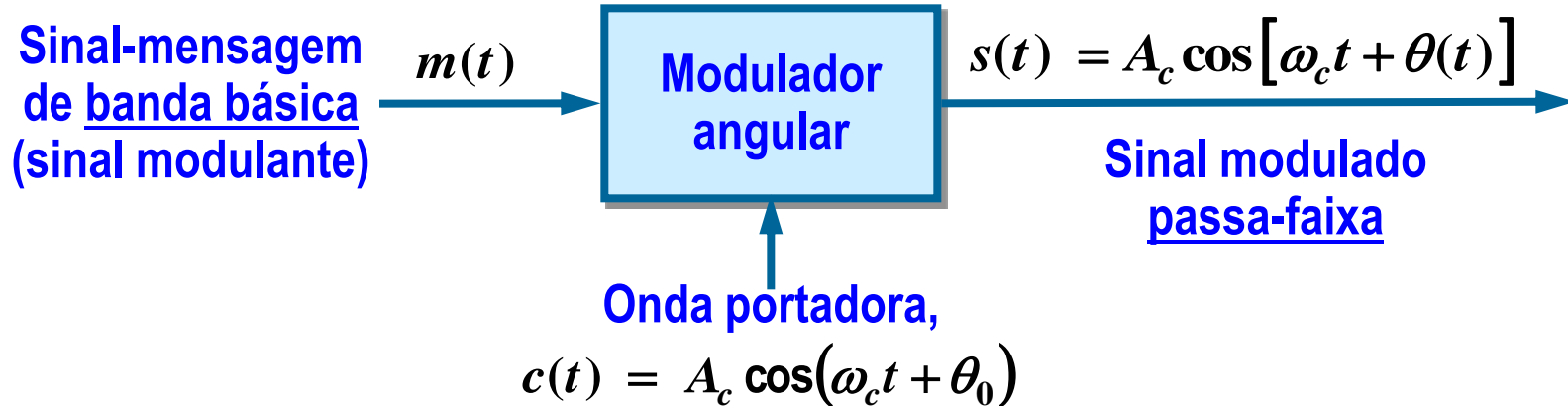


# Teoria das Comunicações

## 3.5

### Modulação Angular

# Definição



$$s(t) = A_c \cos[\varphi(t)]$$

$$\varphi(t) = \omega_c t + \underbrace{\theta_0 + g[m(t)]}_{\theta(t)}$$

O ângulo da onda portadora  $\varphi(t)$  passa a ser uma função do sinal modulante de banda básica. A amplitude de pico da onda portadora é mantida constante.

A função  $g[.]$  determina o tipo da modulação angular. Embora possa-se escolher os tipos mais variados para  $g[.]$ , apenas dois tipos têm aplicação prática: o que resulta na modulação de freqüência e o que resulta na modulação de fase.

# Conceito de freqüência instantânea

Sinal senoidal convencional:

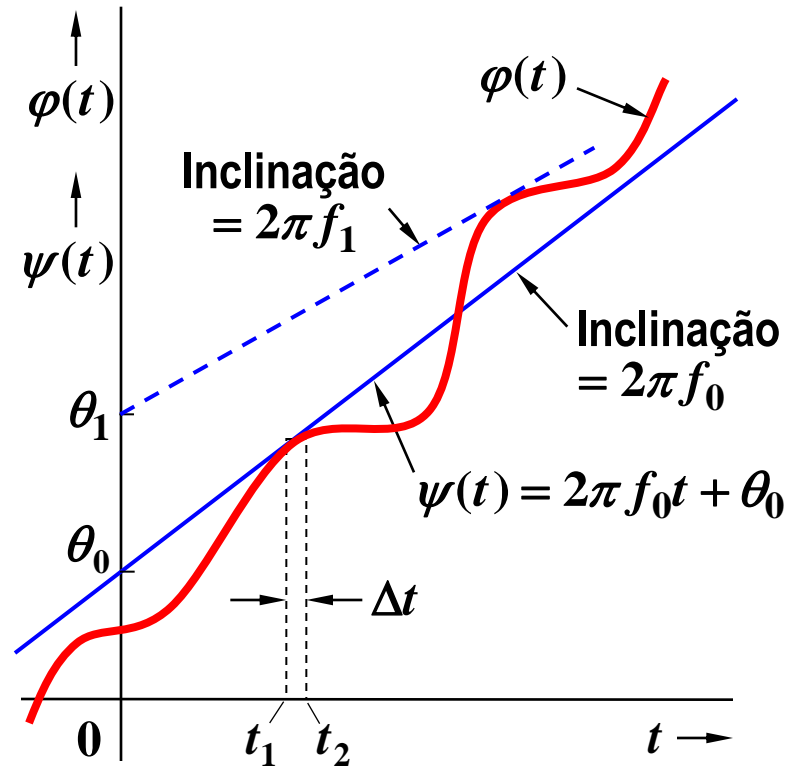
$$A \cos(\underbrace{2\pi f_0 t + \theta_0}_{\psi(t)})$$

Sinal senoidal generalizado:

$$g(t) = A \cos[\varphi(t)]$$

$$g(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

para  $t_1 < t < t_2$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$



Freqüência instantânea:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= 2\pi \int_{-\infty}^t f_i(\lambda) d\lambda \\ &= \phi_0 + 2\pi \int_0^t f_i(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

# Modulação de fase (*phase modulation* – *PM*): definição

$$g[m(t)] = k_p m(t)$$

$$\phi(t) = \omega_c t + \underbrace{k_p m(t)}_{\theta(t)}$$

Assumiremos que  $\theta_0 = 0$ , sem perda de generalidade.

A fase  $\theta(t)$  da portadora modulada varia linearmente com o sinal-mensagem  $m(t)$ .

$$s_{PM}(t) = A_c \cos[\phi(t)] = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$$

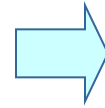
$k_p$  representa a *sensibilidade de fase* do modulador, expressa em rad / volt (supondo que  $m(t)$  é uma tensão).

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}$$

A frequência instantânea varia, em torno de  $f_c$ , linearmente com a derivada do sinal  $m(t)$ .

# Modulação de freqüência (*frequency modulation – FM*): definição

$$g[m(t)] = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$



$$\phi(t) = \omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Assumindo que  $\theta_0 = 0$ ,  
sem perda de generalidade.

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$



A freqüência instantânea varia, em torno de  $f_c$ , linearmente com o sinal-mensagem  $m(t)$ .



$$s_{\text{FM}}(t) = A_c \cos[\phi(t)] = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda\right]$$

$k_f$  representa a *sensibilidade de freqüência* do modulador, expressa em hertz / volt (supondo que  $m(t)$  é uma tensão).

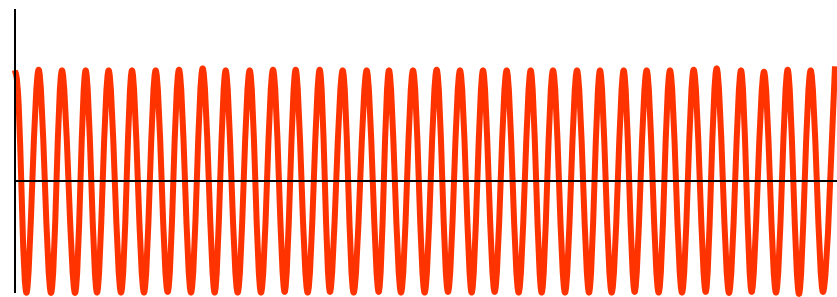
# Função de fase e freqüência instantânea dos sinais FM e PM

Sinal modulado

$$s(t) = A_c \cos[\underbrace{\omega_c t + \theta(t)}_{\varphi(t)}]$$

Freqüência instantânea

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

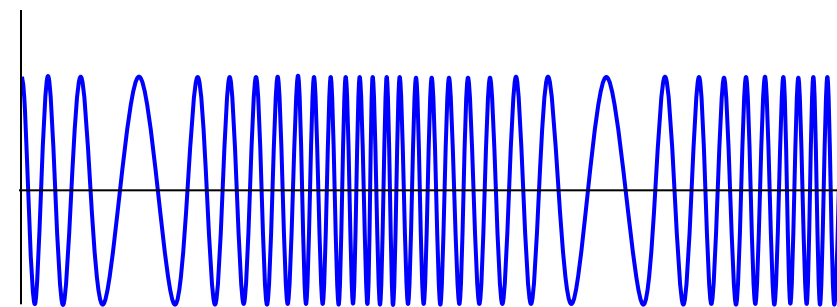


Onda portadora

PM

$$\theta(t) = k_p m(t)$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}$$



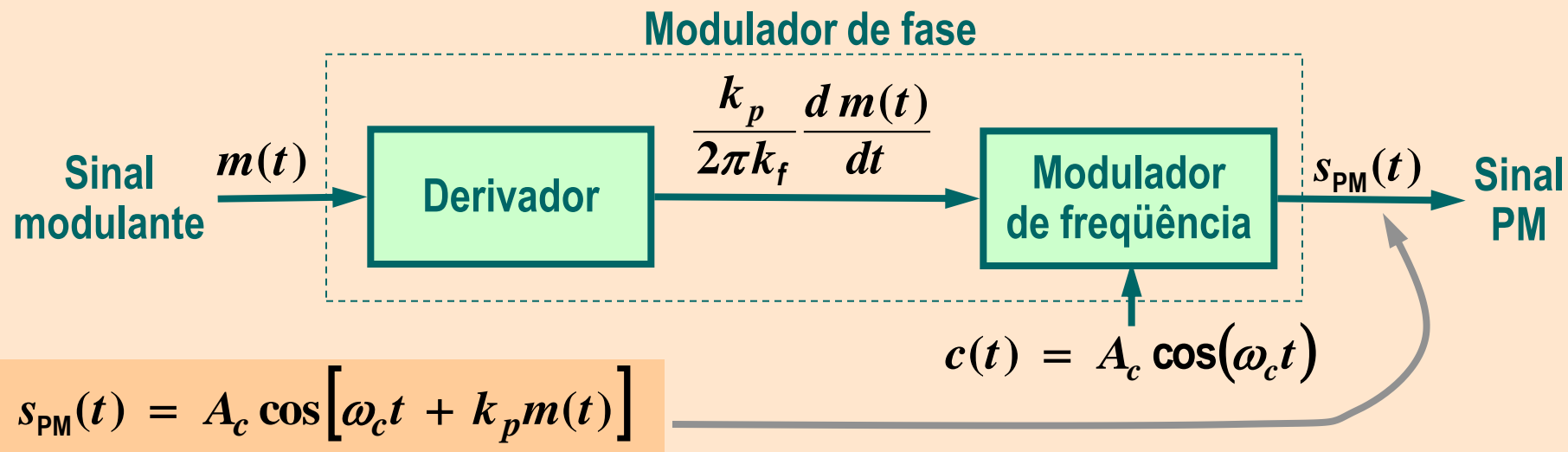
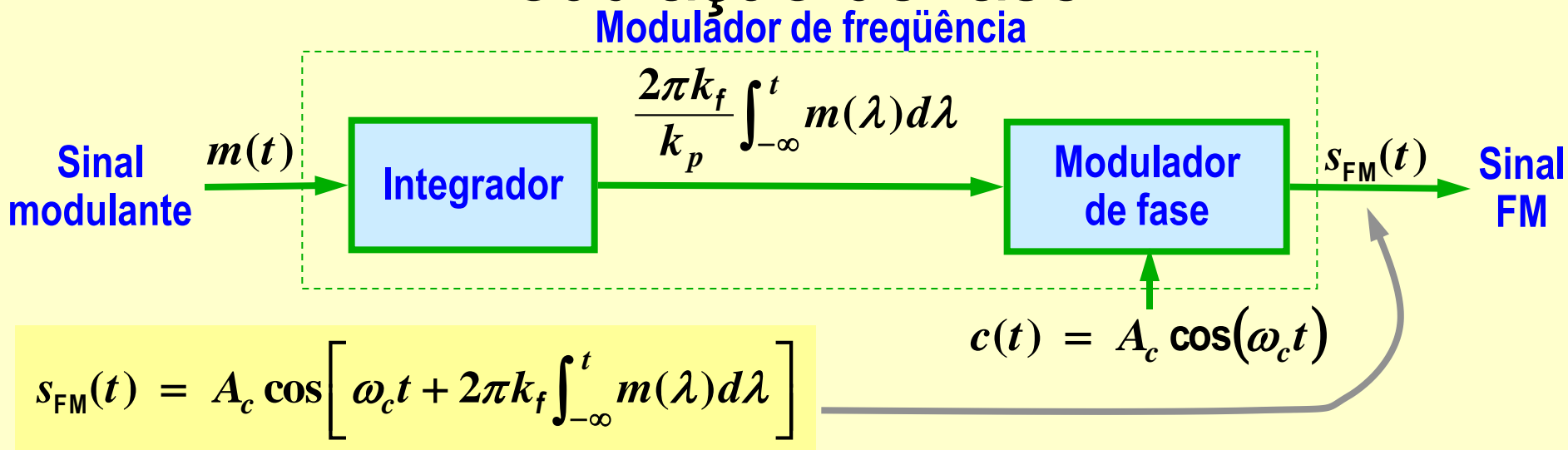
Sinal modulado

FM

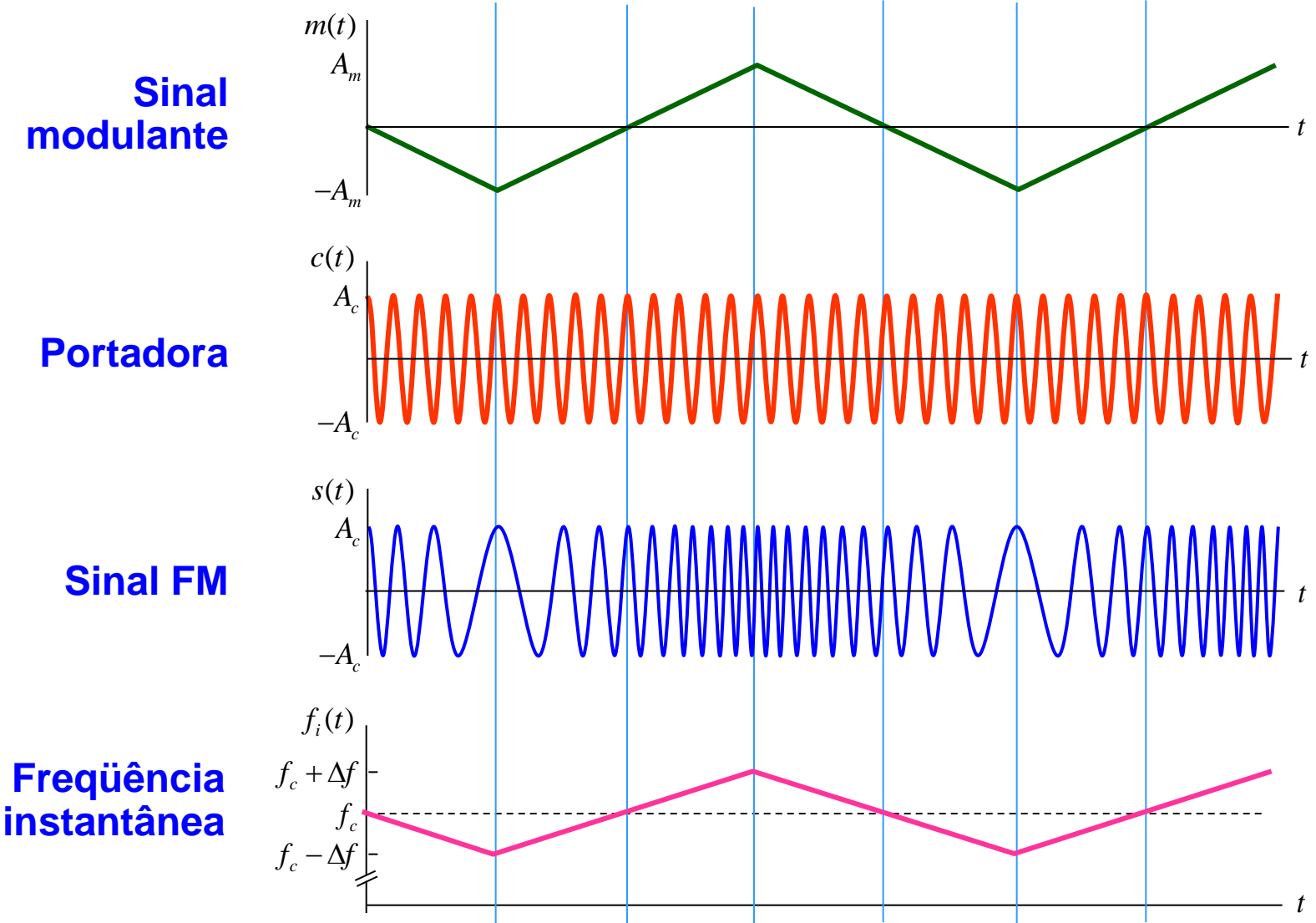
$$\theta(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

