Teoria das Comunicações

4.1

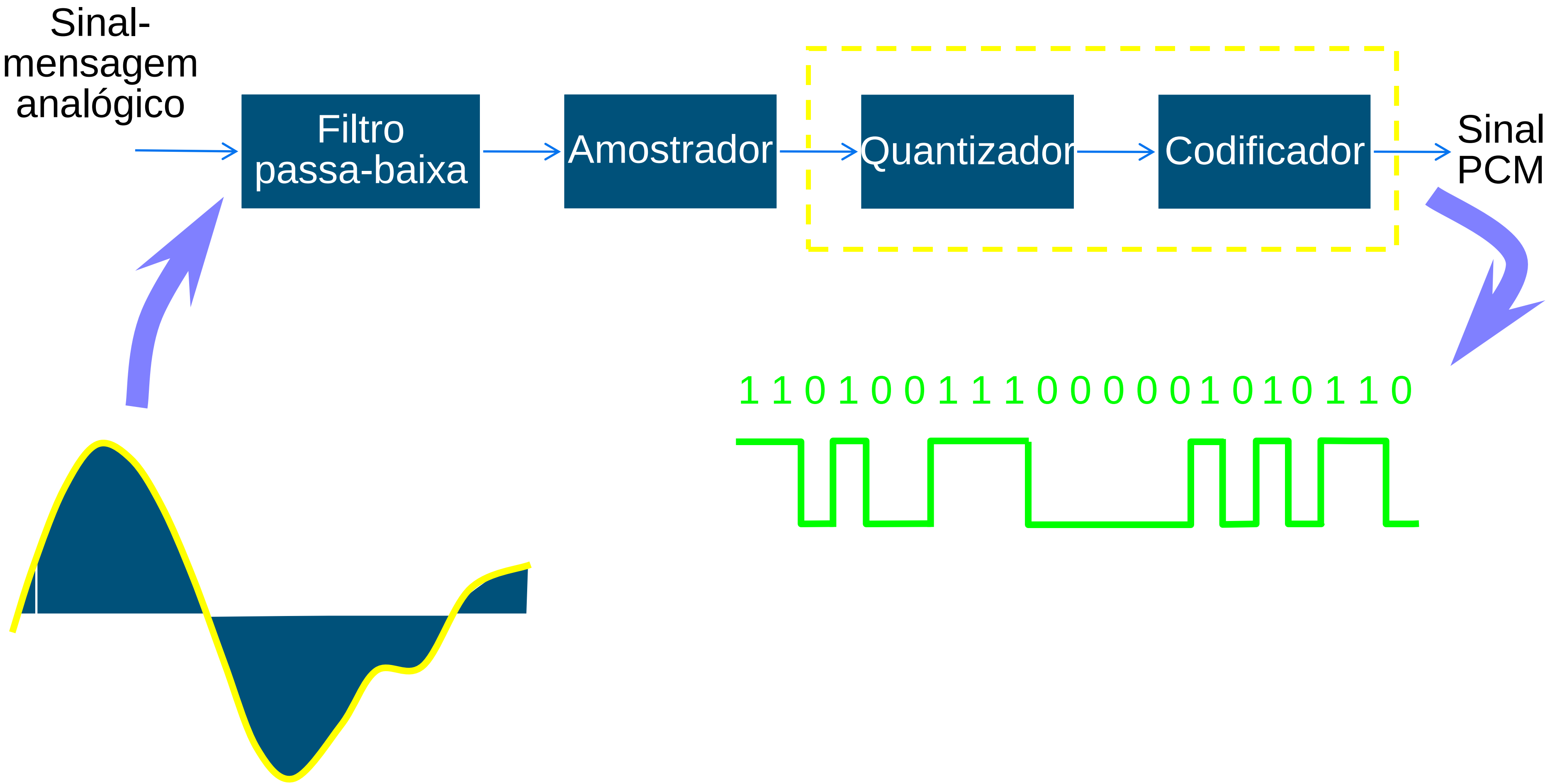
PCM (Pulse Code Modulation)

