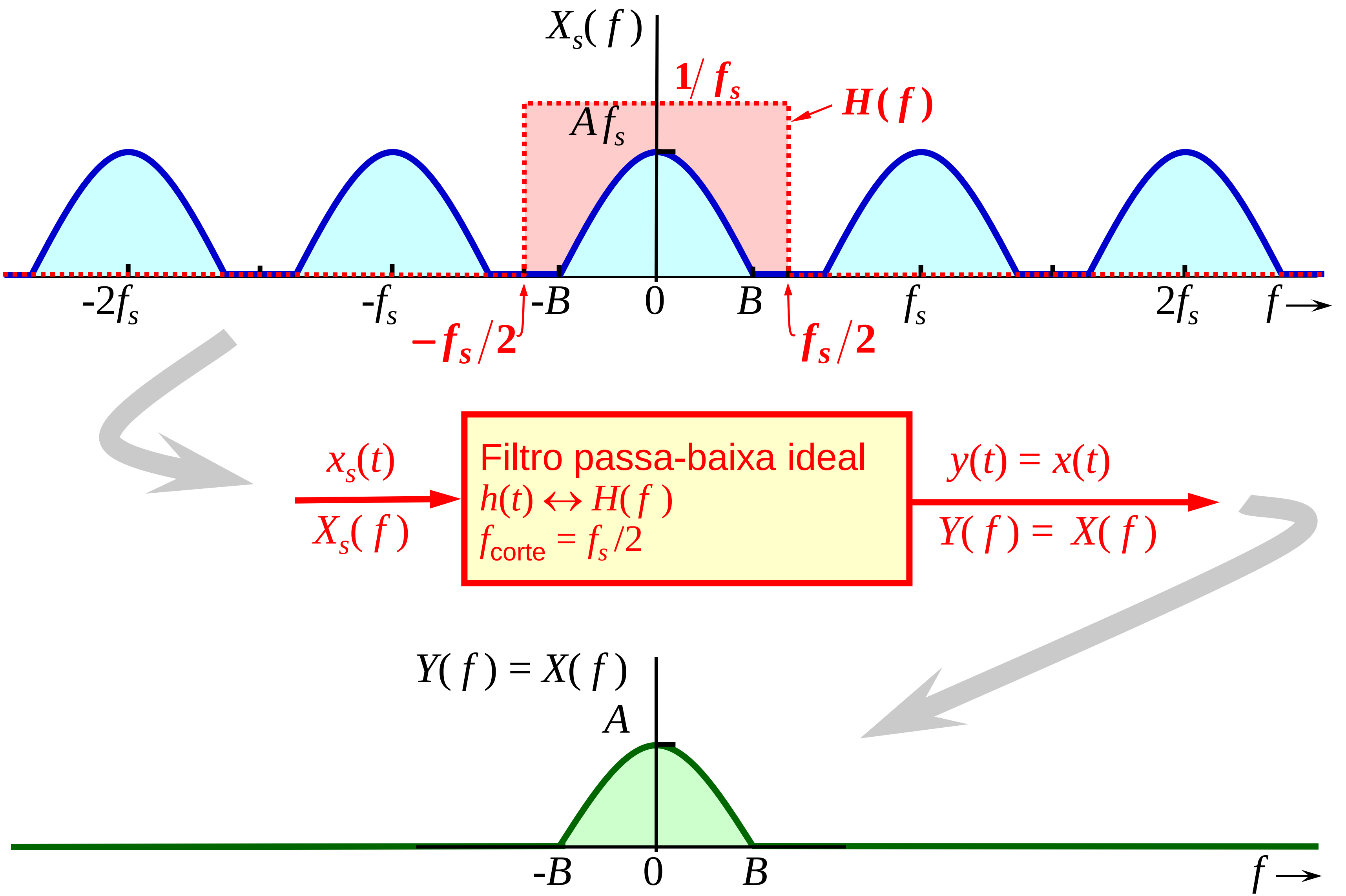
$$f_{s,\text{Nyquist}} = 2\,B$$

Frequência de Nyquist: Dado um amostrador que opera com a taxa de amostragem f_s, denomina-se frequência de Nyquist a

