Teoria das Comunicações

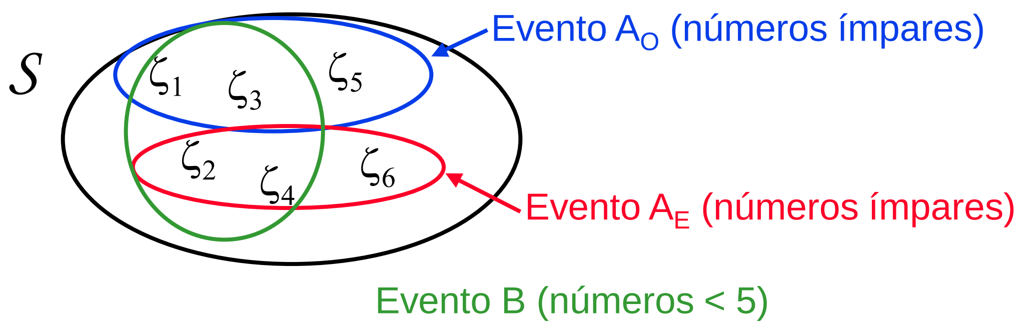
2.6ª Revisão de Probabilidade

Probabilidade – Conceitos Básicos (1)

- Experimento aleatório com diversos resultados possíveis
  - Exemplo: rolar um dado $\rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

- Eventos são conjuntos de resultados
  - Ex. Número par $\rightarrow (2, 4, 6)$

- Espaço de amostras $\mathcal{S}$ é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório
  - Cada resultado é um ponto de amostra
  - Ex. $\mathcal{S} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6\}$



Probabilidade – Conceitos Básicos (2)

- Todo subconjunto de $\mathcal{S}$ é um evento
- Operações em conjuntos se aplicam a eventos
  - $A_E \bigcup B = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_6\}$
  - $A_O \bigcap B = \{\zeta_1, \zeta_3\}$, ou $A_O B$
  - $\overline{B} = \{\zeta_5, \zeta_6\}$, ou B^C
  - Evento nulo $\varnothing = \overline{\mathcal{S}}$
- Se AB = Ø, eventos são disjuntos

Definição de Probabilidade

número de tentativas com resultado no evento A

$$f(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}$$

número de tentativas de um experimento

freqüência relativa do evento A

- Designamos a probabilidade do evento A como $P(A) = f(A)$
  - Ex. $P(\zeta_i) = \frac{1}{6}$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(S) = 1 \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

Probabilidade Condicional

- Probabilidade de um evento dado que outro ocorreu

Probabilidade de B dado A

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

regra de Bayes

Eventos Independentes

- Eventos A e B são independentes se

$$P(B\,|\,A) = P(B)$$

$$P(A\,|\,B) = P(A)$$

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A) = P(A)P(B)$$

Tentativas de Bernoulli

- Chamamos de sucesso a ocorrência do evento *A* em um experimento

$$P(A) = p$$
$$P(\overline{A}) = 1 - p$$

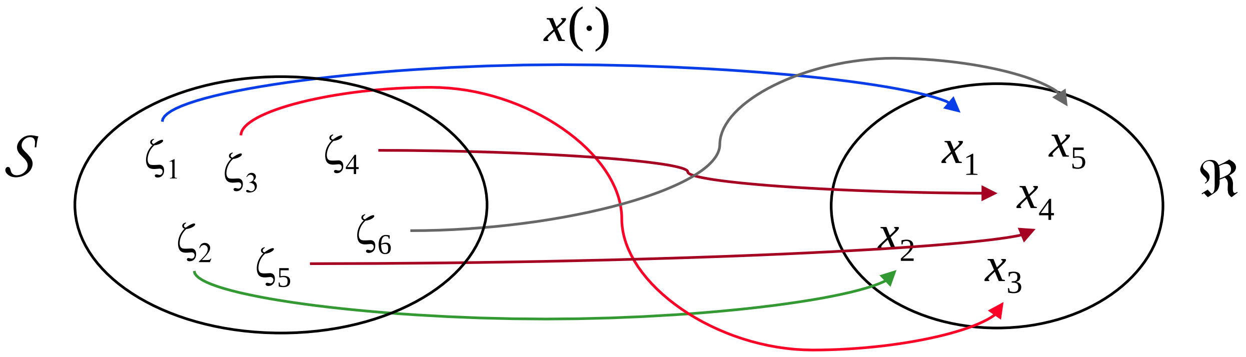
- Fazemos *n* tentativas independentes deste evento

$$P(k \text{ sucessos em } n \text{ tentativas}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{, onde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Variáveis Aleatórias

- Para cada resultado de um experimento aleatório definimos um valor
  $x(\zeta_i)$