departamento de engenharia elétrica

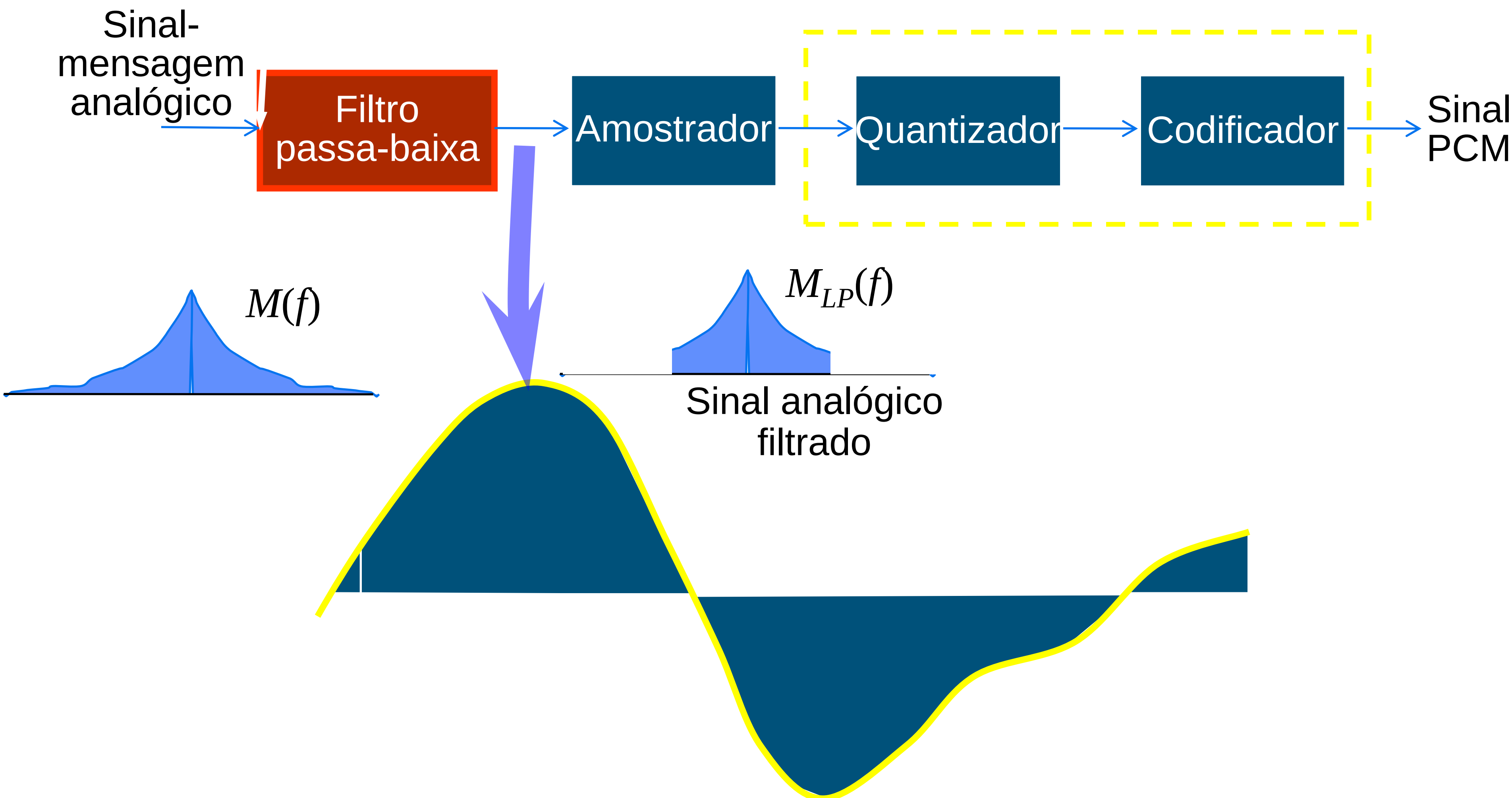
PCM (Pulse Code Modulation)

- É na verdade um esquema para digitalização de sinais analógicos
  - Inventado 1937
- Usado em
  - CDs (arquivo .wav)
  - Telefonia fixa digital
- Por que digitalizar??
  - Maior resistência a ruído
  - Possibilidade de repetidores regenerativos
  - Maior flexibilidade de hardware digital (software)
    - Processamento digital de sinais
    - Comutação
  - Taxas de erro podem ser reduzidas a qualquer valor arbitrário
    - Em troca de banda e/ou potência
  - Possibilidade de encriptação
  - Maior eficiência espectral
  - Multiplexação mais eficiente e flexível
  - Flexibilidade de mídia
  - Armazenamento (quase) sem perda
  - CUSTO mais baixo $$$$$