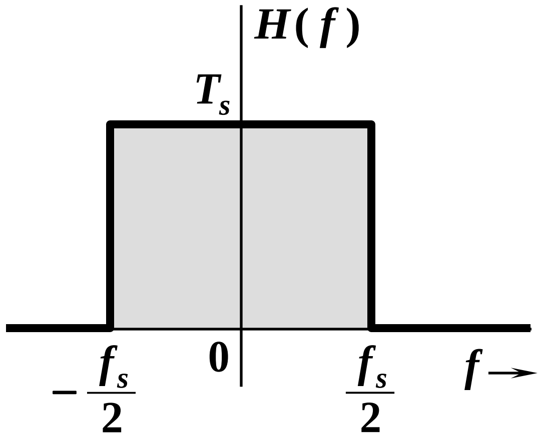
$$f_{\text{Nyquist}} = f_s/2,$$

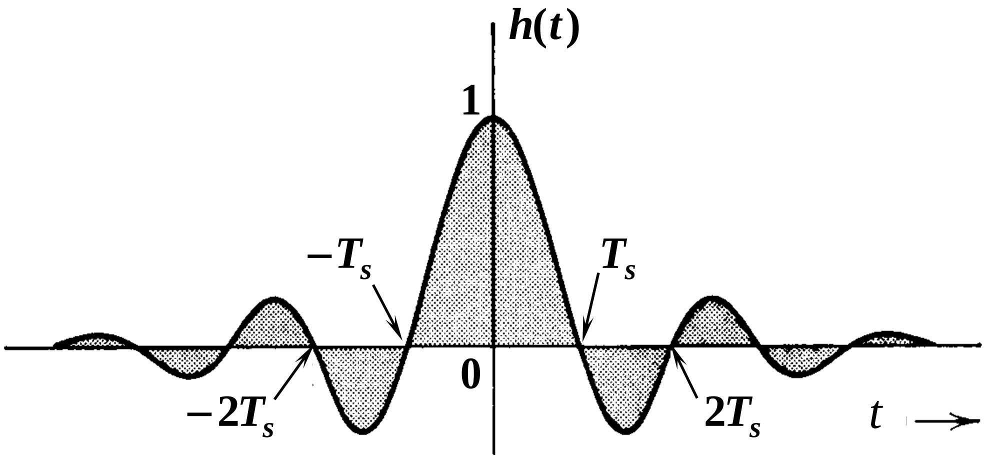
ou seja, f_{Nyquist} é o valor máximo teórico para a mais alta frequência que o sinal a ser amostrado pode conter.

Reconstrução do sinal original)