# Relação entre modulação de freqüência e modulação de fase

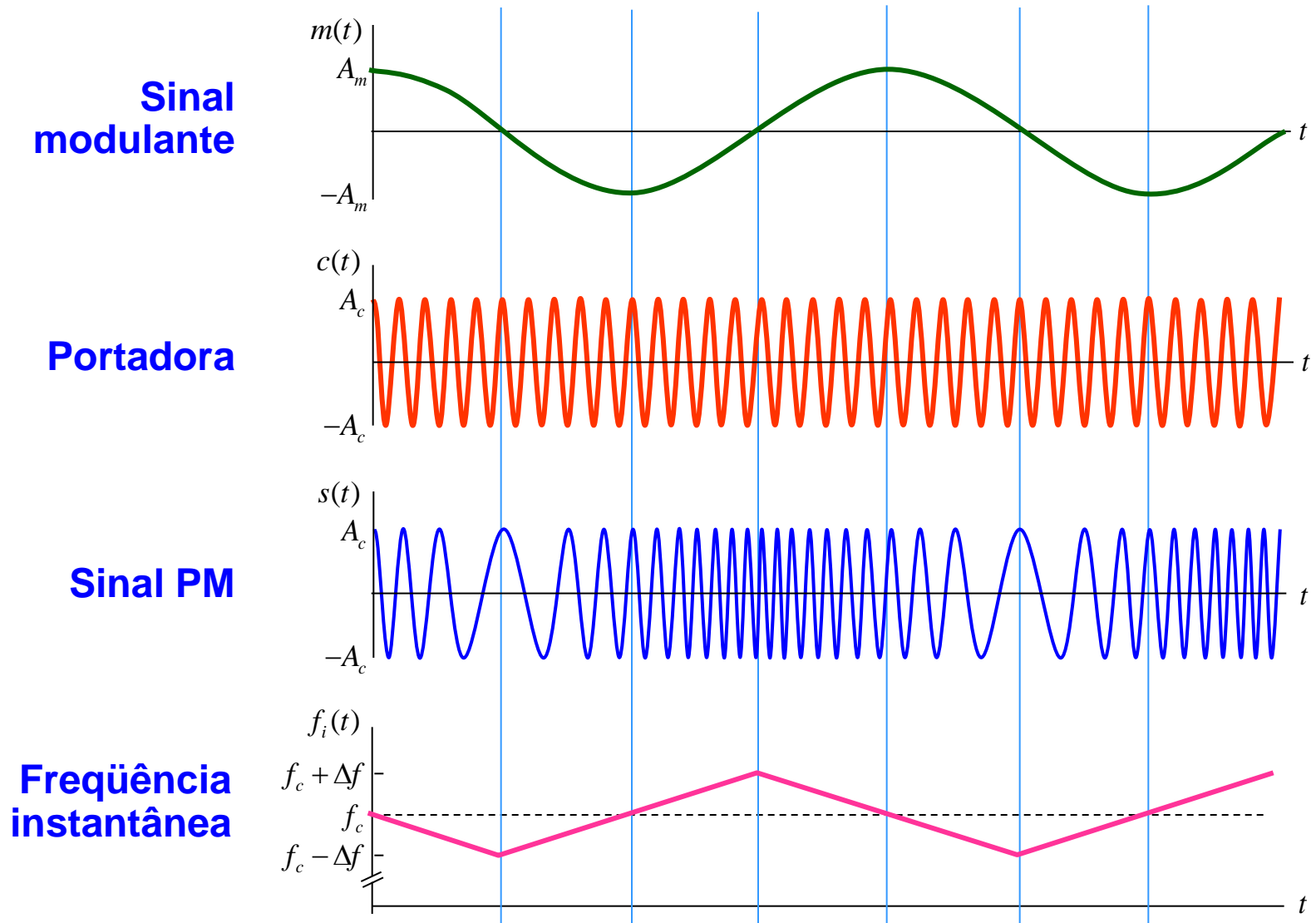


# Modulação de freqüência: exemplo

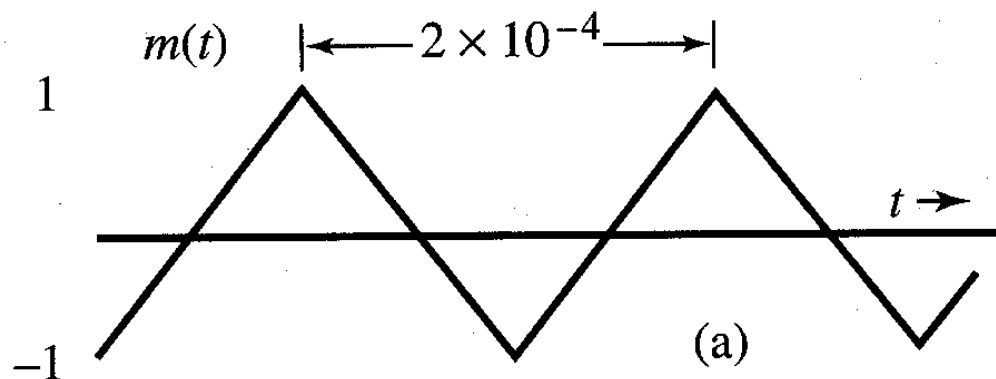




# Modulação de fase: exemplo



## Exemplo 1: Sinal modulante com forma de onda triangular



$$k_f = 10^5 \text{ Hz/volt}$$

$$k_p = 10\pi \text{ rad/volt}$$

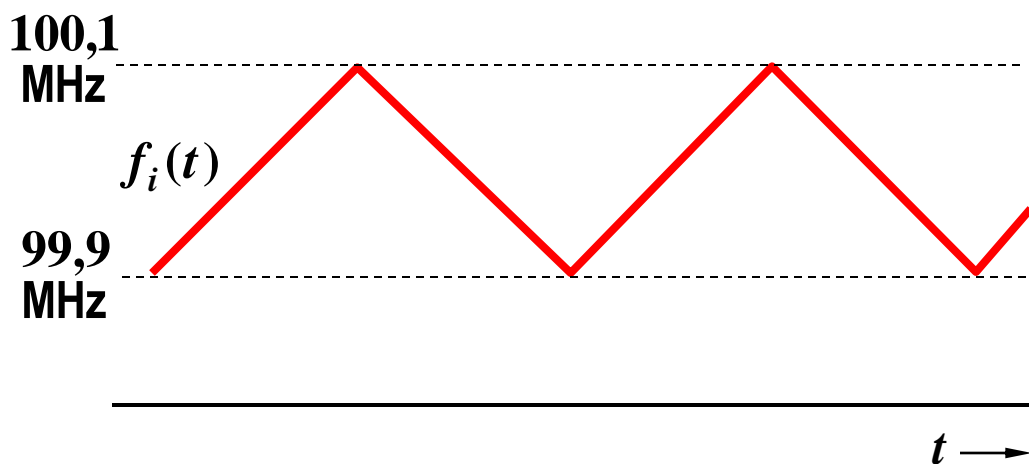
$$f_c = 100 \text{ MHz}$$

FM

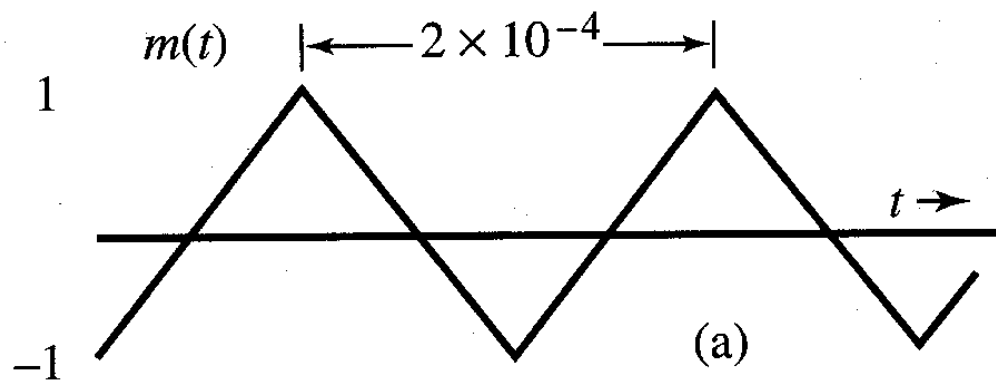
$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f m(t) \\ &= 10^8 + 10^5 m(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\min} &= 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\min} \\ &= 99,9 \text{ MHz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\max} &= 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\max} \\ &= 100,1 \text{ MHz} \end{aligned}$$



## Exemplo 1: Sinal modulante com forma de onda triangular



$$k_f = 10^5 \text{ Hz/volt}$$

$$k_p = 10\pi \text{ rad/volt}$$

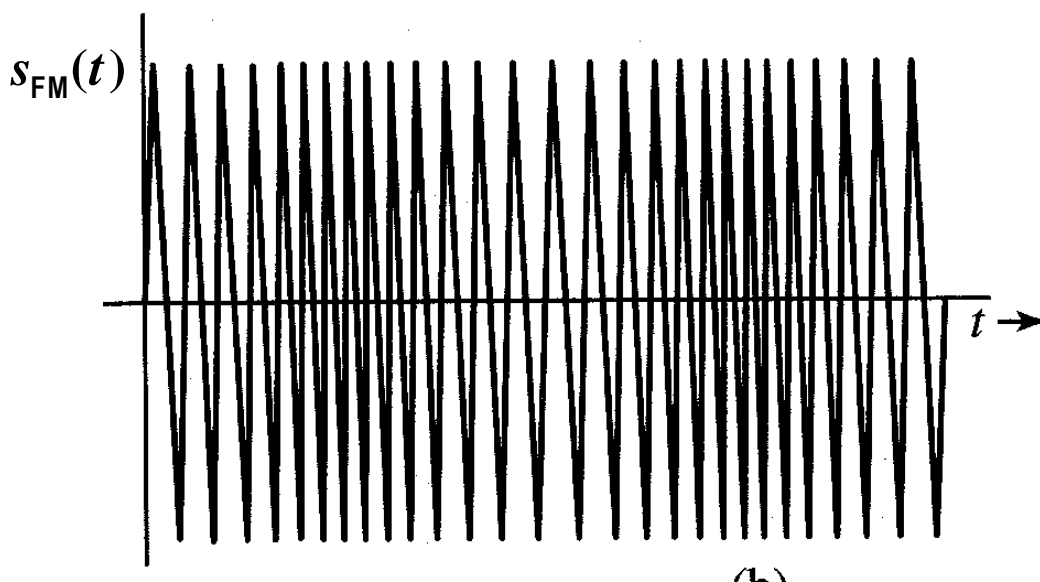
$$f_c = 100 \text{ MHz}$$

FM

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f m(t) \\ &= 10^8 + 10^5 m(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\min} &= 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\min} \\ &= 99,9 \text{ MHz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\max} &= 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\max} \\ &= 100,1 \text{ MHz} \end{aligned}$$



# Exemplo 1: Sinal modulante triangular

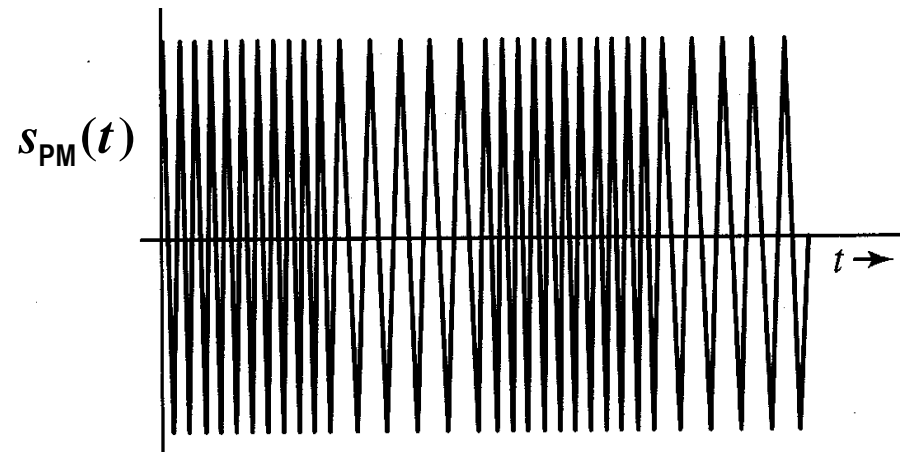
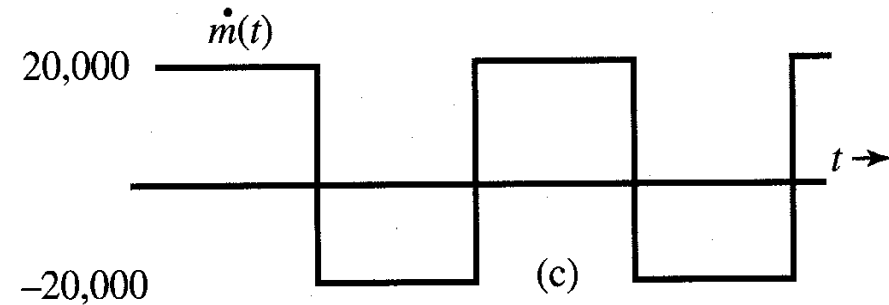
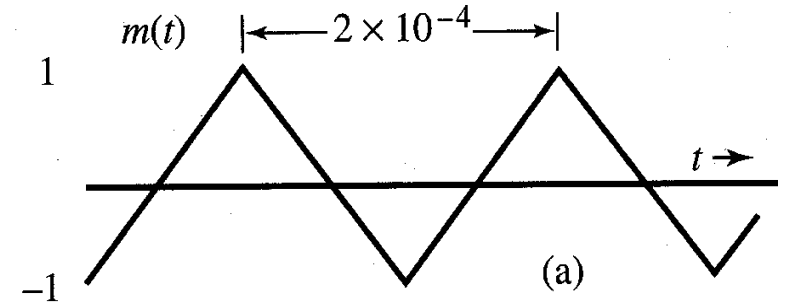
PM

$$k_p = 10\pi \text{ rad/volt} \quad f_c = 100 \text{ MHz}$$

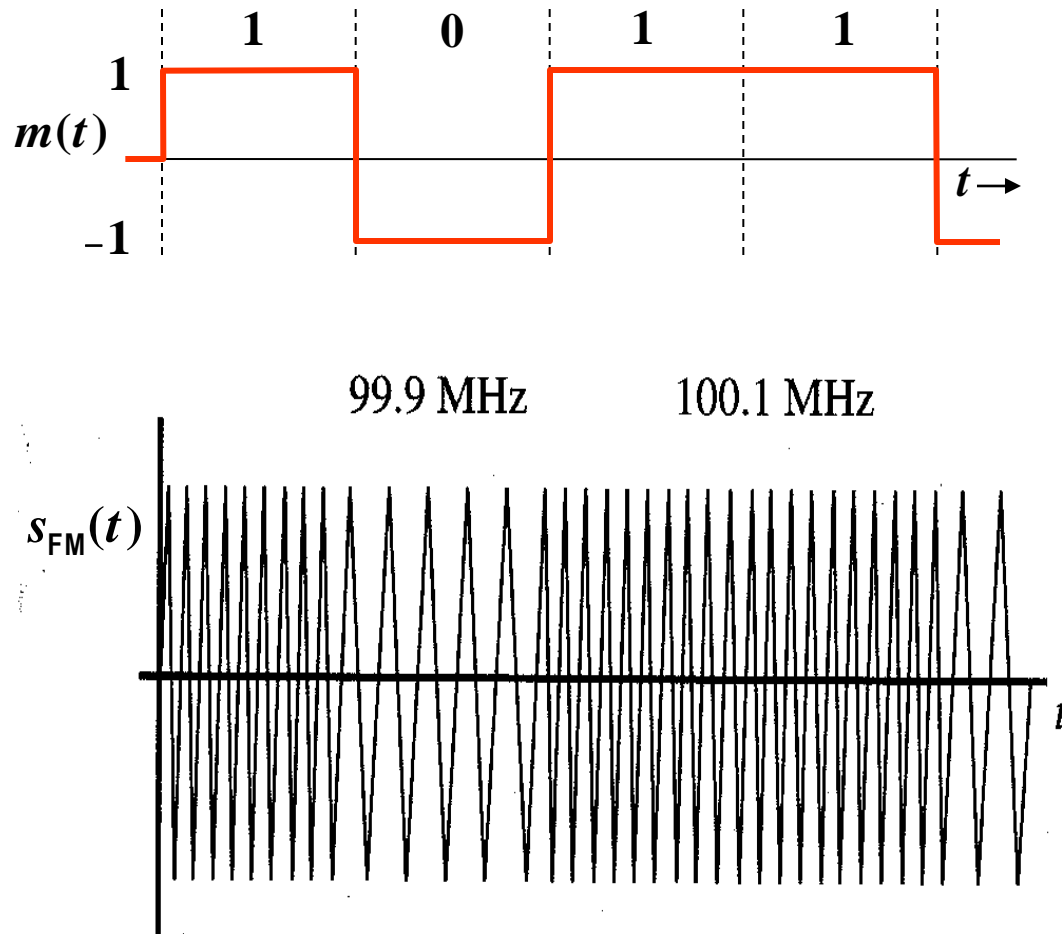
$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} \\ &= 10^8 + 5 \frac{dm(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\min} &= 10^8 + 5[\dot{m}(t)]_{\min} \\ &= 10^8 - 10^5 = 99,9 \text{ MHz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\max} &= 10^8 + 5[\dot{m}(t)]_{\max} \\ &= 10^8 + 10^5 = 100,1 \text{ MHz} \end{aligned}$$



## Exemplo 2: Sinal modulante digital – modulação FM



$$k_f = 10^5 \text{ Hz/volt}$$

$$f_c = 100 \text{ MHz}$$

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f m(t) \\ &= 10^8 + 10^5 m(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\min} &= 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\min} \\ &= 99,9 \text{ MHz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_i(t)]_{\max} &= 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\max} \\ &= 100,1 \text{ MHz} \end{aligned}$$

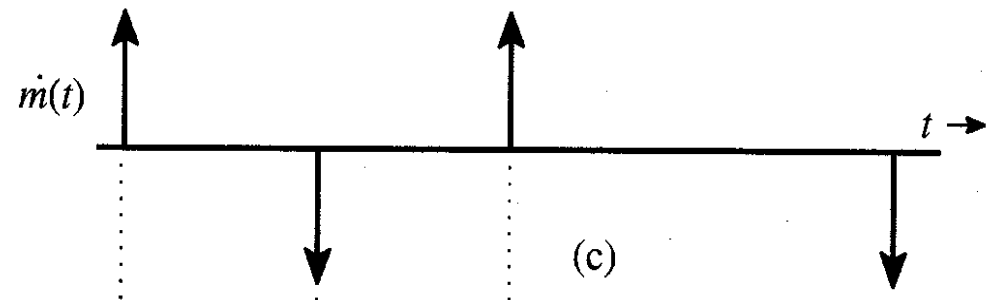
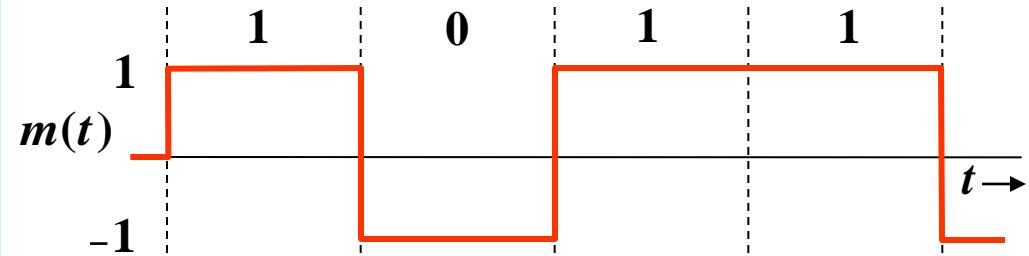
**FSK (frequency-shift keying): chaveamento de frequência**

## Exemplo 2: Sinal modulante digital – modulação PM

$$k_p = \pi/2 \text{ rad/volt}$$

$$f_c = 100 \text{ MHz}$$

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt} \\ &= 10^8 + \frac{1}{4} \frac{dm(t)}{dt} \end{aligned}$$

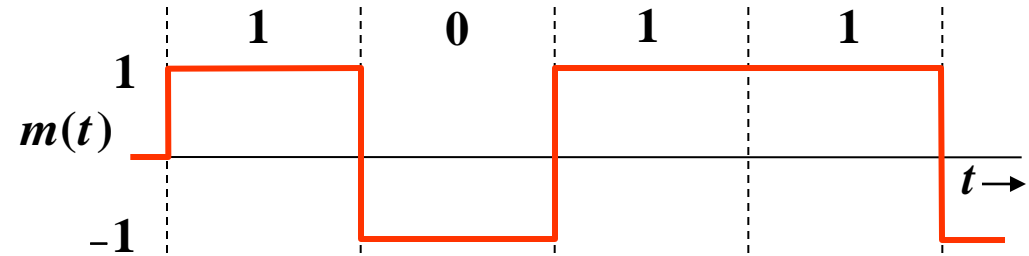


Não é possível utilizar o método indireto de construção do sinal PM quando o sinal modulante apresenta descontinuidades.