- x é uma variável aleatória que pode assumir valores x_i

$$P_{\mathrm{x}}(x_i) = P(\mathrm{x} = x_i)$$

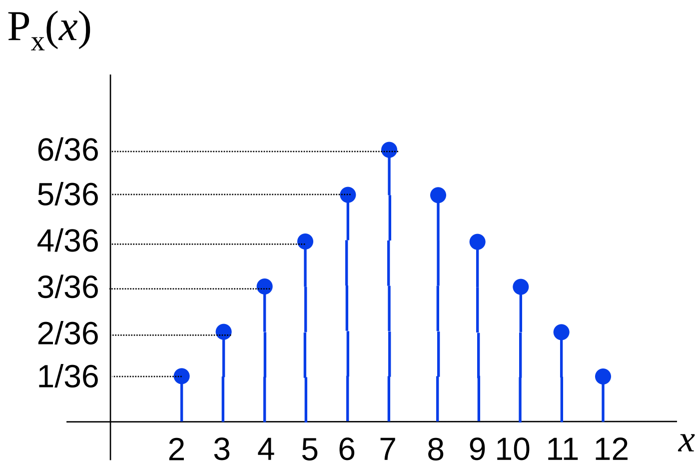
- Exemplo

$$P_{\mathrm{x}}(x_1) = P(\zeta_1)$$

$$P_{\mathrm{x}}(x_4) = P(\zeta_4) + P(\zeta_6)$$

Variáveis Aleatórias Discretas

- Valores x_{i} assumem valores discretos
- $\sum_i P_{\mathrm{x}}(x_i) = 1$
- Exemplo: V.A. x é a soma de dois dados



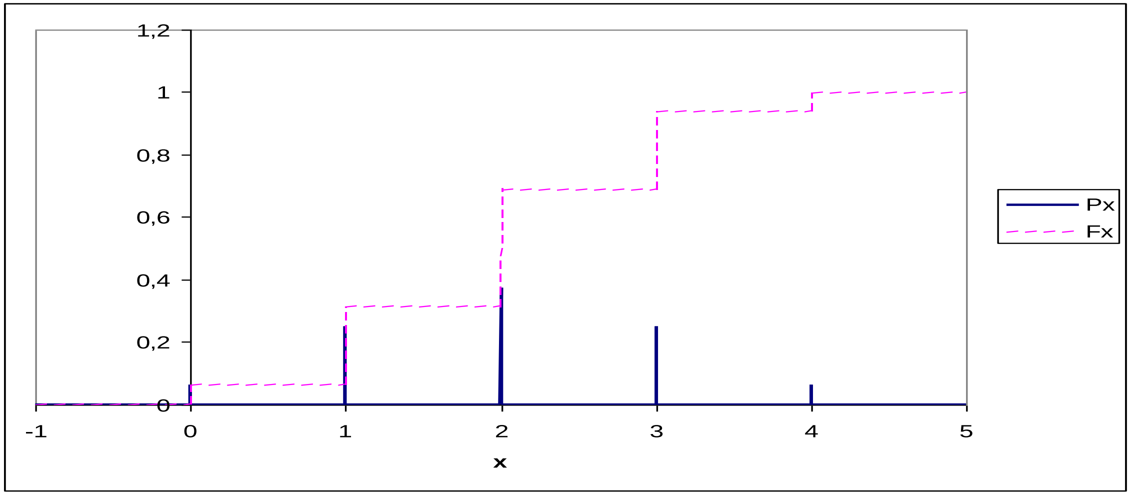
Função de Distribuição Cumulativa (CDF)

$$F_{\mathrm{x}}(x) = \Pr\{\mathrm{x} \le x\}$$

- Propriedades:

$$F_{\mathrm{x}}(x) \ge 0$$
$$F_{\mathrm{x}}(\infty) = 1$$
$$F_{\mathrm{x}}(-\infty) = 0$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_{\mathrm{x}}(x_1) \le F_{\mathrm{x}}(x_2) \quad \text{(CDF é crescente)}$$

- Exemplo:
  - x é o número de caras em 4 lançamentos de uma moeda



departamento de engenharia elétrica

Variáveis aleatórias contínuas

- Valores x_i podem assumir qualquer valor em um intervalo contínuo

- Exemplo: V.A. x é a temperatura em um determinado local

- Probabilidade de x assumir um valor específico é zero!

$$\Pr\{\mathrm{x} = x_i\} = 0$$

- Mas podemos definir a probabilidade de x assumir um valor em um determinado intervalo

$$\Pr\{x < \mathrm{x} \leq x + \Delta x\} = F_{\mathrm{x}}(x + \Delta x) - F_{\mathrm{x}}(x)$$

departamento de engenharia elétrica

Função Densidade de Probabilidade (PDF)

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{dF_{\mathrm{x}}(x)}{dx} \Leftrightarrow F_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\mathrm{x}}(x)dx$$

- A probabilidade em um determinado intervalo é

$$\Pr\{x_1 < \mathrm{x} \le x_2\} = F_{\mathrm{x}}(x_2) - F_{\mathrm{x}}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\mathrm{x}}(x)dx$$

- Propriedades:

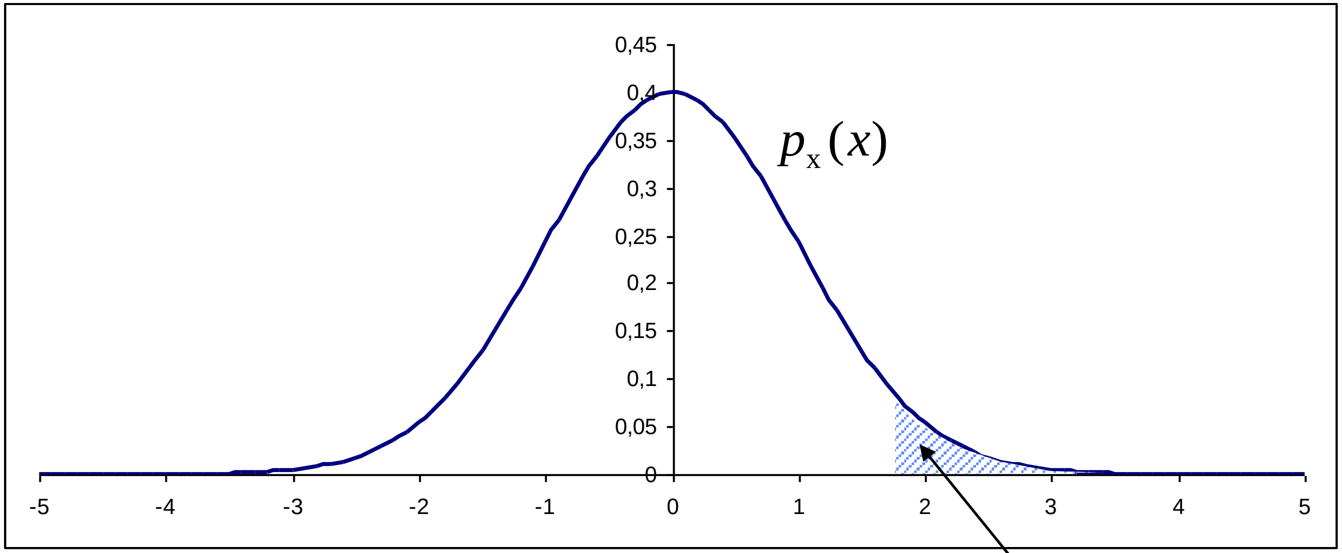
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x}}(x)dx = 1$$

$$\lim_{|x|\to\infty} p_{\mathrm{x}}(x) = 0$$

Variável Aleatória Normal ou Gaussiana

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$F_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$$



$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

Densidade de Probabilidade Conjunta

$$\Pr\{\mathrm{x} \le x, \mathrm{y} \le y\} = F_{\mathrm{x,y}}(x, y)$$

$$p_{\mathrm{x,y}}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\mathrm{x,y}}(x, y)$$

- Densidade de probabilidade marginal:

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x, y)\,dy$$

Valor Esperado

- Para variáveis aleatórias discretas

$$E[\mathrm{x}] = \overline{\mathrm{x}} = \sum_i x_i P_{\mathrm{x}}(x_i)$$

- Para variáveis aleatórias contínuas

$$E[\mathrm{x}] = \overline{\mathrm{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathrm{x}}(x) dx$$

- Se $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$

$$E[f(\mathrm{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\mathrm{x}}(x) dx$$

Momentos de uma variável aleatória

- Momento de ordem n

$$E\left[\mathrm{x}^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathrm{x}}(x)dx$$

- Momento central de ordem n

$$E\left[(\mathrm{x}-\overline{\mathrm{x}})^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{\mathrm{x}})^n p_{\mathrm{x}}(x)dx$$

Teorema do Limite central

- A soma de um número grande de variáveis aleatórias independentes tende a uma v.a. gaussiana

$$\mathrm{y} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{x}_i$$

$$p_{\mathrm{y}}(y) \cong \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m)^2 / 2\sigma^2}$$

$$m = \sum_i \overline{\mathrm{x}_i}$$

$$\sigma = \sqrt{E\left[\left(\mathrm{y} - \overline{\mathrm{y}}\right)^2\right]} = \sqrt{\sum_i E\left[\left(\mathrm{x}_i - \overline{\mathrm{x}_i}\right)^2\right]}$$

Correlação

$$\sigma_{xy} = E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})] = E[xy] - E[x]E[y]$$

Se $\sigma_{xy} = 0$, variáveis aleatórias são descorrelatadas

x e y são independentes $\Rightarrow$ x e y são descorrelatadas

Estimação Linear LMS

- Como estimar o valor de y com conhecimento de x ?
- Estimação Linear pela Mínima Média Quadrática (Linear Mean Square)
- Estimativa $\hat{y}$ também é uma variável aleatória
- Queremos minimizar o erro quadrático médio

$$E\left[\varepsilon^2\right] = E\left[(y - \hat{y})^2\right]$$

fazendo

$$\hat{y} = a x$$

- obtemos

$$a = \frac{E[xy]}{E\left[x^2\right]} = \frac{R_{xy}}{R_{xx}}$$