Resposta impulsional de um filtro passa-baixa ideal



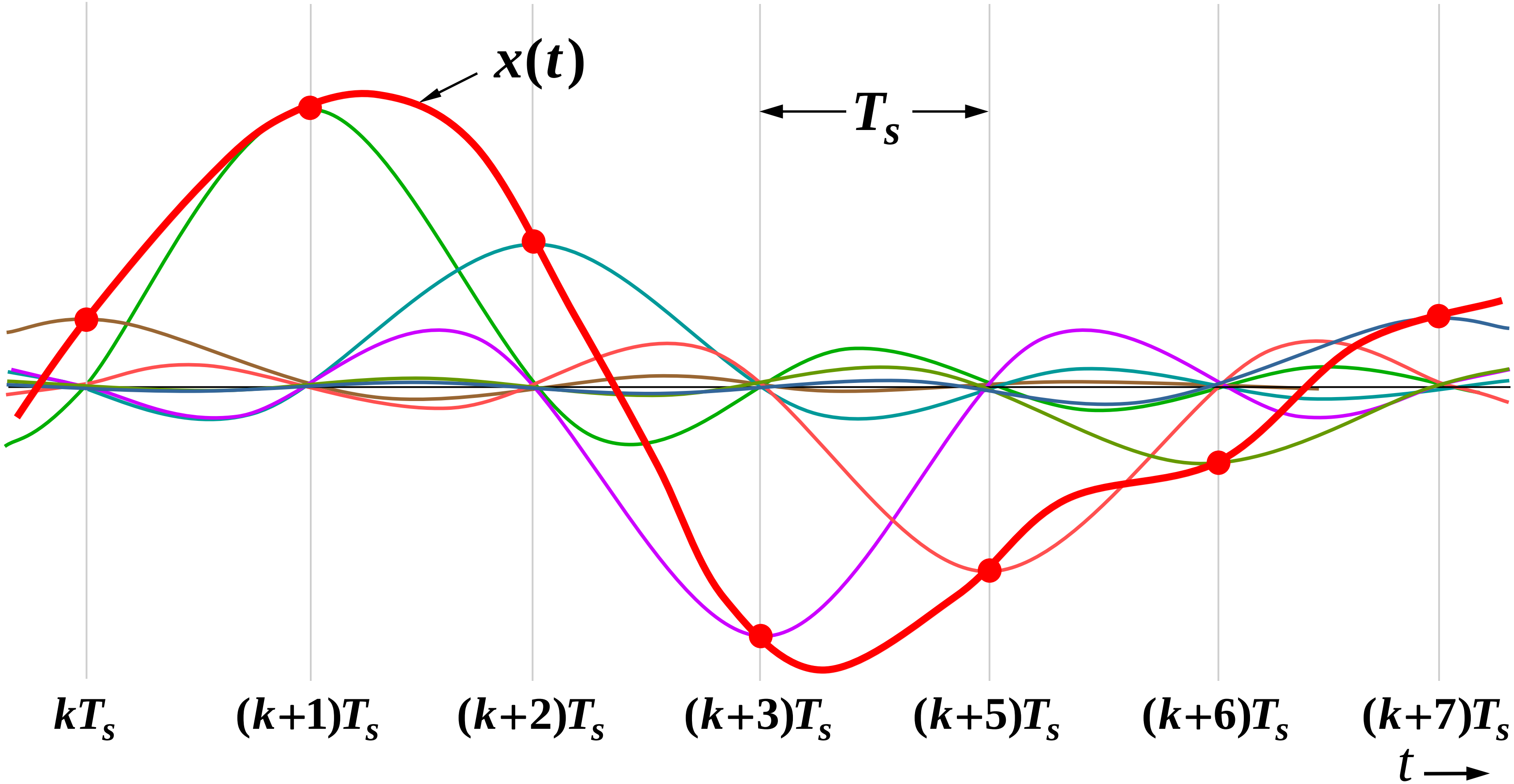


$$H(f) = T_s \,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= T_s f_s \,\mathrm{sinc}(\pi f_s t) \\ &= \mathrm{sinc}(\pi f_s t) \\ &= \mathrm{sinc}\left(\pi \frac{t}{T_s}\right) \end{aligned}$$

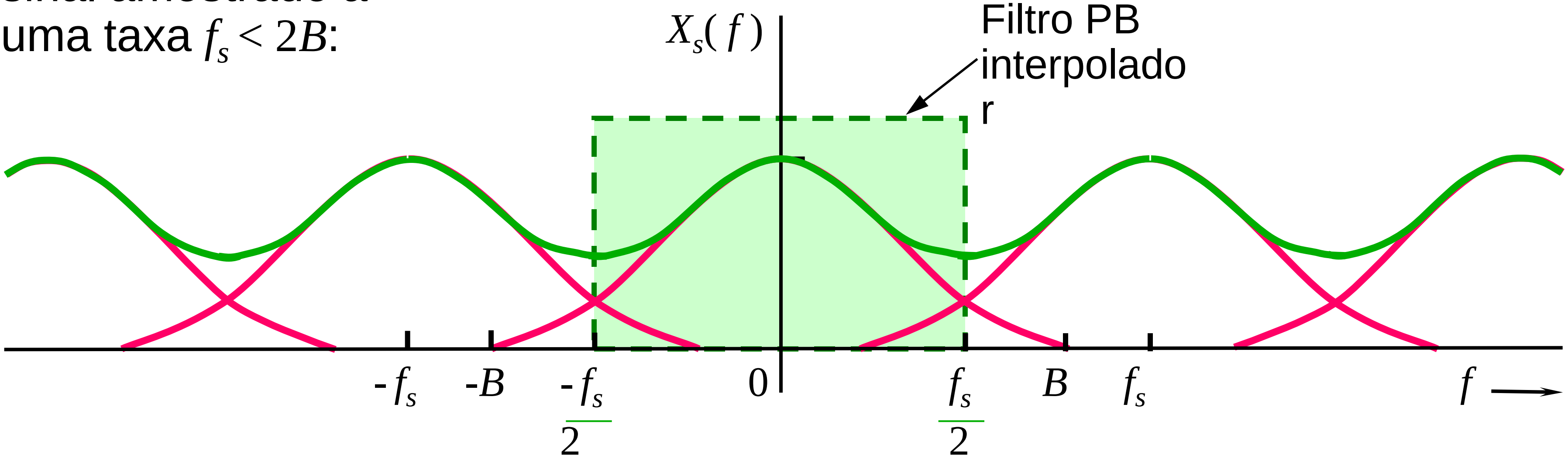
Reconstrução do sinal contínuo usando interpolador ideal