## Exemplo 2: Sinal modulante digital – modulação PM

$$k_p = \pi/2 \text{ rad/volt}$$

$$f_c = 100 \text{ MHz}$$



$$s_{\text{PM}}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$$

$$\theta(t) = k_p m(t) = \frac{\pi}{2} m(t)$$

$$= A_c \cos[\omega_c t + \underbrace{\frac{\pi}{2} m(t)}_{\theta(t)}]$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{qdo } m(t) = -1 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{qdo } m(t) = +1 \end{cases}$$

$$s_{\text{PM}}(t) = \begin{cases} +A_c \text{ sen}(\omega_c t), \\ -A_c \text{ sen}(\omega_c t), \end{cases}$$

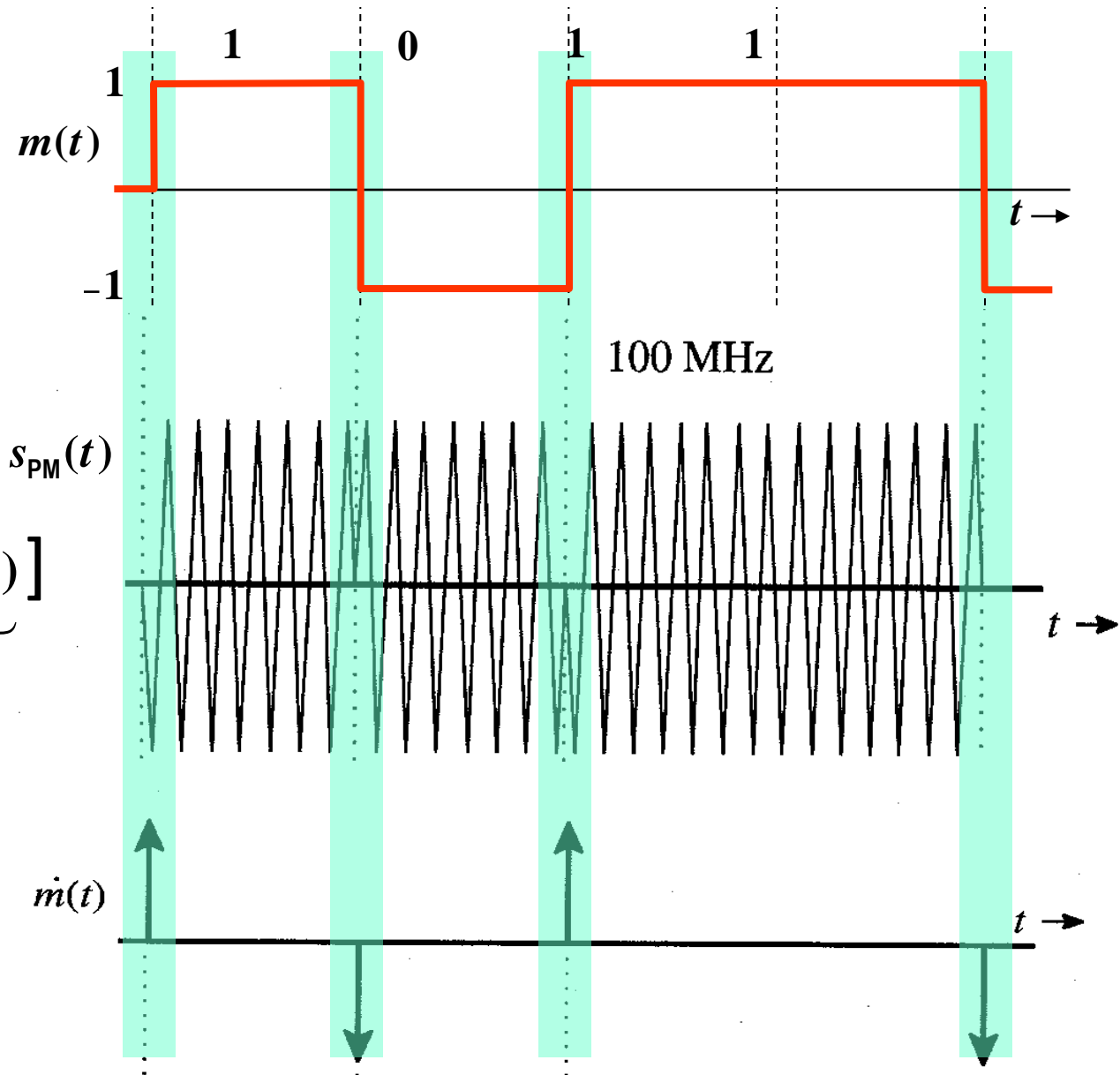
$$\begin{cases} \text{qdo } m(t) = -1 \\ \text{qdo } m(t) = +1 \end{cases}$$

**Exemplo 2: Sinal modulante digital – modulação PM**

$k_p = \pi/2$  rad/volt

$s_{PM}(t) = A_c \cos \left[ \omega_c t + \underbrace{\frac{\pi}{2} m(t)}_{\theta(t)} \right]$

**PSK (phase-shift keying):  
chaveamento de fase**





# Desvio de frequência

*Desvio instantâneo de frequência:*

$$f_d(t) = f_i(t) - f_c$$

*Desvio (máximo ou de pico) de frequência ( $\Delta f$ ):* É a máxima variação instantânea da frequência da onda modulada (FM ou PM), em relação à frequência da portadora  $f_c$ :

$$\Delta f = \max |f_d(t)| = \max |f_i(t) - f_c|$$

*Valor eficaz (ou rms) de  $f_d(t)$ :*

$$\Delta f_{rms} = \sqrt{\langle f_d^2(t) \rangle}$$

# Desvio (máximo) de frequência

Para sinais FM:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

$$\Delta f = \max |f_i(t) - f_c|$$

$$\Delta f = k_f \max |m(t)| = k_f m_p$$

Nos sinais FM,  $\Delta f$  é proporcional à amplitude de pico do sinal modulante  $m(t)$  e é independente da largura de banda de  $m(t)$ .

Para sinais PM:

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t)$$

$$\Delta f = \max |f_i(t) - f_c|$$

$$\Delta f = \frac{k_p}{2\pi} \max |\dot{m}(t)| = \frac{k_p m'_p}{2\pi}$$

Nos sinais PM,  $\Delta f$  é proporcional à amplitude de pico da derivada do sinal modulante  $m(t)$ , que depende fortemente do espectro de frequência de  $m(t)$ .

# Razão de desvio e índice de modulação

Razão de desvio ( $\beta$ ) é a razão

$$\beta = \frac{\Delta f}{B_m}$$

onde  $\Delta f$  é o desvio de frequência e  $B_m$  é a largura de banda do sinal modulante  $m(t)$ .

Para sinais FM, a razão de desvio  $\beta$  é uma medida da intensidade da modulação e, conseqüentemente, desempenha um papel similar ao que tem o índice de modulação na técnica AM. Além disso, para o caso especial em que o sinal modulante é um tom simples (isto é, é senoidal) de frequência  $f_m$ ,

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

e é denominado *índice de modulação de frequência*.

# Largura de banda dos sinais FM e PM

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[\varphi(t)] = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] \\ &= \operatorname{Re}\{A_c e^{j[\omega_c t + \theta(t)]}\} = \operatorname{Re}[A_c e^{j\theta(t)} e^{j\omega_c t}] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\theta(t) = g[m(t)] = \begin{cases} k_p m(t), & \text{para sinais PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda, & \text{para sinais FM} \end{cases}$$

Série de Taylor/Maclaurin:  $e^{j\theta(t)} = 1 + j\theta(t) - \frac{1}{2}\theta^2(t) + \dots + j^n \frac{\theta^n(t)}{n!} + \dots$  (2)

Substituindo (2) em (1):

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos(\omega_c t) - A_c \theta(t) \operatorname{sen}(\omega_c t) \\ &\quad - \frac{A_c}{2} \theta^2(t) \cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{3!} \theta^3(t) \operatorname{sen}(\omega_c t) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

# Largura de banda dos sinais

## FM e PM (2)

$$\theta(t) = g[m(t)] = \begin{cases} k_p m(t), & \text{para sinais PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda, & \text{para sinais FM} \end{cases}$$

$m(t)$  → **Sistema L.I.T.** →  $\theta(t)$  ⇒  $B_\theta = B_m$  ⇒  $B_{\theta^n} = n B_\theta = n B_m$  (4)

$\theta^n(t) \cos(\omega_c t + \alpha_n)$   $\xrightarrow{F[\cdot]}$  réplica do espectro de  $\theta^n(t)$  centrada em  $f_c$  (5)

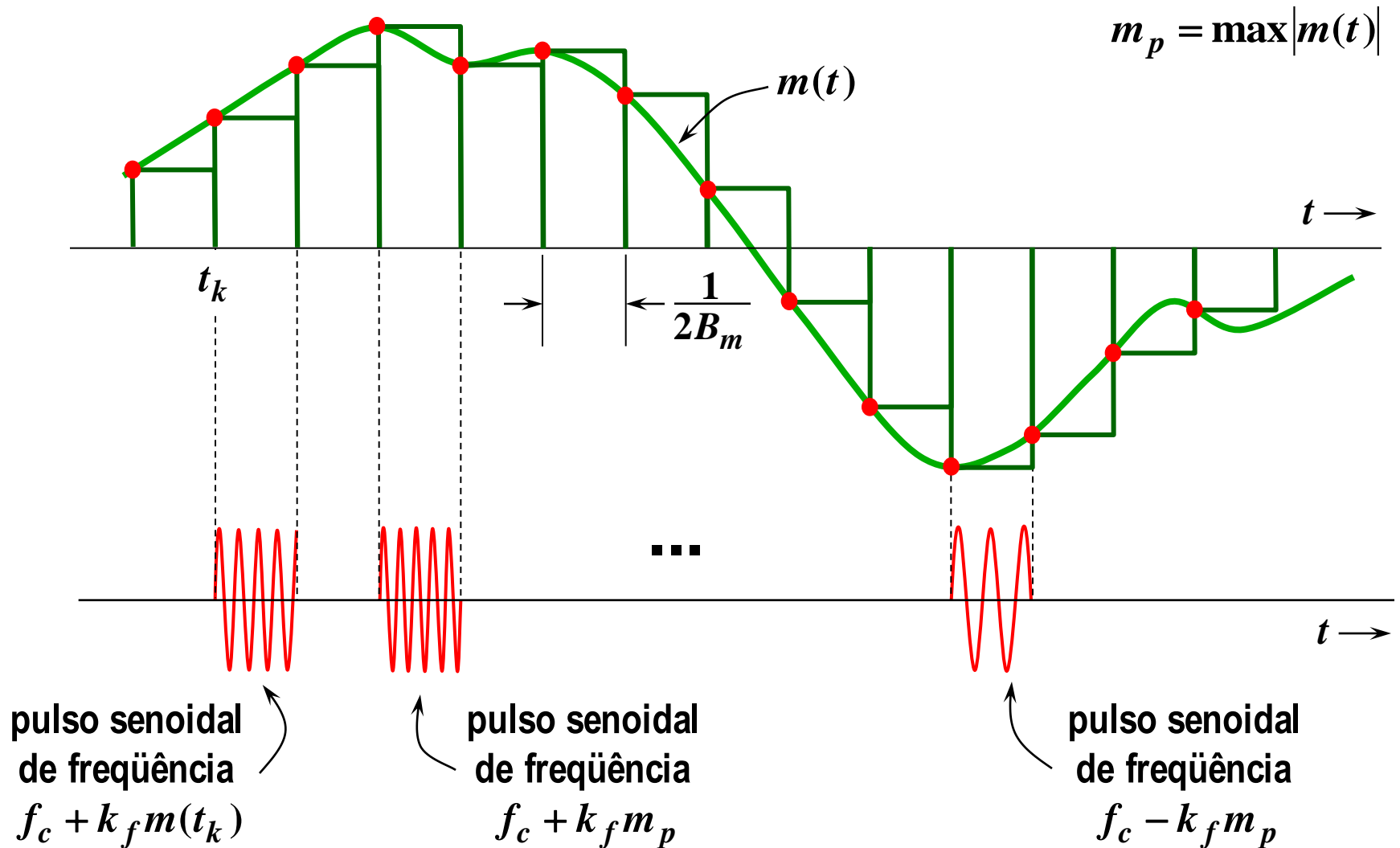
De (3) – (5) resulta que

$s(t)$   $\xrightarrow{F[\cdot]}$   $A_c \delta(f - f_c) +$  réplicas dos espectros de

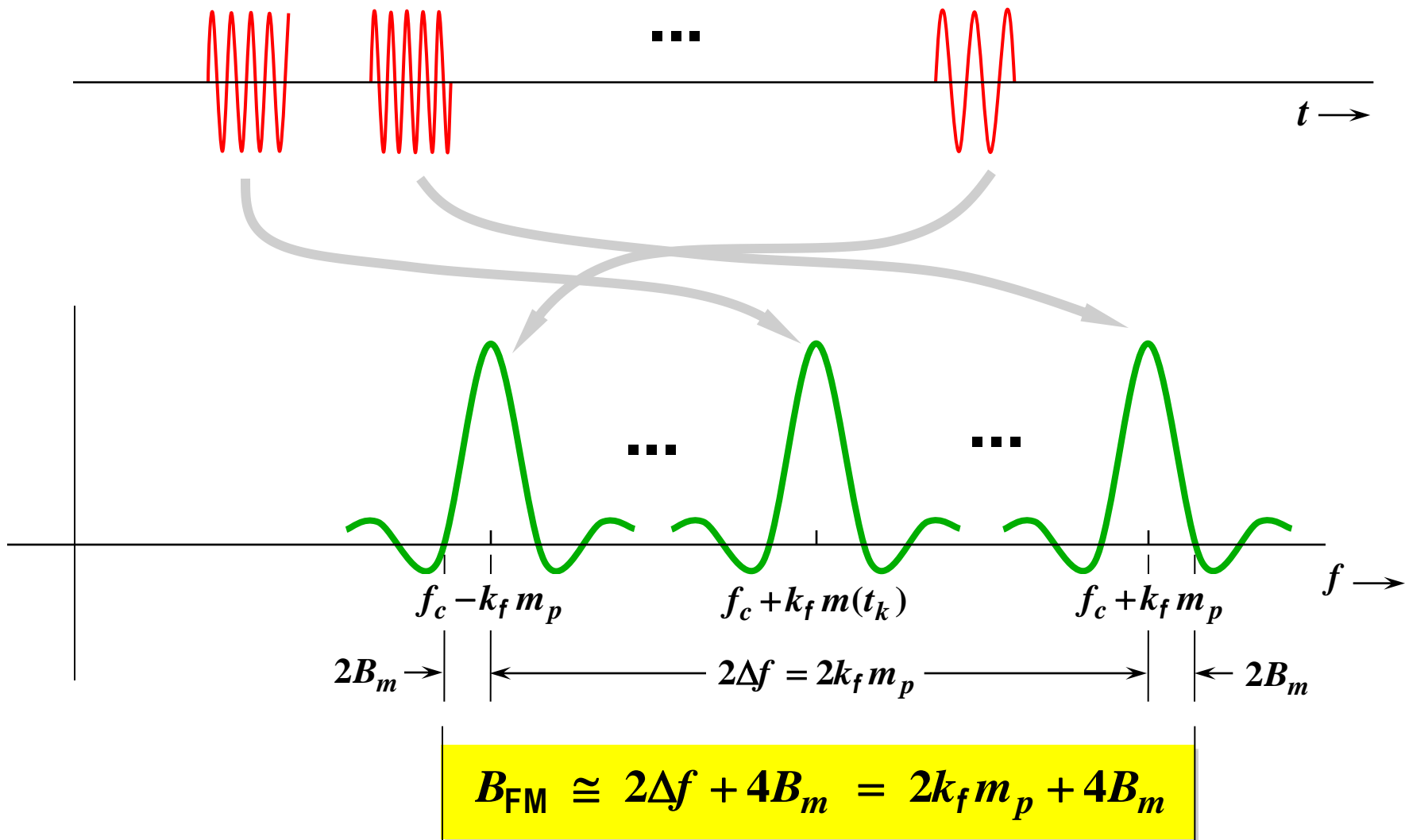
↙  $\theta(t), \theta^2(t), \dots, \theta^n(t), \dots$  centradas em  $f_c$

Os sinais FM e PM não são limitados frequencialmente: sua largura espectral é infinita. Além disso, o espectro de um sinal FM ou PM não tem uma relação simples com espectro do sinal modulante, como ocorre no caso dos sinais AM, DSB-SC, SSB ou VSB. Contudo, a maior parte da potência de um sinal FM ou PM está contida em uma banda de largura finita.

# Estimativa para a largura de banda de um sinal FM $1/3$



# Estimativa para a largura de banda de um sinal FM $2/3$



# Estimativa para a largura de banda de um sinal FM <sup>3/3</sup>

A estimativa  $(2\Delta f + 4B_m)$  para a largura de banda de um sinal FM é geralmente um pouco maior que o valor medido.  $(2\Delta f + 4B_m)$  é uma boa estimativa para a largura de banda do sinal FM quando o sinal modulante tem forma de onda tipo escada. Contudo,  $m(t)$  tem geralmente uma forma de onda bem mais suave, sem descontinuidades. Experimentalmente, se verifica que uma melhor estimativa é dada por

$$B_{\text{FM}} \cong 2\Delta f + 2B_m = (\beta + 1)2B_m$$

Essa estimativa é conhecida como *regra de Carson*.

Notar que: para  $\Delta f \gg B_m$ ,  $B_{\text{FM}} \cong 2\Delta f$

para  $\Delta f \ll B_m$ ,  $B_{\text{FM}} \cong 2B_m$  (sinal modulado de banda estreita)

Nos sinais FM,  $\Delta f$  é proporcional à amplitude de pico do sinal modulante  $m(t)$  e é independente da largura de banda de  $m(t)$ , portanto a largura de banda de um sinal FM de banda larga ( $\Delta f \gg B_m$ ) depende pouco do espectro de  $m(t)$ .



# Estimativa para a largura de banda de um sinal PM

A largura de banda de um sinal PM também pode ser estimada por

$$B_{\text{PM}} \cong 2\Delta f + 2B_m$$

Contudo, nesse caso, tem-se que

$$\Delta f = \frac{k_p}{2\pi} \max \left| \frac{dm(t)}{dt} \right| = \frac{k_p m'_p}{2\pi}$$

Nesse caso,  $\Delta f$  depende fortemente do espectro de frequência de  $m(t)$ , conseqüentemente a largura de banda de um sinal PM também depende fortemente do espectro de frequência de  $m(t)$ .

# Sinal PM de banda estreita

Seja

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c \hat{\theta}(t) \sin(\omega_c t)$$

onde

$$\hat{\theta}(t) = k_p m(t), \text{ com um valor de } k_p \text{ tal que } \hat{\theta}(t) \ll 1 \text{ p/ } \forall t$$

Logo,

$$\left. \begin{array}{l} s_I(t) = A_c \\ s_Q(t) = A_c \hat{\theta}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} = A_c \sqrt{1 + \hat{\theta}^2(t)} \cong A_c \\ \theta(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{s_Q(t)}{s_I(t)} \right] = \tan^{-1}[\hat{\theta}(t)] \cong \hat{\theta}(t) \end{array} \right.$$

Portanto,

$$s(t) \cong A_c \cos[\omega_c t + \hat{\theta}(t)] = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$$

ou seja,  $s(t)$  é um sinal PM.

# Largura de banda de um sinal PM de banda estreita

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos(\omega_c t) - A_c \theta(t) \sin(\omega_c t) \\ &= A_c \cos(\omega_c t) - A_c k_p m(t) \sin(\omega_c t) \end{aligned} \quad \hat{\theta}(t) = k_p m(t),$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] + j \frac{A_c k_p}{2} [M(f-f_c) - M(f+f_c)]$$

$$B_T = B_s = 2B_m$$

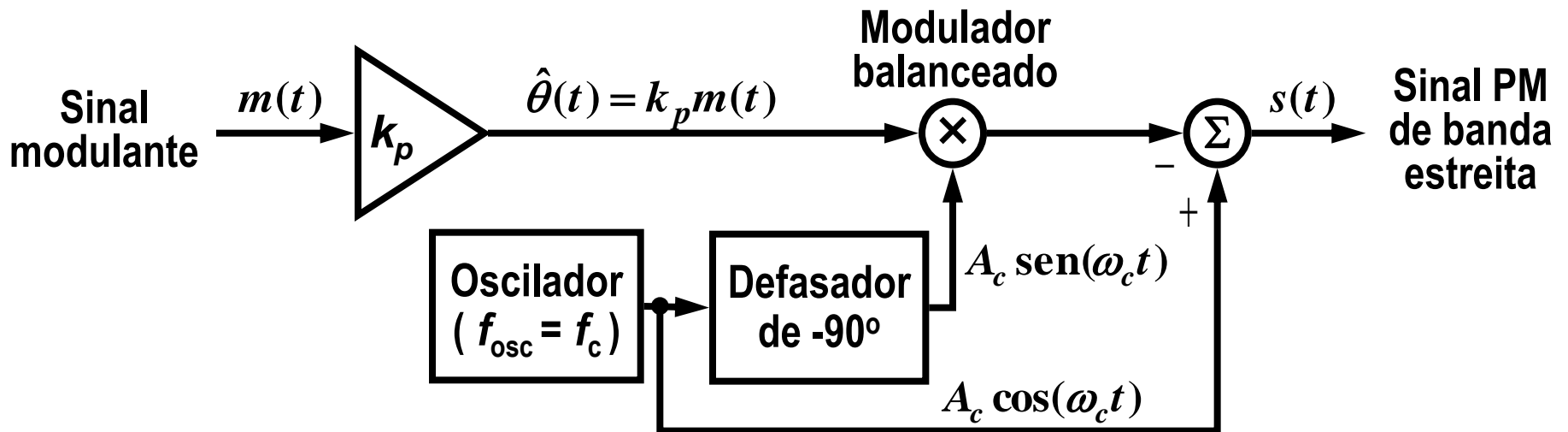
Note a semelhança entre um sinal PM de banda estreita e um sinal AM, que pode ser escrito da seguinte forma:  $s_{AM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_c k_a m(t) \cos(\omega_c t)$

Note, contudo, também as diferenças:

- o termo que gera as bandas laterais tem um deslocamento de fase de  $\pi/2$  com relação à portadora;
- no sinal AM, a fase de  $s_{AM}(t)$  é constante ( $\therefore, f_{\lambda}(t) = f_c$ ), a informação  $m(t)$  está na envoltória  $a(t)$  que, por isso, varia com o tempo; no sinal PM, a informação  $m(t)$  está na fase e  $f_{\lambda}(t) \cong f_c + k_p dm(t)/dt$  — a envoltória é constante (ou  $\approx$  constante).