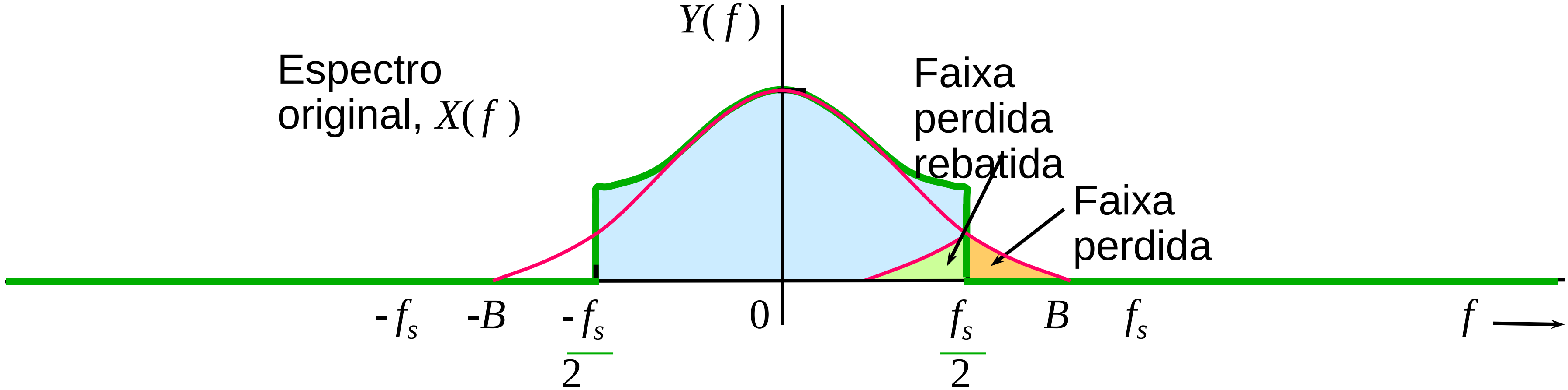
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left[f_s(t - nT_s)\right]$$



Dobramento espectral (ou *aliasing*)