# Geração de um sinal PM de banda estreita

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c k_p m(t) \sin(\omega_c t)$$



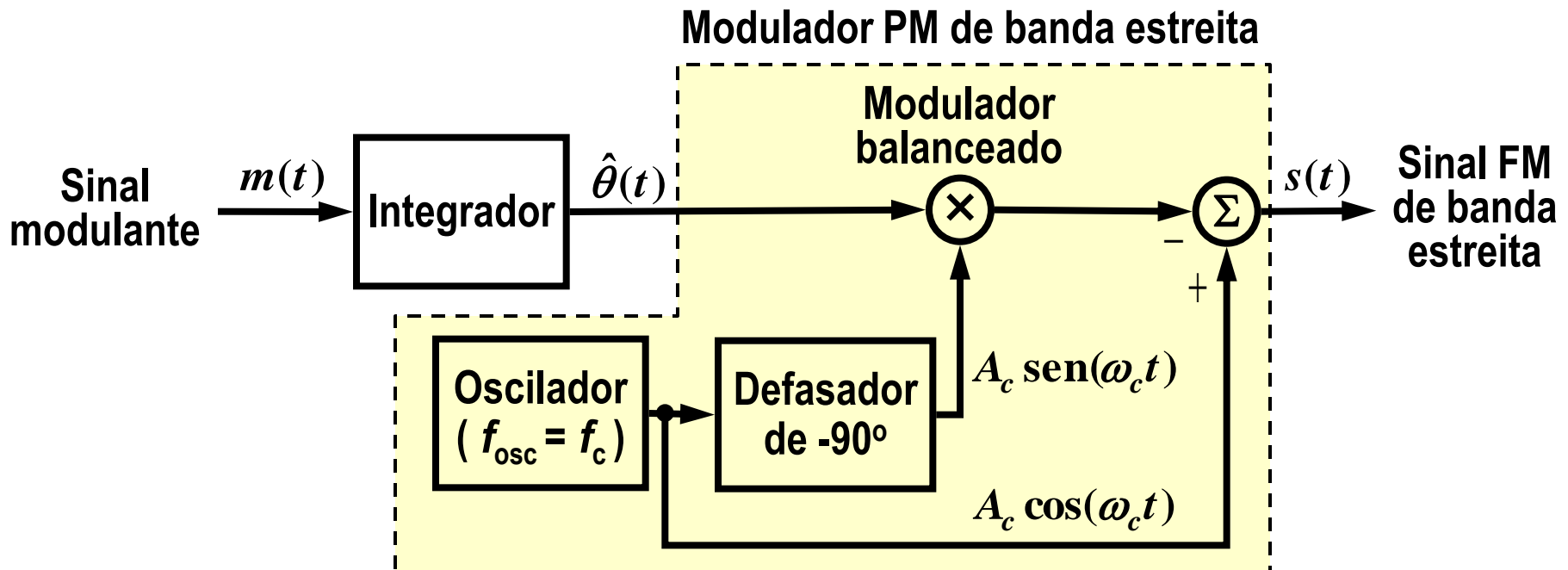
# Geração de um sinal FM de banda estreita

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c \theta(t) \sin(\omega_c t)$$

$$\Downarrow \hat{\theta}(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \sin(\omega_c t)$$

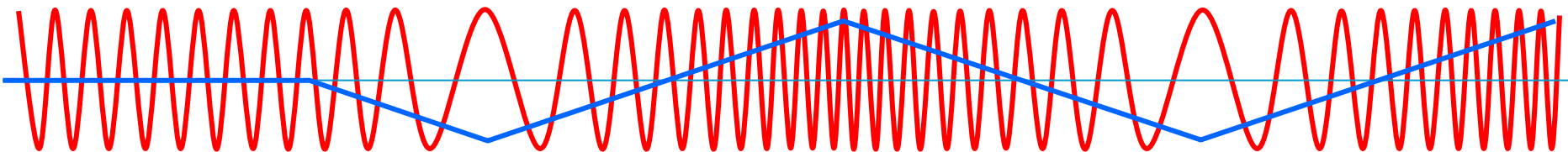
Sinal FM de banda estreita



## Potência de um sinal FM ou PM

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] \quad \theta(t) = \begin{cases} k_p m(t), & \text{para sinais PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda, & \text{para sinais FM} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_s &= \langle s^2(t) \rangle = \langle [A_c \cos(\omega_c t + \theta(t))]^2 \rangle = A_c^2 \langle \cos^2(\omega_c t + \theta(t)) \rangle \\ &= \frac{A_c^2}{2} \left[ 1 + \langle \cos(2\omega_c t + 2\theta(t)) \rangle \right] \\ &= \frac{A_c^2}{2} \quad \square \quad 1 \quad \text{para } B_m \ll f_c \\ &= \langle [A \cos(\omega_c t)]^2 \rangle = \text{pot. da portadora não - modulada} \end{aligned}$$



# Sinal FM com modulante tonal

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

$$\Delta f = k_f A_m, \quad \beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$$\theta(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda = \frac{k_f A_m}{f_m} \text{sen}(\omega_m t) \Rightarrow \theta(t) = \beta \text{sen}(\omega_m t)$$

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] = \text{Re} \{ A_c e^{j[\omega_c t + \theta(t)]} \} \Rightarrow s(t) = \text{Re} [ A_c e^{j\theta(t)} e^{j\omega_c t} ]$$

$$e^{j\theta(t)} = e^{j\beta \text{sen}(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t}$$

Sinal periódico,  
com período  
 $1/f_m = 2\pi/\omega_m$

Série de Fourier

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \text{sen}(\omega_m t)} e^{-jn\omega_m t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \text{sen} x - nx)} dx \\ &= J_n(\beta) \end{aligned}$$

Funções de Bessel de  
1ª espécie e de ordem  $n$

$$s(t) = \text{Re} \left\{ A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_c + n\omega_m)t} \right\} \Rightarrow s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_c + n\omega_m)t]$$

# Sinal FM com modulante tonal

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}$$

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

$$= A_c J_0(\beta) \cos(2\pi f_c t)$$

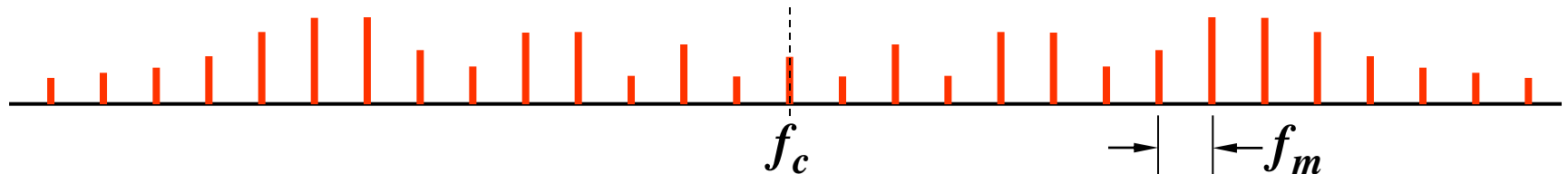
$$+ A_c J_1(\beta) \{ \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \}$$

$$+ A_c J_2(\beta) \{ \cos[2\pi(f_c + 2f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - 2f_m)t] \}$$

$$+ A_c J_3(\beta) \{ \cos[2\pi(f_c + 3f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - 3f_m)t] \}$$

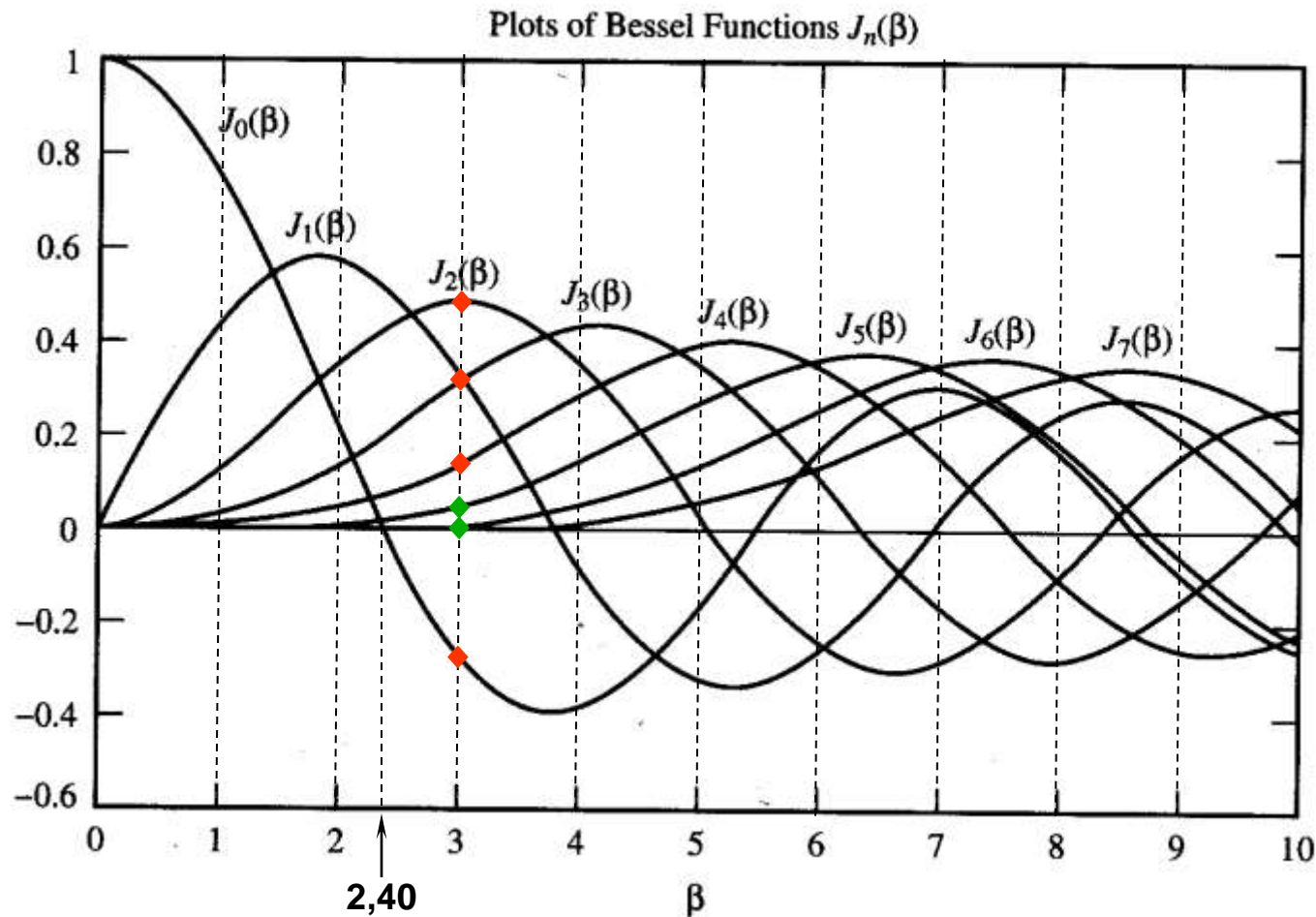
+ ...

Número  
infinito  
de raios  
laterais





# Funções de Bessel

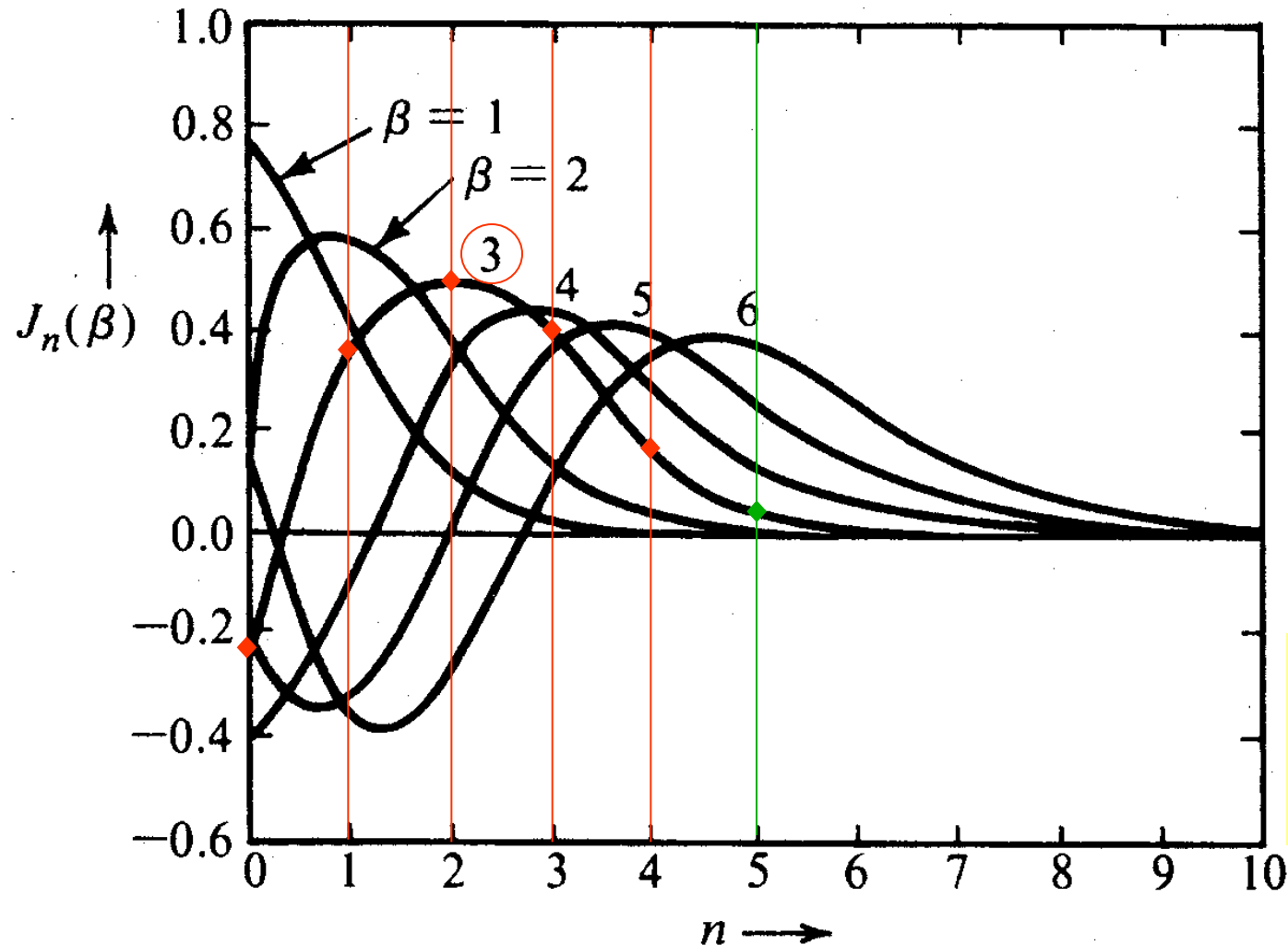


## Propriedades das funções de Bessel de primeiro espécie:

- $J_n(\beta)$  é real para todo  $\beta$ .
- $J_{-n}(\beta) = J_n(\beta)$  para  $n$  par.
- $J_{-n}(\beta) = -J_n(\beta)$  para  $n$  ímpar.

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

# Funções de Bessel



$J_n(\beta)$  pode ser considerado desprezível para  $n > \beta + 1$



O número de raios laterais significativas é  $2 \times (\beta + 1)$



$$B_{\text{FM}} \cong 2 \times (\beta + 1) f_m$$
$$\cong 2\Delta f + 2f_m$$

# Largura de banda de um sinal FM com modulante tonal

$J_n(\beta)$  pode ser considerado desprezível para  $n > \beta + 1$

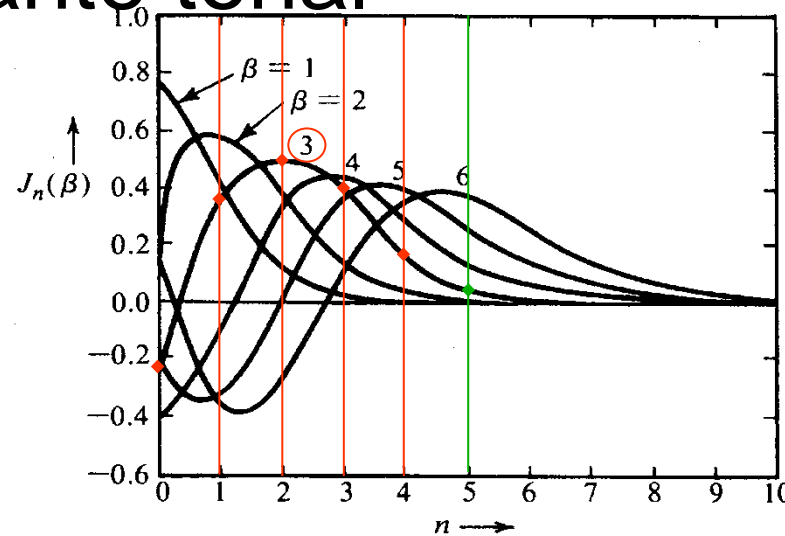


O número de raias laterais significativas é  $2 \times (\beta + 1)$

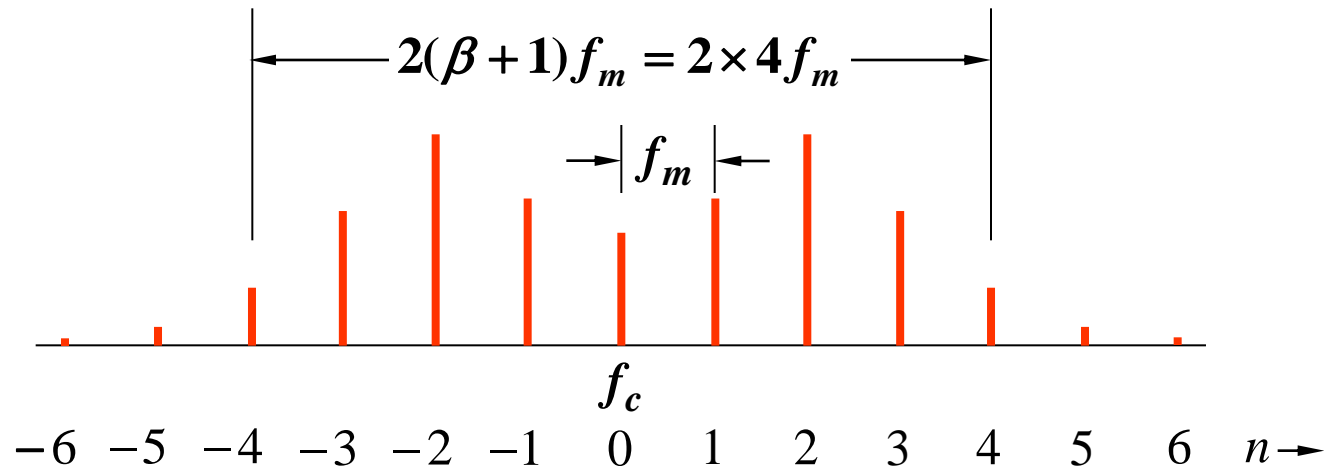


$$B_{FM} \cong 2 \times (\beta + 1) f_m$$

$$\cong 2\Delta f + 2f_m$$



Exemplo:  $\beta = 3$



# Tabela de valores das funções de Bessel

**TABLE 5-1** VALUES OF THE BESSEL FUNCTION  $J_n(\beta)$ .

$n$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$
0	0.997	0.990	0.938	0.765	0.224	-0.178	0.172	-0.246
1	0.050	0.100	0.242	<u>0.440</u>	<u>0.577</u>	-0.328	0.235	0.043
2	0.001	0.005	0.031	<u>0.115</u>	<u>0.353</u>	0.047	-0.113	0.255
3				<u>0.020</u>	<u>0.129</u>	0.365	-0.291	0.058
4				0.002	<u>0.034</u>	<u>0.391</u>	-0.105	-0.220
5					0.007	<u>0.261</u>	0.186	-0.234
6					0.001	<u>0.131</u>	0.338	-0.014
7						<u>0.053</u>	<u>0.321</u>	0.217
8						0.018	<u>0.223</u>	<u>0.318</u>
9						0.006	<u>0.126</u>	<u>0.292</u>
10						0.001	0.061	0.207
11							0.026	<u>0.123</u>
12							0.010	0.063
13							0.003	0.029
14							0.001	0.012
15								0.004
16								0.001

From Ziemer and Tranter (1990) © Houghton Mifflin, reprinted by permission.

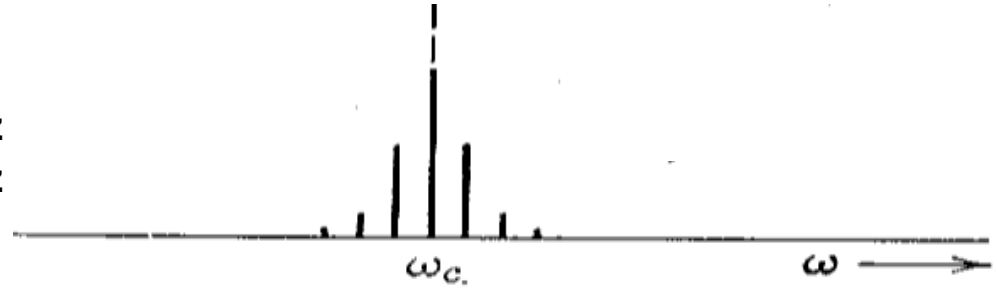
# Espectros de sinais FM para sinais modulantes tonais

$$\Delta f = k_f m_p$$

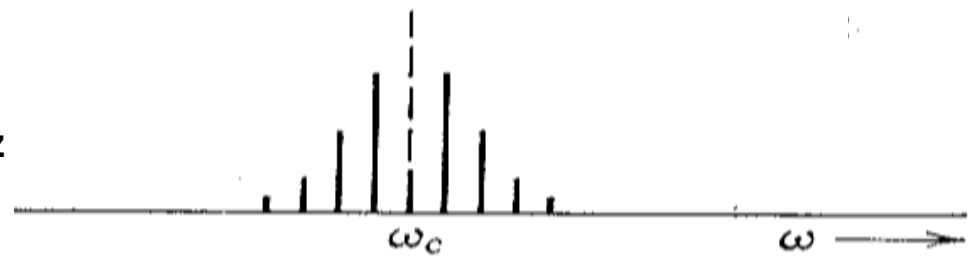
$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$$= \frac{k_f m_p}{f_m}$$

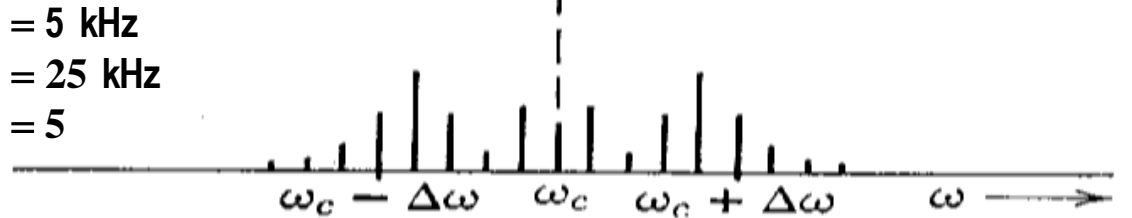
$f_m = 5 \text{ kHz}$   
 $\Delta f = 5 \text{ kHz}$   
 $\beta = 1$



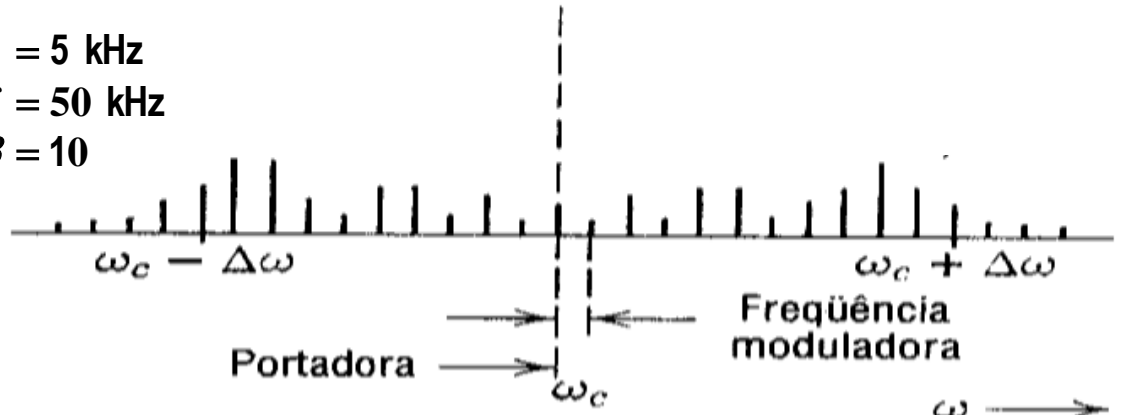
$f_m = 5 \text{ kHz}$   
 $\Delta f = 10 \text{ kHz}$   
 $\beta = 2$



$f_m = 5 \text{ kHz}$   
 $\Delta f = 25 \text{ kHz}$   
 $\beta = 5$



$f_m = 5 \text{ kHz}$   
 $\Delta f = 50 \text{ kHz}$   
 $\beta = 10$



# Espectros de sinais FM para sinais modulantes tonais

$$\Delta f = k_f m_p$$

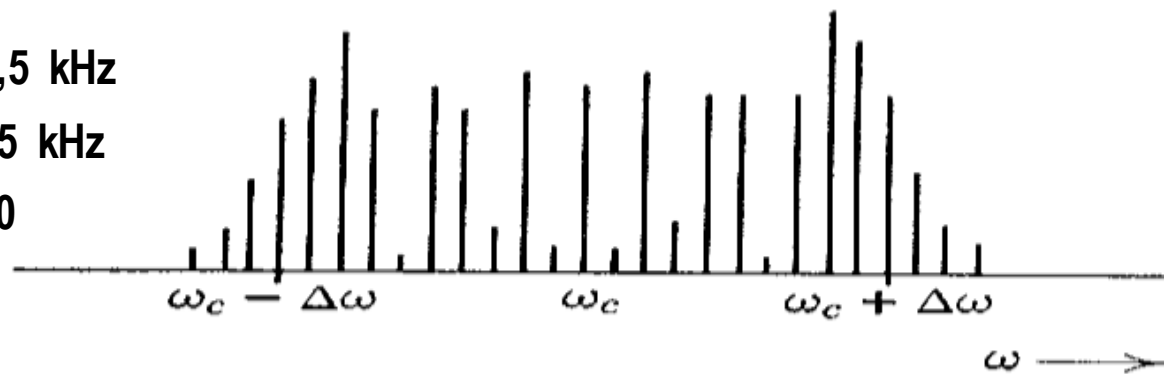
$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$$= \frac{k_f m_p}{f_m}$$

$$f_m = 7,5 \text{ kHz}$$

$$\Delta f = 75 \text{ kHz}$$

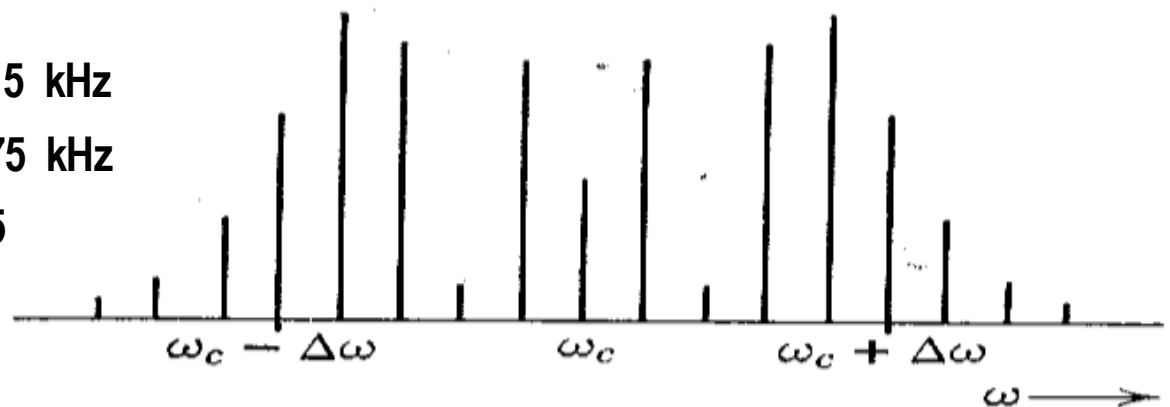
$$\beta = 10$$



$$f_m = 15 \text{ kHz}$$

$$\Delta f = 75 \text{ kHz}$$

$$\beta = 5$$



## Potência de um sinal FM com modulante tonal

$$s_{\text{FM}}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

$$\begin{aligned} P_{\text{FM}} &= \langle s_{\text{FM}}^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle [A_c J_n(\beta) \cos(\omega_c + n \omega_m)t]^2 \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_c^2 J_n^2(\beta)}{2} \\ &= \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \\ &= \langle [A \cos(\omega_c t)]^2 \rangle = \text{pot. da portadora não - modulada} \end{aligned}$$

# Imunidade da modulação angular à não-linearidades



$$x(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] + a_2 A_c^2 \cos^2[\omega_c t + \theta(t)] \\ &= \frac{a_2 A_c^2}{2} + a_1 A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] + \frac{a_2 A_c^2}{2} \cos[2\omega_c t + 2\theta(t)] \end{aligned}$$

Para sinais FM  $\theta(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$  e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_2 A_c^2}{2} + a_1 A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda\right] \\ &\quad + \frac{a_2 A_c^2}{2} \cos\left[2\omega_c t + 4\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda\right] \end{aligned}$$



# Imunidade da modulação angular à não-linearidades

$$y(t) = \frac{a_2 A_c^2}{2} + a_1 A_c \cos \left[ \omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] + \frac{a_2 A_c^2}{2} \cos^2 \left[ 2\omega_c t + 4\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right]$$

Sinal FM original:

freq. da portadora =  $f_c$

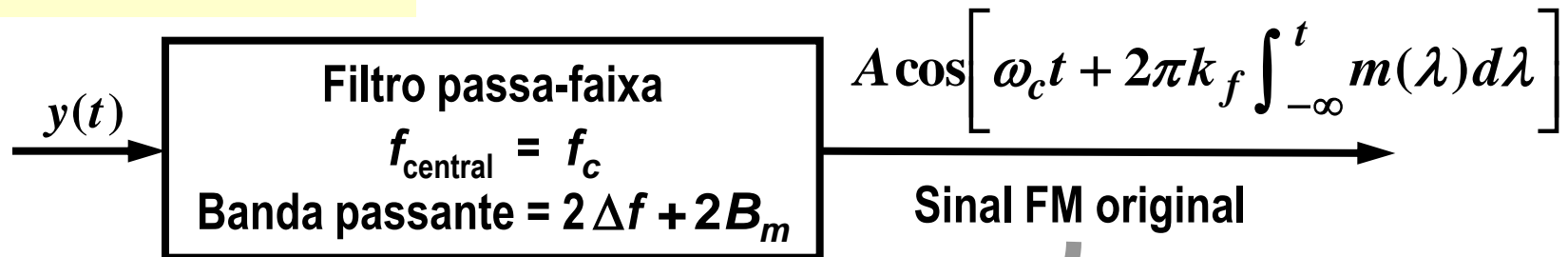
desvio de freq. =  $\Delta f$

Sinal FM adicional:

freq. da portadora =  $2f_c$

desvio de freq. =  $2\Delta f$

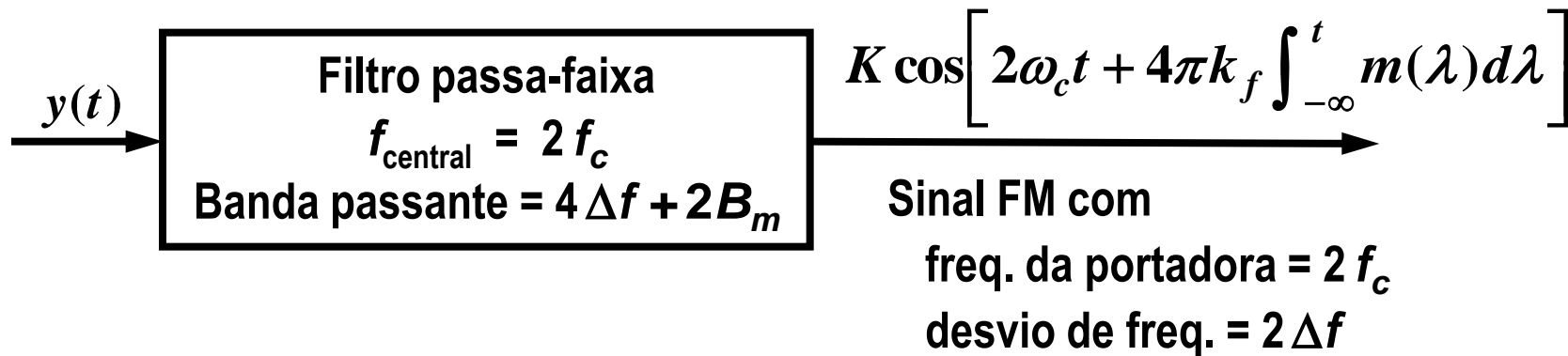
Note que a informação  $m(t)$  está intacta em ambos os sinais FM: a não linearidade não distorce a informação.



Desde que  $2f_c - (2\Delta f + B_m) > f_c + (\Delta f + B_m)$

# Imunidade da modulação angular à não-linearidades

$$y(t) = \frac{a_2 A_c^2}{2} + a_1 A_c \cos \left[ \omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] + \frac{a_2 A_c^2}{2} \cos^2 \left[ 2\omega_c t + 4\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right]$$



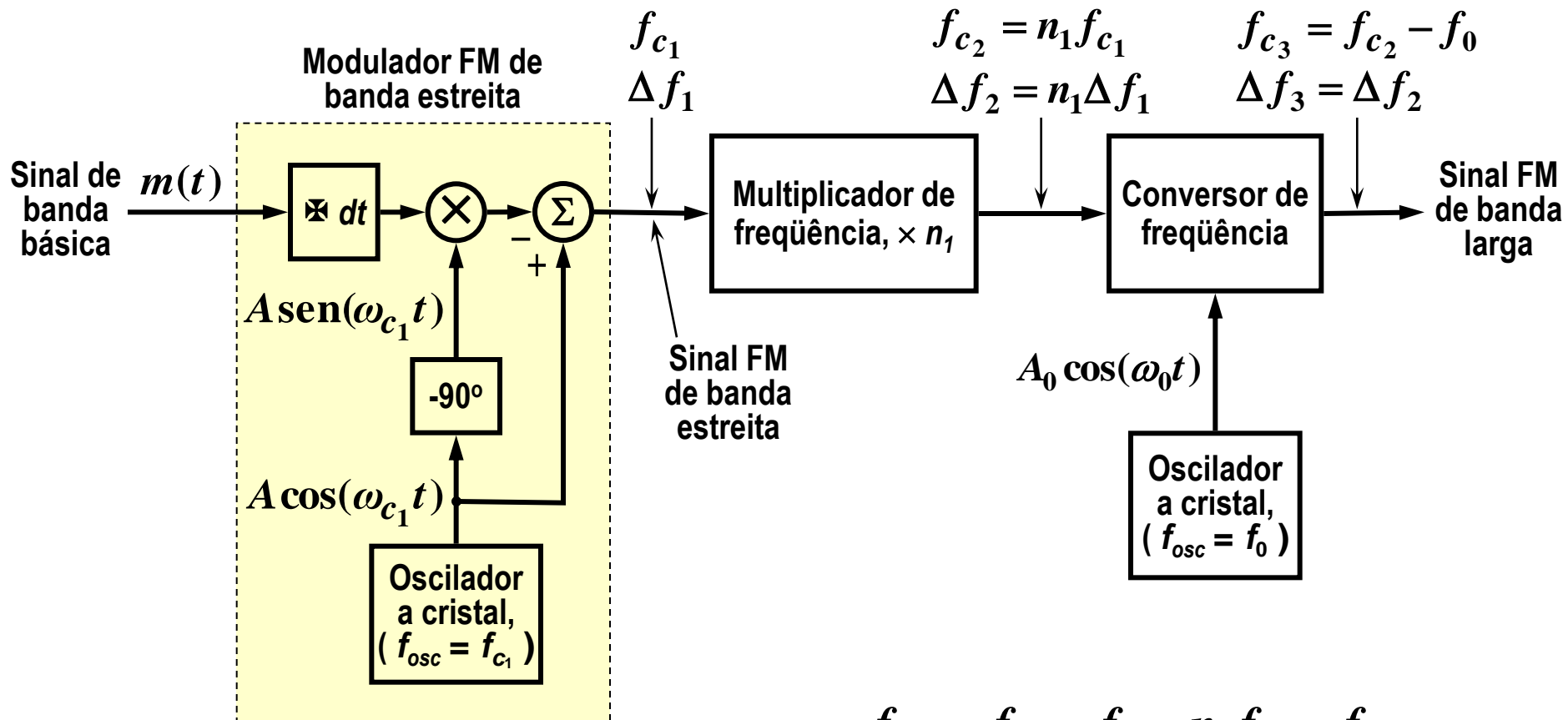
Dispositivos não-lineares podem ser usados para aumentar a frequência da portadora bem como o desvio de frequência.

Desde que

$$2f_c - (2\Delta f + B_m) > f_c + (\Delta f + B_m)$$

Veja pp. 228-229 do Lathi

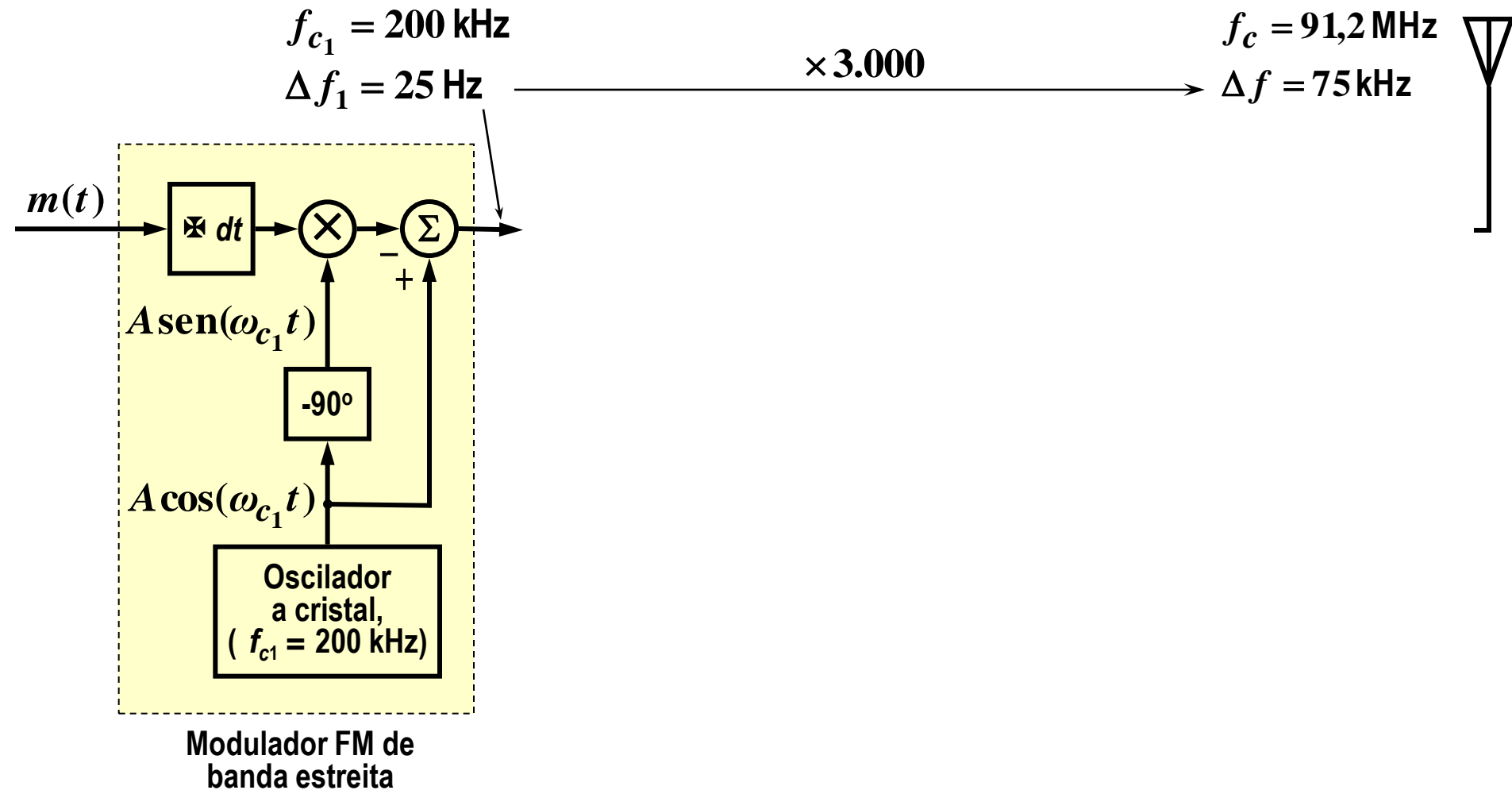
# Geração de sinais FM: método indireto de Armstrong