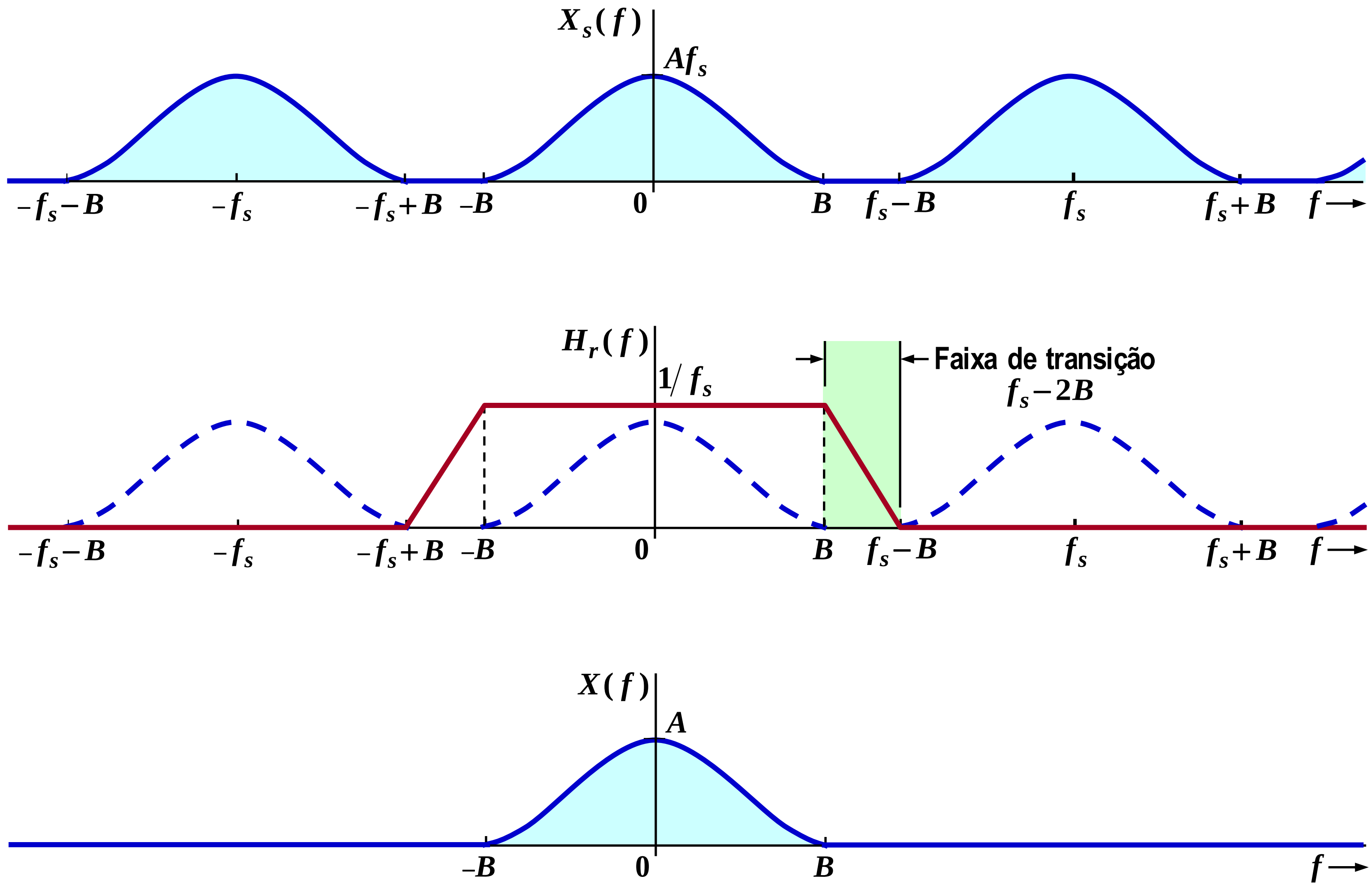
Espectro de um sinal amostrado a uma taxa $f_s < 2B$:





departamento de engenharia elétrica

Filtro de reconstrução



Escolha prática da taxa de amostragem

Na prática, os filtros *antialiasing* e de reconstrução não são filtros ideais e, por isso, a taxa de amostragem precisa ser maior que $2B$. Utiliza-se, geralmente, valores de f_s na faixa

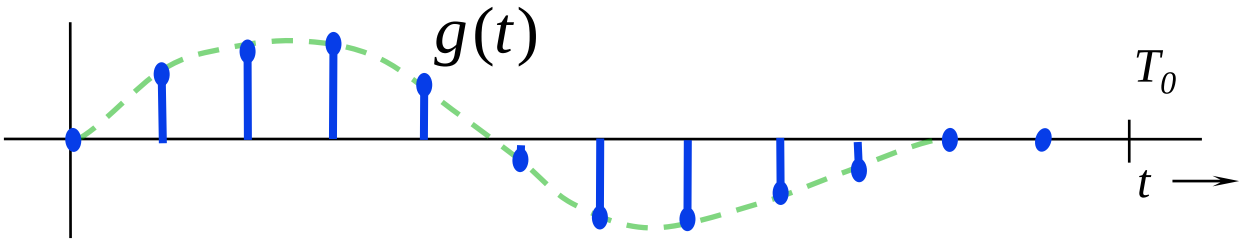
$$\mathbf{1{,}1 \times 2\boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{f_s} \leq 1{,}3 \times 2\boldsymbol{B}}$$

onde, B é a frequência de corte do filtro *antialiasing.*

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Transformada de Fourier Discreta (1)