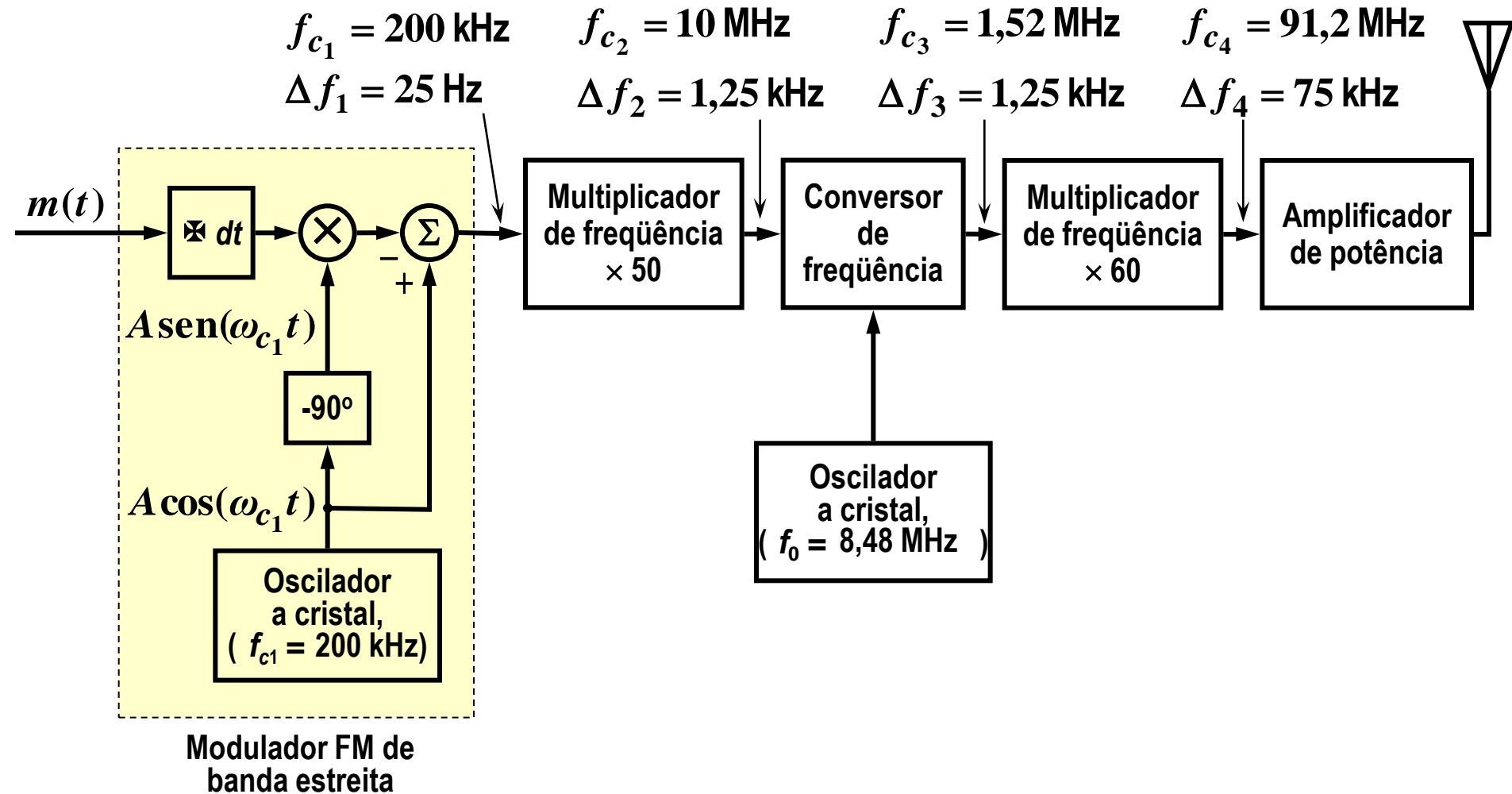
$$f_{c_3} = f_{c_2} - f_0 = n_1 f_{c_1} - f_0$$

$$\Delta f_3 = \Delta f_2 = n_1 \Delta f_1$$

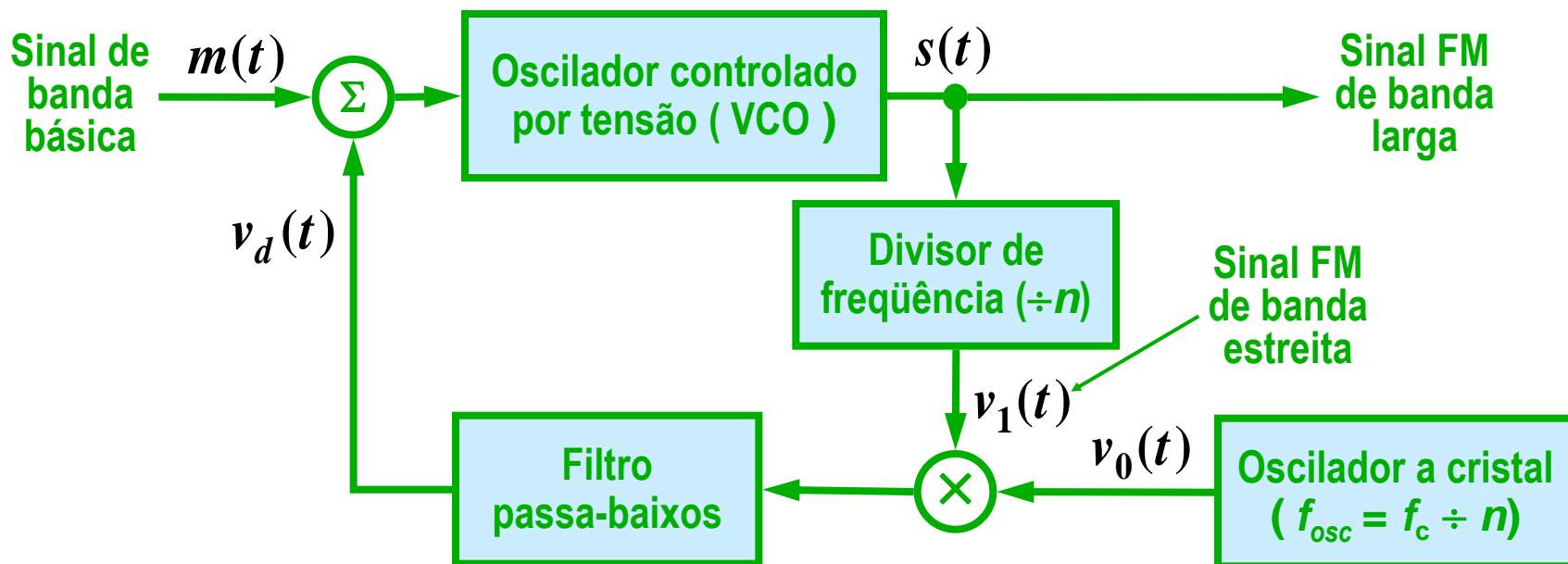
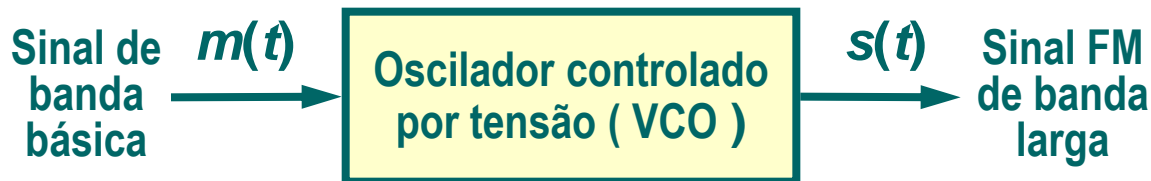
# Geração de sinais FM: método indireto de Armstrong



# Geração de sinais FM: método indireto de Armstrong



# Geração de sinais FM: método direto

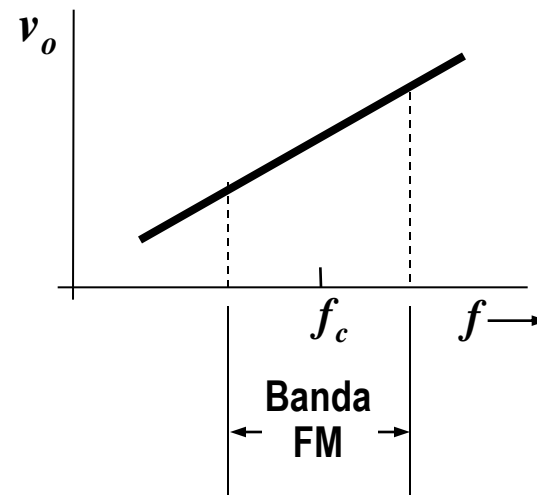
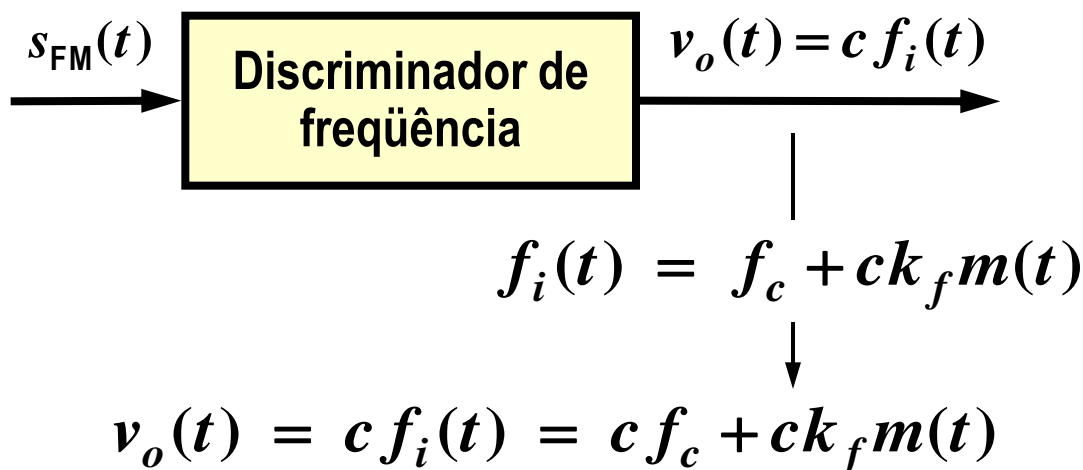


Geração direta de um sinal FM com um esquema de realimentação para estabilização da frequência da portadora.

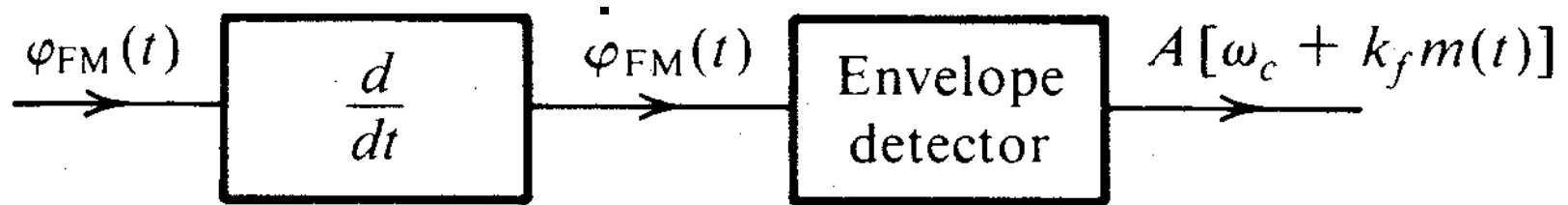
# Demodulação de sinais FM

- Método direto – ex.: discriminador de frequência
- Método indireto – ex.: PLL (*phase-locked loop*)

## Discriminador de frequência:



# Demodulação de sinais FM: discriminador de frequência



$$\dot{\varphi}_{FM}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ A \cos \left[ \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \right] \right\}$$

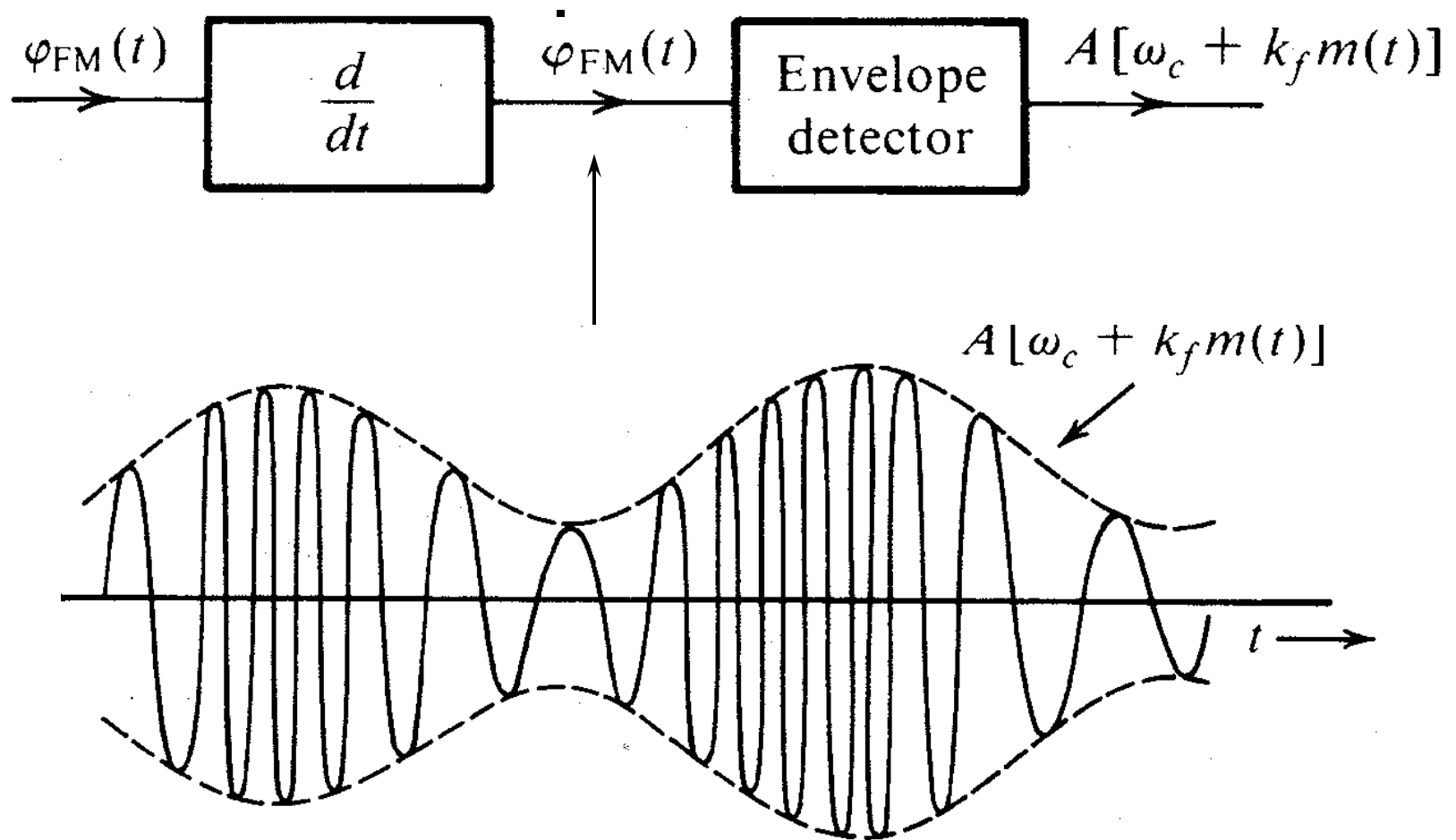
$$= A [\omega_c + k_f m(t)] \sin \left[ \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d(\alpha) \right]$$

$$a(t) = A |\omega_c + k_f m(t)| \xrightarrow{\Delta\omega = k_f m_p < \omega_c} a(t) = A [\omega_c + k_f m(t)]$$

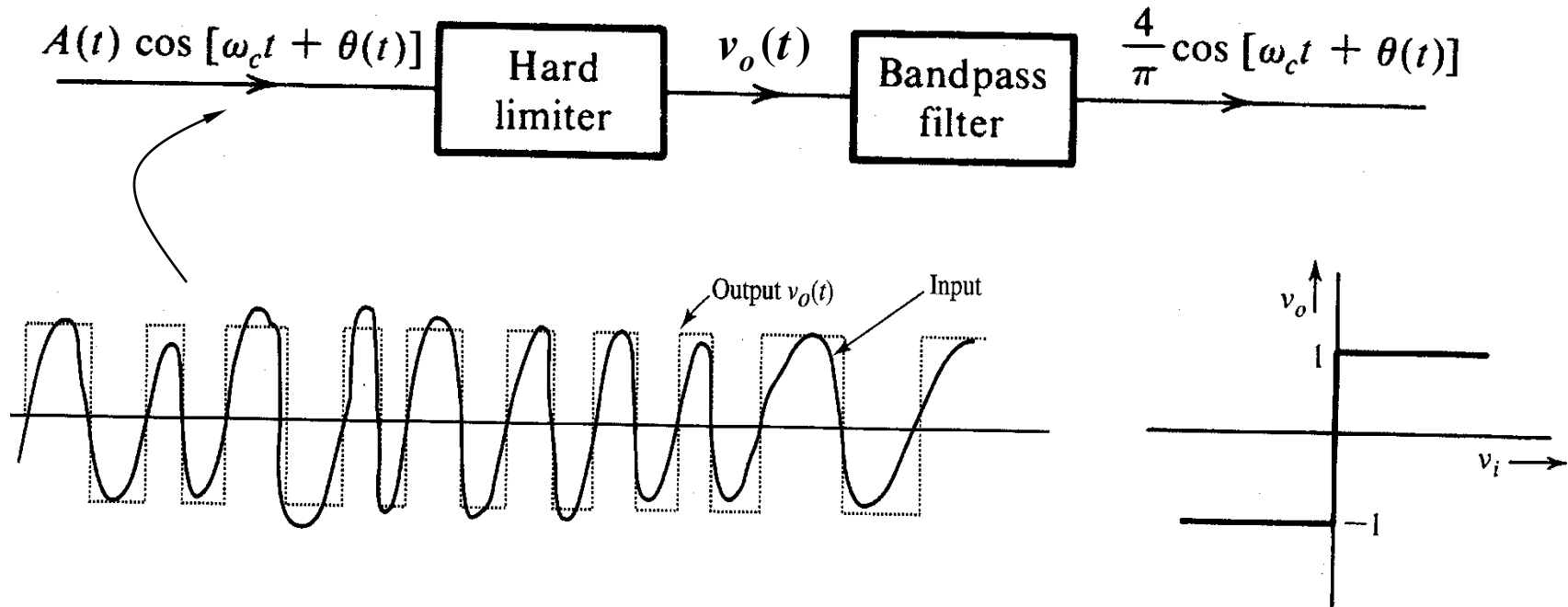
↑  
envoltória de  $\dot{\varphi}_{FM}(t)$