- Podemos amostrar sinal limitado no tempo dentre um intervalo de tamanho T_0 a uma taxa $f_s = 1/T_s$
  - Temos $N = T_0 / T_s$ amostras

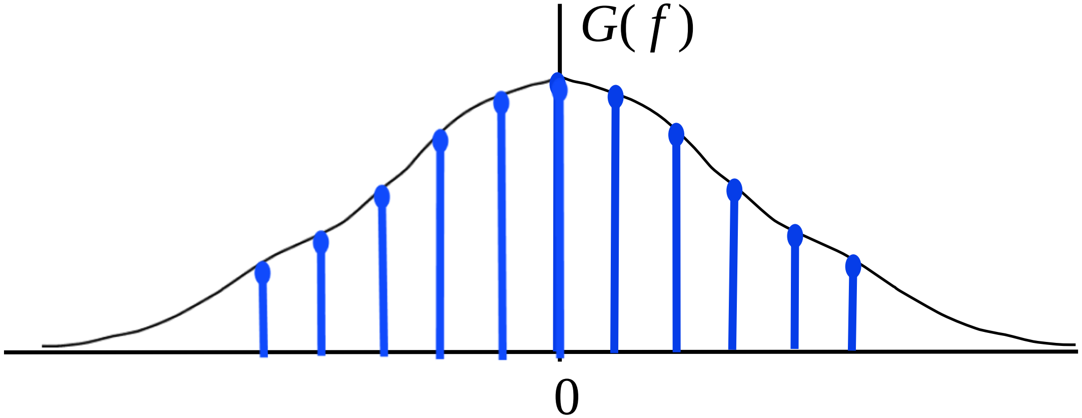


- A transformada de Fourier do sinal pode ser aproximada pelas suas amostras

$$G(f) = \int_0^{T_0} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} T_s g(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s}$$

Transformada de Fourier Discreta (2)

- Podemos amostrar a transformada de Fourier G(f) em intervalos $f_s = \dfrac{1}{T_0}$



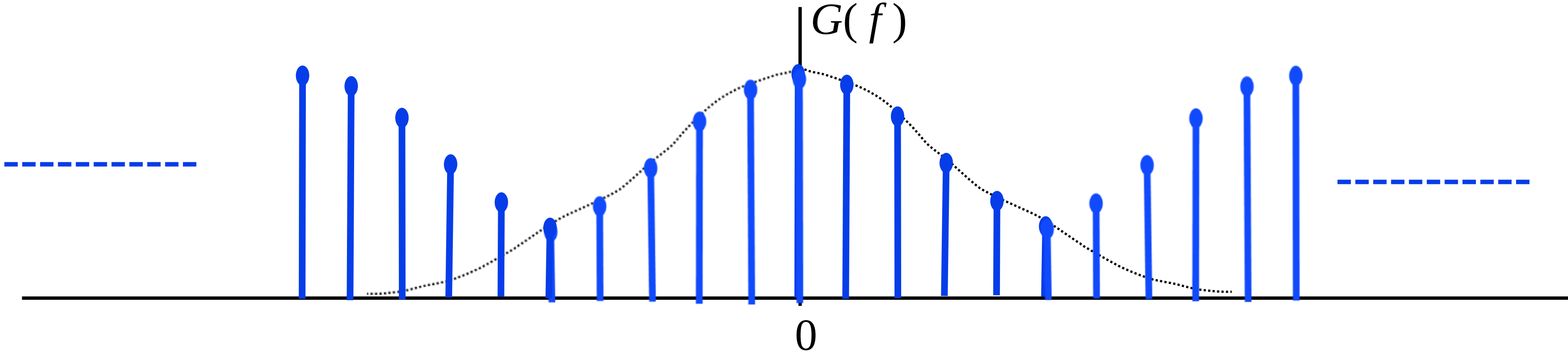
- Fazendo $g_n = T_s g(nT_s)$ e $G_k = G(kf_s)$

$$\boxed{G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N}}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Transformada de Fourier Discreta (3)