# Demodulação de sinais FM: discriminador de frequência

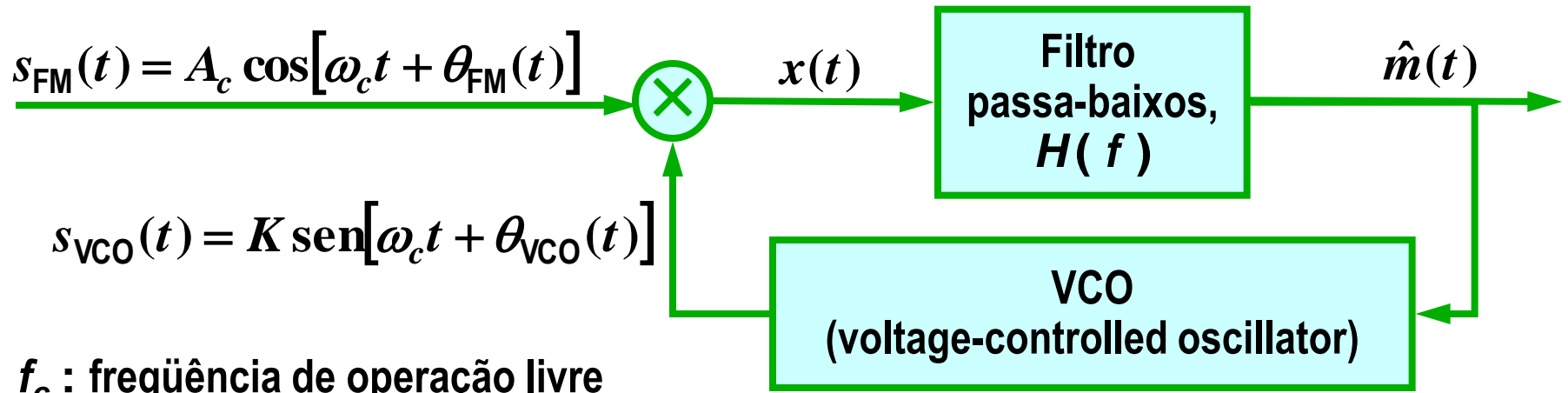


# Limitador passa-faixa



$$v_o(t) = \frac{4}{\pi} \cos\left[\omega_c t + k_f \int m(\lambda) d\lambda\right] - \frac{4}{3\pi} \cos\left[3\omega_c t + 3k_f \int m(\lambda) d\lambda\right] + \frac{4}{5\pi} \cos\left[5\omega_c t + 5k_f \int m(\lambda) d\lambda\right] - \dots$$

# Demodulação de sinais FM usando PLL



$$f_{VCO}(t) = f_c + k_{VCO} \hat{m}(t)$$

$$f_{VCO}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \theta_{VCO}(t)] = f_c + \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}_{VCO}(t) \left. \vphantom{f_{VCO}(t)} \right\} \Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{1}{2\pi k_{VCO}} \dot{\theta}_{VCO}(t)$$

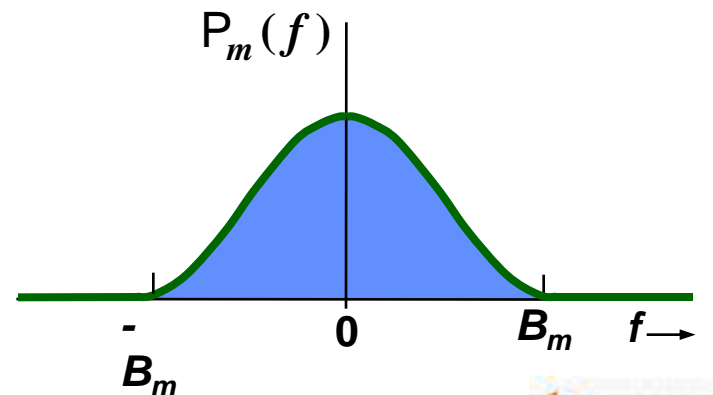
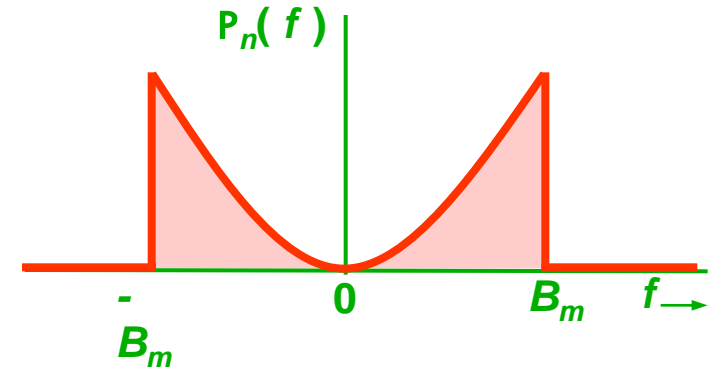
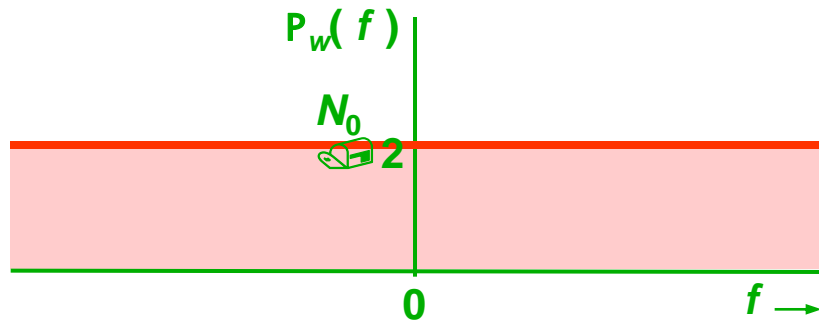
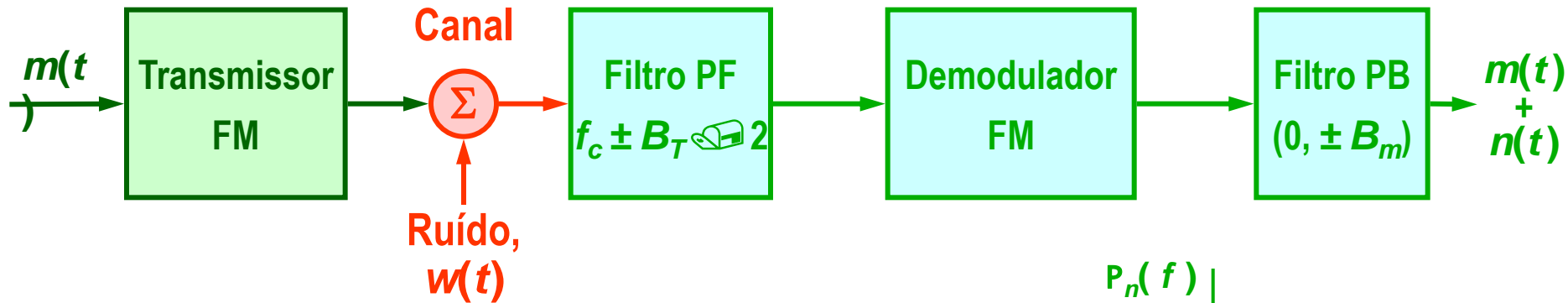
$$\theta_{VCO}(t) = \theta_{FM}(t) + \theta_e(t)$$

$$\theta_{FM}(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

$$\hat{m}(t) = \frac{k_f}{k_{VCO}} m(t) - \frac{1}{2\pi k_{VCO}} \dot{\theta}_e(t)$$

$$\cong \frac{k_f}{k_{VCO}} m(t)$$

# Uso de pré-ênfase e deênfase em sistemas FM <sup>1/3</sup>



# Uso de pré-ênfase e deênfase em sistemas FM<sub>2/3</sub>

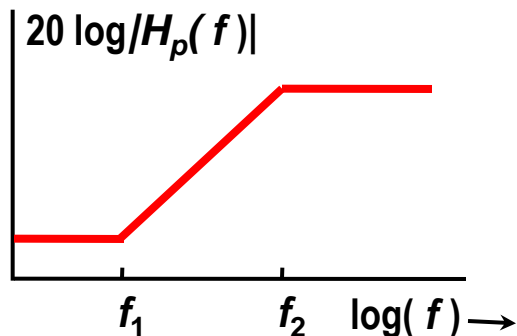
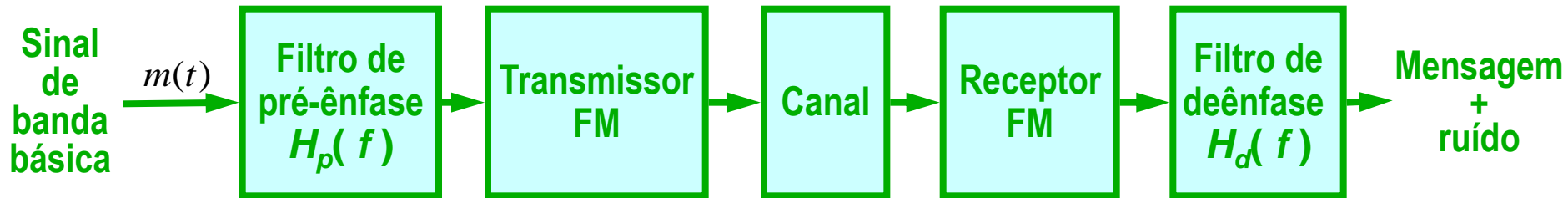


Diagrama de Bode da característica de pré-ênfase

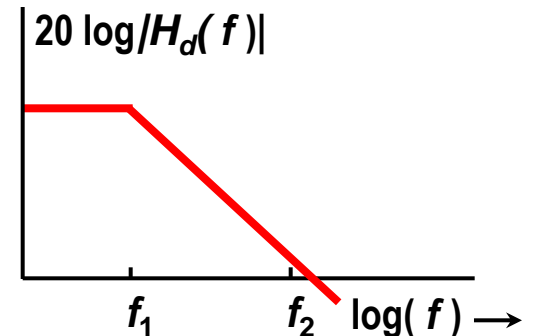
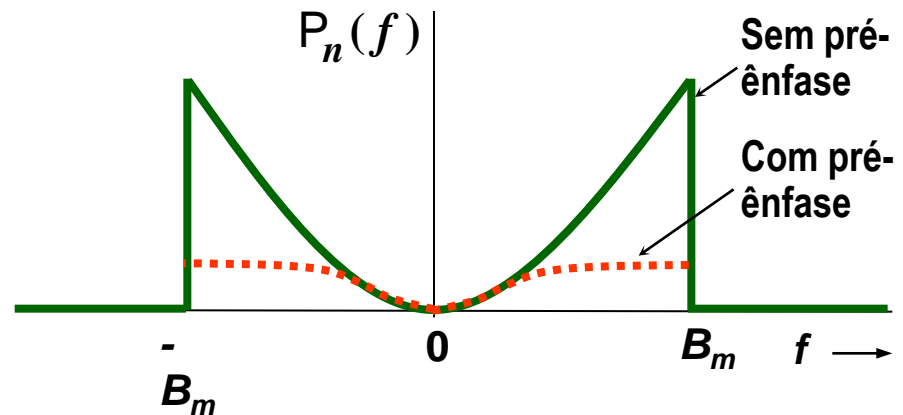


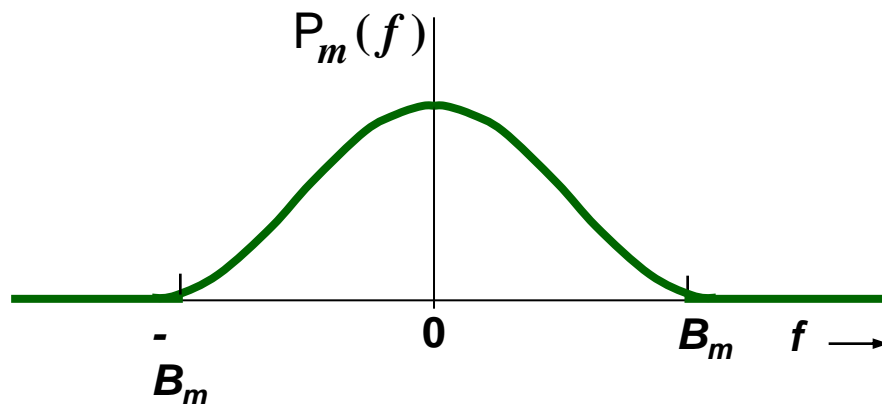
Diagrama de Bode da característica de deênfase

# Uso de pré-ênfase e deênfase em sistemas FM <sub>3/3</sub>

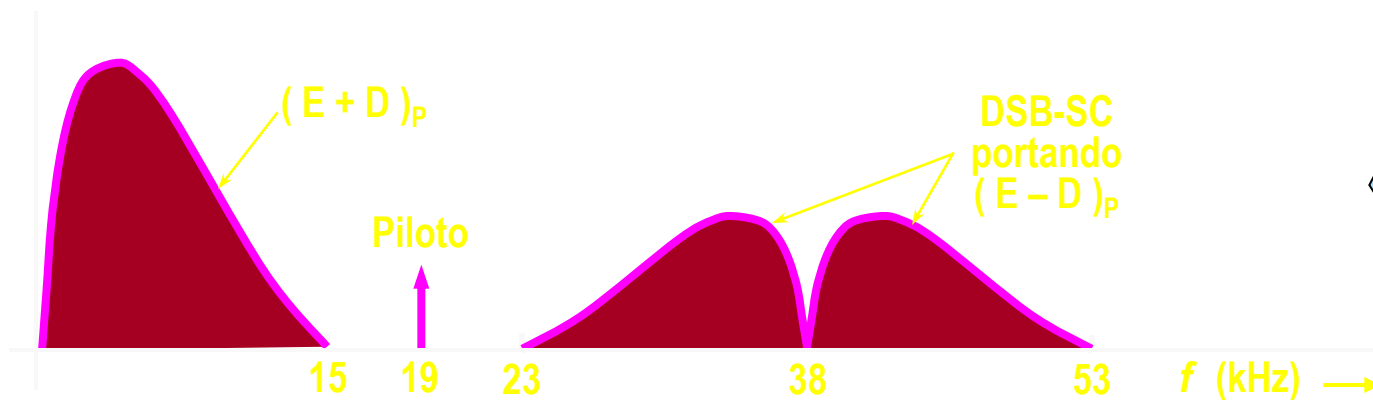
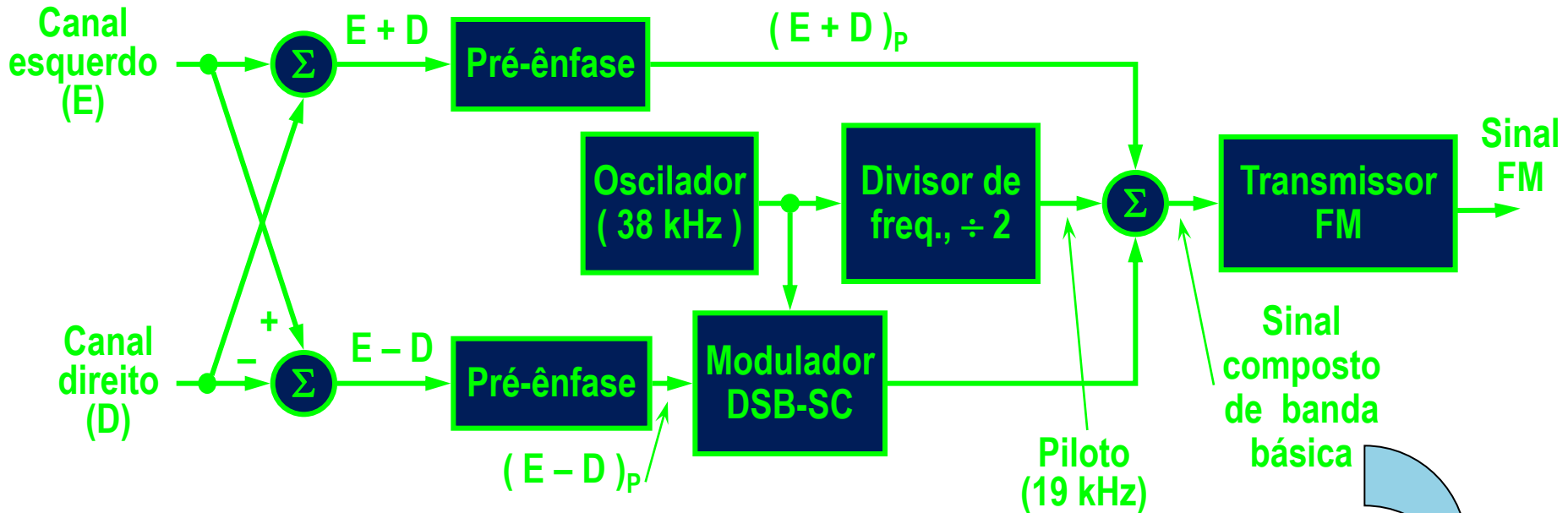
Espectro de potência do ruído na saída de um demodulador FM



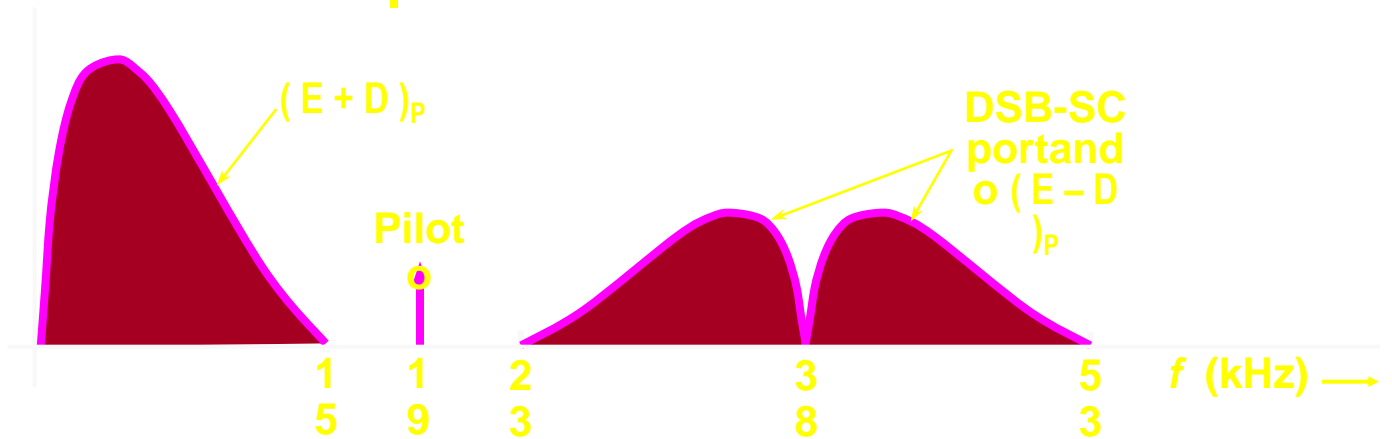
Espectro de potência típico de um sinal-mensagem