- Podemos mostrar que $G_{k+N} = G_k$
- Ou seja, a DFT G_k é periódica
  - Só existem N valores diferentes de G_k

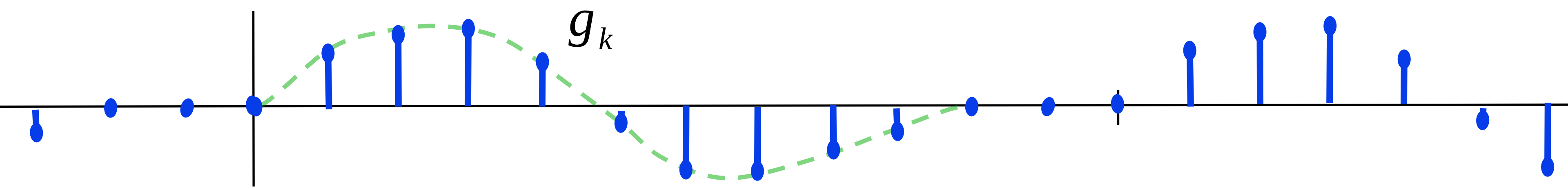


Transformada de Fourier Discreta Inversa

- A Transformada de Fourier Discreta Inversa (IDFT) pode ser obtida por

$$g_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

- Podemos mostrar que $g_{n+N} = g_n$, ou seja, g_n também é periódico com período N



departamento de engenharia elétrica

FFT/IFFT

- Tranformada de Fourier Discreta é normalmente implementada por meio do algoritmo rápido
- Fast Fourier Transform (IFT)
- Complexidade
  - DFT: $O(N^2)$
  - FFT: $O(N \log N)$
- O mesmo vale para a transformada inversa
  - IFFT

Deslocamento Circular

- Deslocamento de uma sequência periódica de período N

$=$

- Deslocamento circular de uma sequência de N amostras

- Ex.

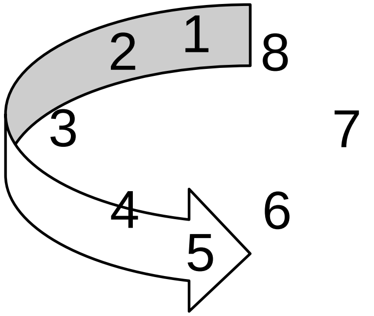
$$\mathbf{g} = [1,2,3,4,5,6,7,8]$$

Com deslocamento circular 1

$$g_{n-1} \rightarrow \mathbf{g}^{(1)} = [8,1,2,3,4,5,6,7]$$

Com deslocamento circular 4

$$g_{n-4} \rightarrow \mathbf{g}^{(4)} = [5,6,7,8,1,2,3,4]$$



Deslocamento Circular

- Se

$$g_n \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G_k$$

- então

$$g_{n-n_0} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G_k e^{-j2\pi k n_0 / N}$$

Convolução Circular

- Convolução de uma sequência periódica de período N

=

- Convolução circular de uma sequência de N amostras

$$y_n = g_n \circledast x_n = \sum_{m=0}^{N-1} g_m x_{n-m}$$

Lembrando que g_n e x_n são periódicos com período N

- Ex.

$$\mathbf{g} = [1,2,3,4]$$

$$\mathbf{x} = [-1,1,0,0]$$

$$\begin{aligned} y_0 &= g_0 x_0 + g_1 x_{-1} + g_2 x_{-2} + g_3 x_{-3} \\ &= g_0 x_0 + g_1 x_3 + g_2 x_2 + g_3 x_1 \\ &= 1(-1) + 2(0) + 3(0) + 4(1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_0 x_1 + g_1 x_0 + g_2 x_{-1} + g_3 x_{-2} \\ &= g_0 x_1 + g_1 x_0 + g_2 x_3 + g_3 x_2 \\ &= 1(1) + 2(-1) + 3(0) + 4(0) = -1 \end{aligned}$$

Convolução Circular

- Se

$$g_n \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G_k \qquad\qquad x_n \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_k$$

- então

$$g_n \circledast x_n \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G_k X_k$$