# Sistema FM estereofônico: transmissor

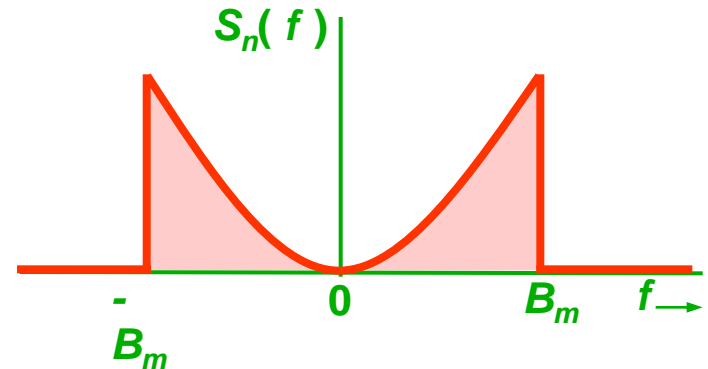
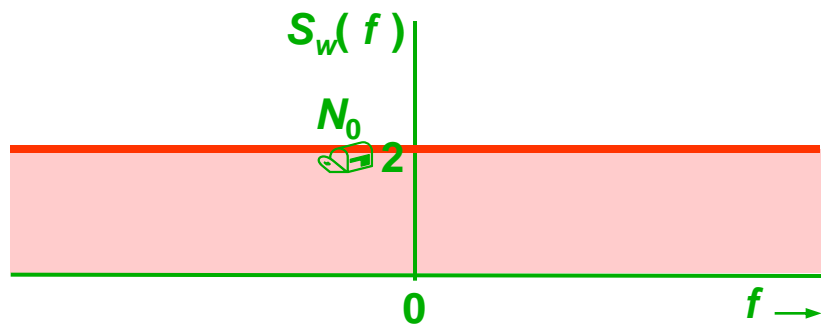
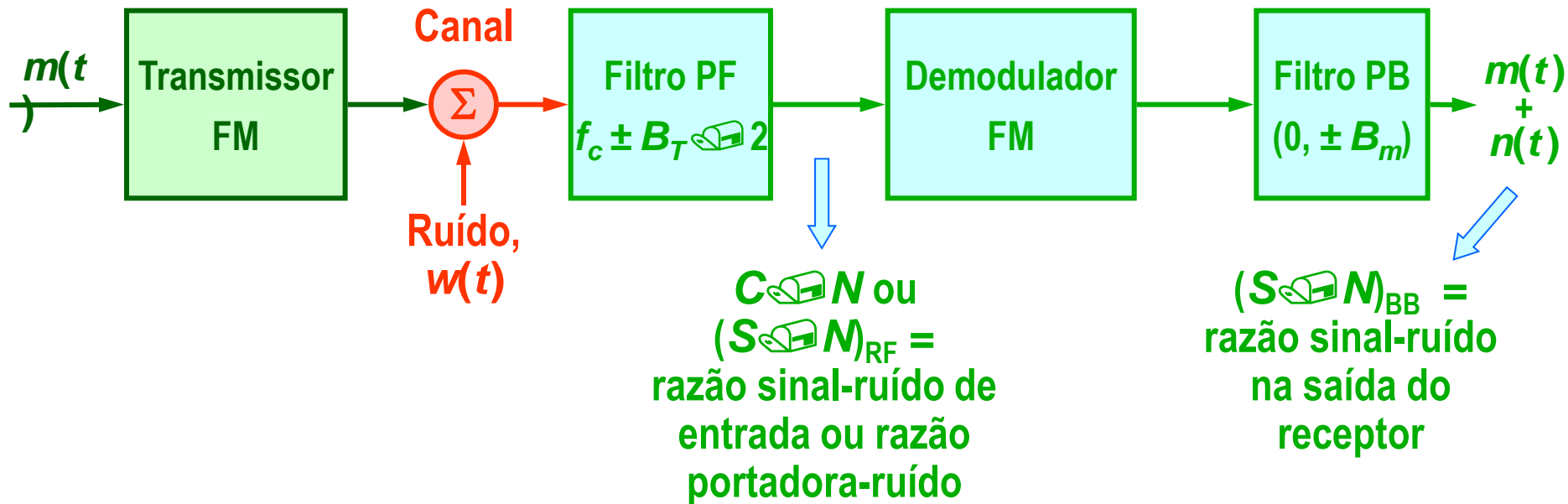


# Sistema FM estereofônico: receptor





# Desempenho da modulação FM na presença de ruído



# Desempenho da modulação FM na presença de ruído

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{RF}} = \frac{\text{Potência média do sinal FM}}{\text{Potência média do ruído na banda do sinal FM}} = \frac{P_s}{N_0 B_T} = \frac{A_c^2}{2N_0 B_T}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{BB}} = \frac{\text{Potência média do sinal-mensagem na saída do receptor FM}}{\text{Potência média do ruído na saída do receptor FM}} = \frac{P_m}{P_n}$$

Pode-se mostrar que

$$\frac{(S/N)_{\text{BB}}}{(S/N)_{\text{RF}}} = \frac{3B_T (\Delta f_{\text{rms}})^2}{f_2^3 - f_1^3}$$

onde

$B_T$  = largura de banda de transmissão requerida pelo sinal FM

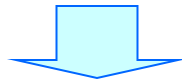
$\Delta f_{\text{rms}}$  = valor r.m.s. do desvio instantâneo de frequência

$[f_1, f_2]$  = banda básica  $\rightarrow f_2 - f_1 = B_m$

# Desempenho da modulação FM na presença de ruído:

sinal modulante tonal  $\leftarrow f_m$

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta f_{\text{rms}} = \sqrt{\langle [k_f m(t)]^2 \rangle} = \frac{k_f A_m}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta f}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$$\frac{(S/N)_{\text{BB}}}{(S/N)_{\text{RF}}} = \frac{3B_T (\Delta f_{\text{rms}})^2}{f_2^3 - f_1^3} = \frac{3 B_T (\Delta f)^2}{2 f_m^3}$$

$\frac{\Delta f}{f_m} = \beta$   
 $B_T = (\beta + 1) 2 f_m$   
 $\beta \gg 1$

$$= 3(1 + \beta) \beta^2$$

$$\cong 3\beta^3$$

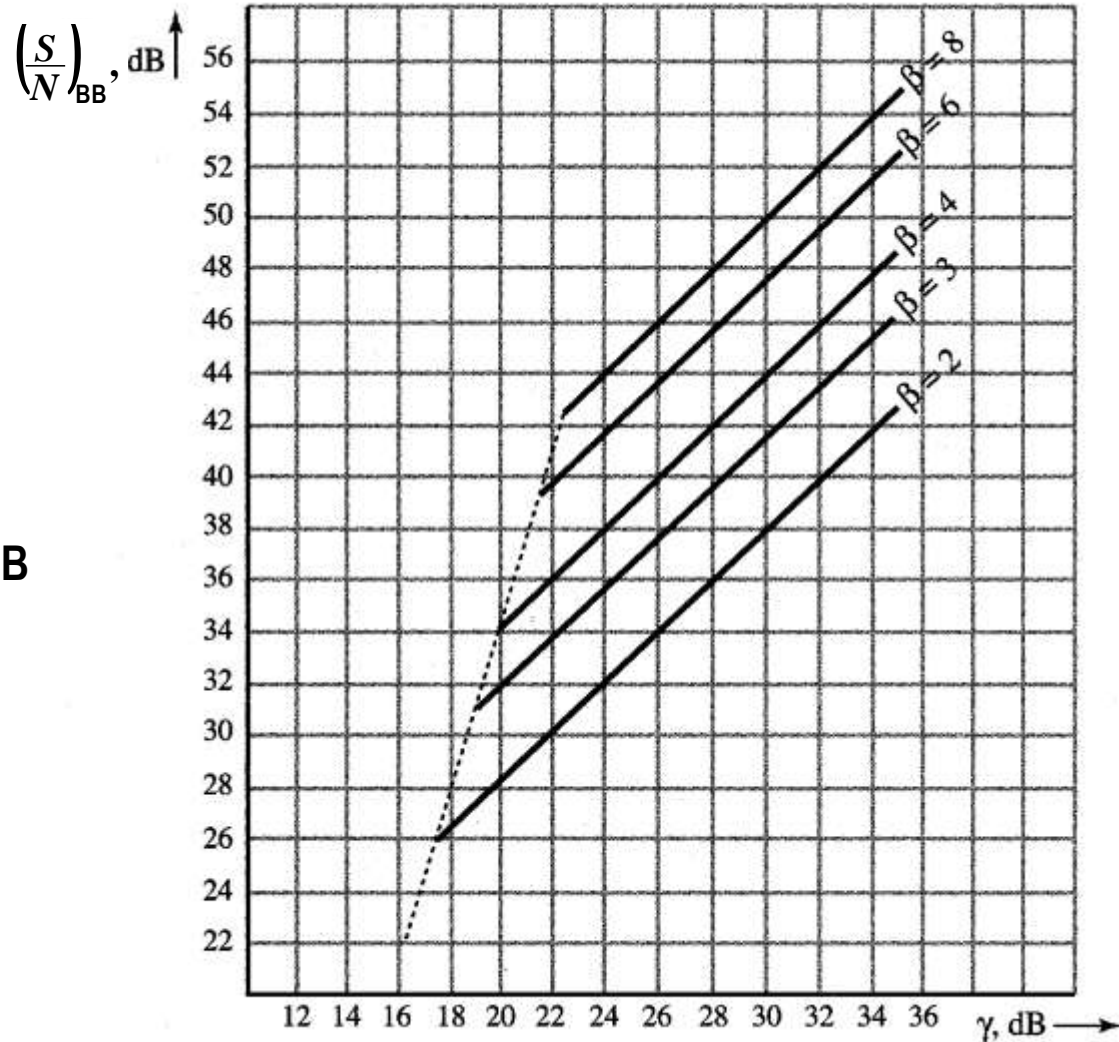
$$N_{\text{RF}} = B_T N_0 \cong 2\beta B_m N_0$$

$$\frac{(S/N)_{\text{BB}}}{(S/N)_{\text{RF-BB}}} = \frac{(S/N)_{\text{BB}}}{P_s / (B_m N_0)} = \frac{3}{2} \beta^2$$

# Desempenho dos sistemas FMs

$$\gamma = \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{RF-BB}}$$

$$= \frac{P_s}{B_m N_0}$$

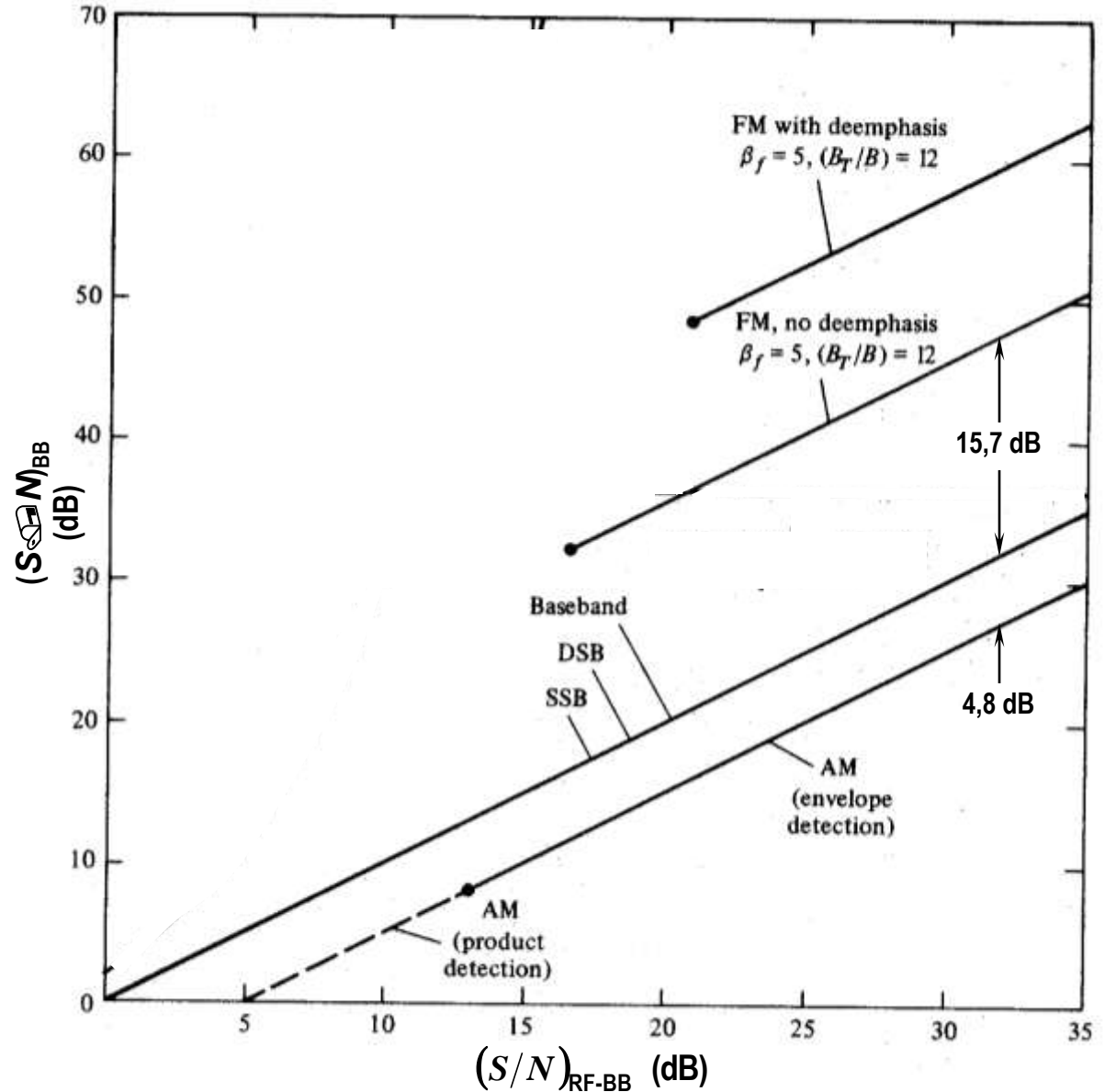


Lathi, p. 547

# Comparação de desempenho de sistemas analógicos

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{RF-BB}} = \frac{P_s}{B_m N_0}$$

Couch, p. 336

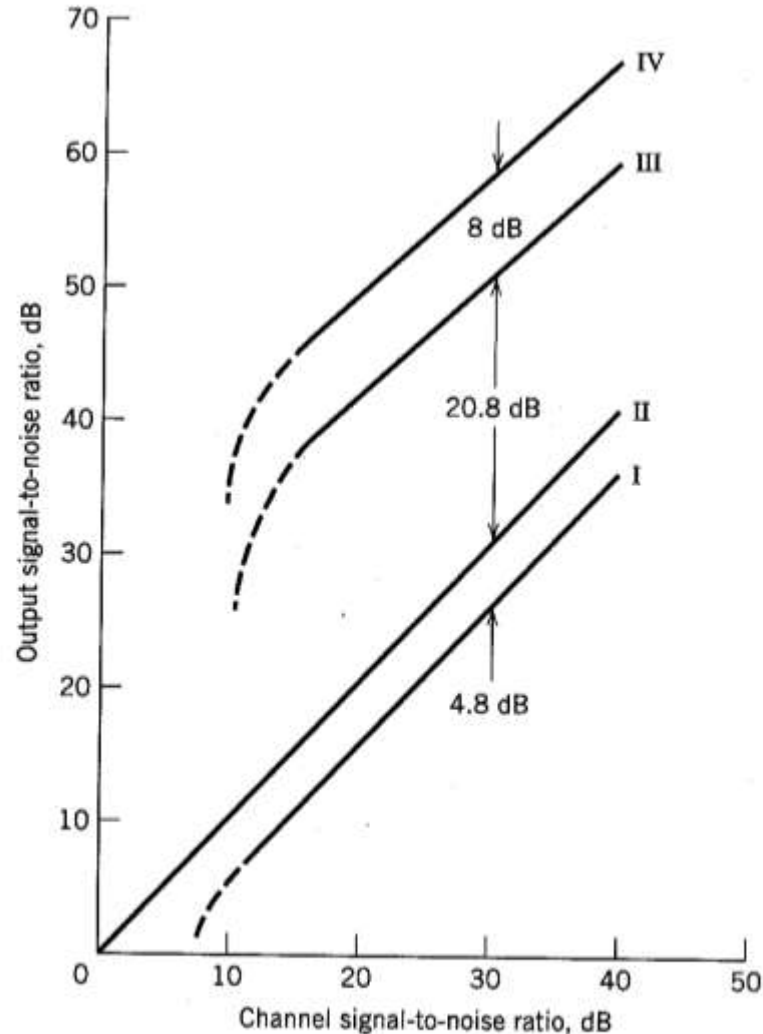


# Comparação de desempenho de sistemas analógicos

Channel signal-to-noise ratio =

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{RF-BB}} = \frac{P_s}{B_m N_0}$$

Haykin, p. 164



**FIGURE 2.55** Comparison of the noise performance of various CW modulation systems. Curve I: Full AM,  $\mu = 1$ . Curve II: DSB-SC, SSB. Curve III: FM,  $\beta = 2$ . Curve IV: FM,  $\beta = 5$ . (Curves III and IV include 13-dB pre-emphasis, de-emphasis improvement.)

# Rádiodifusão Comercial: alguns dados dos padrões AM e FM

<i>Item</i>	<i>AM</i>	<i>FM</i>
<i>Frequência atribuída, <math>f_c</math></i>	530 – 1.700 kHz (OM) 2.310 – 2.490 kHz (OT)	87,5 – 107,9 MHz
<i>Separação entre frequências</i>	10 kHz	200 kHz
<i>Banda do áudio</i>	100 – 5.000 Hz	50 – 15.000 Hz
<i>Transmissão estereofônica</i>	não usual	usual
<i>Potência máxima licenciada</i>	100 kW	100 kW

# Espectro real de um sinal FM de uma emissora comercial

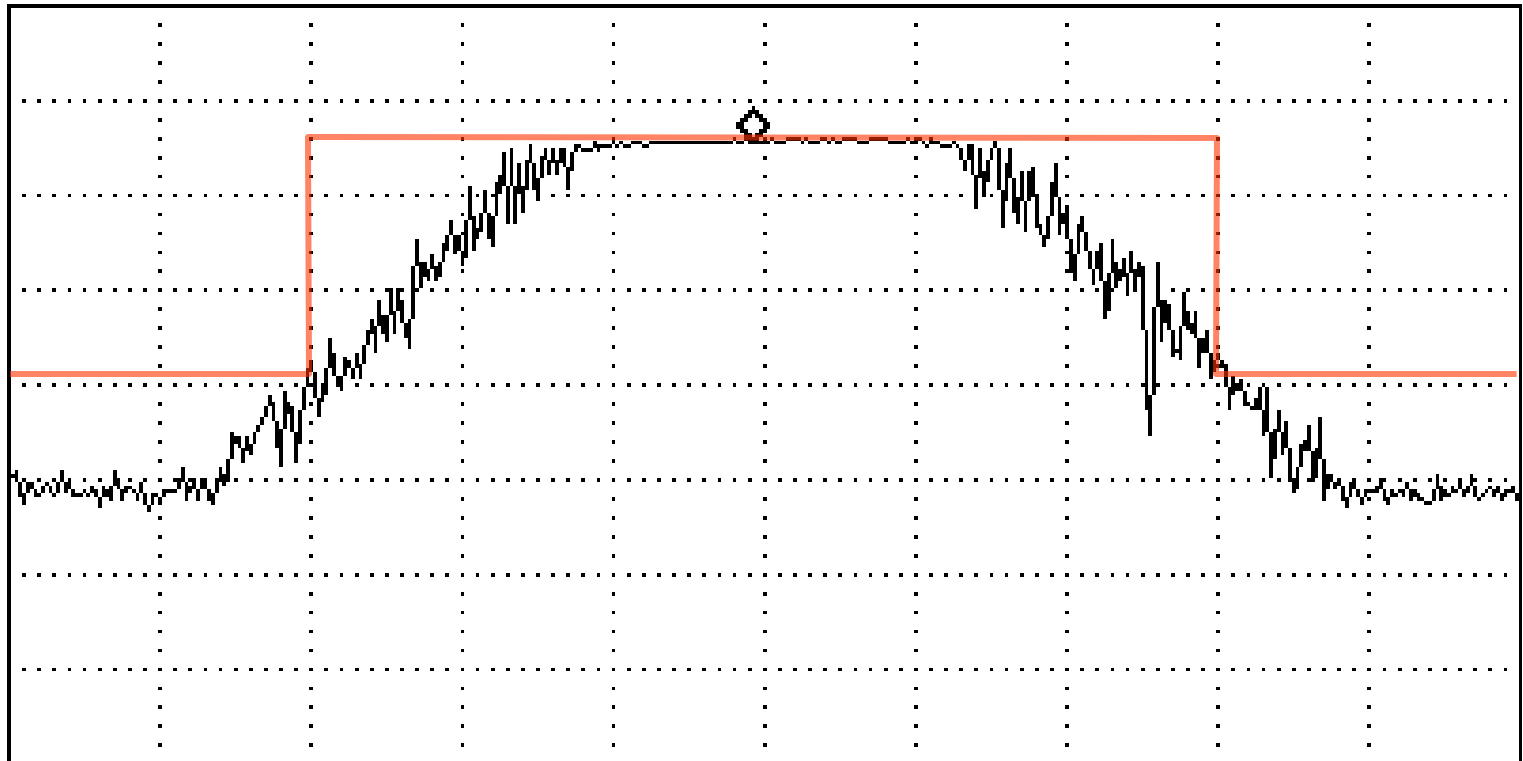
04:58:48 JUL 15, 2002

REF -11.0 dBm AT 10 dB

MKR 89.8957 MHz  
-25.41 dBm

PEAK  
LOG  
10  
dB/

MA SB  
SC FC  
CORR



CENTER 89.8987 MHz  
RES BW 10 kHz

VBW 10 kHz

SPAN 400.0 kHz  
#SWP 1.00 sec