Digitalização de sinais usando o esquema PCM

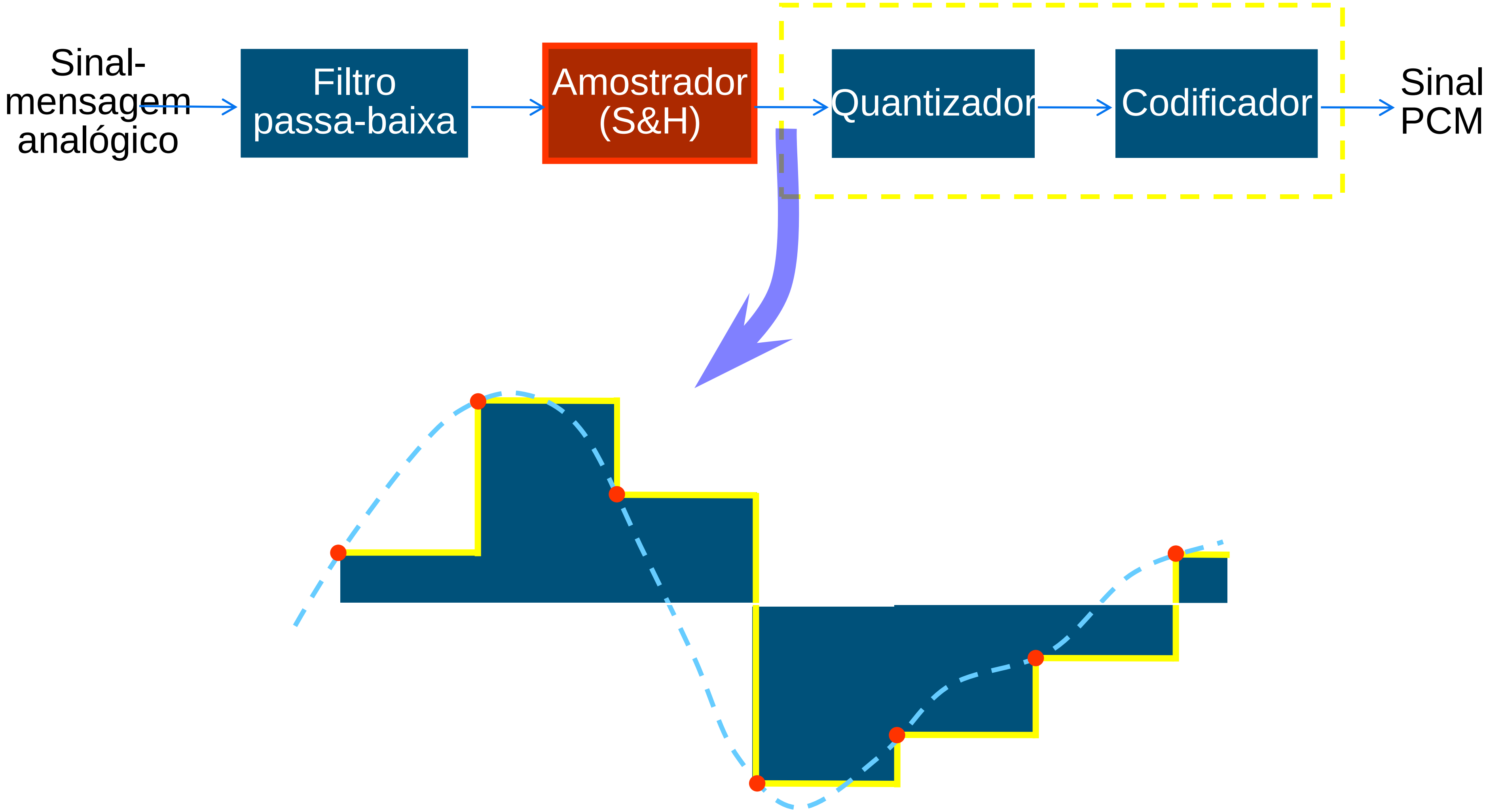


Filtragem *anti-aliasing*



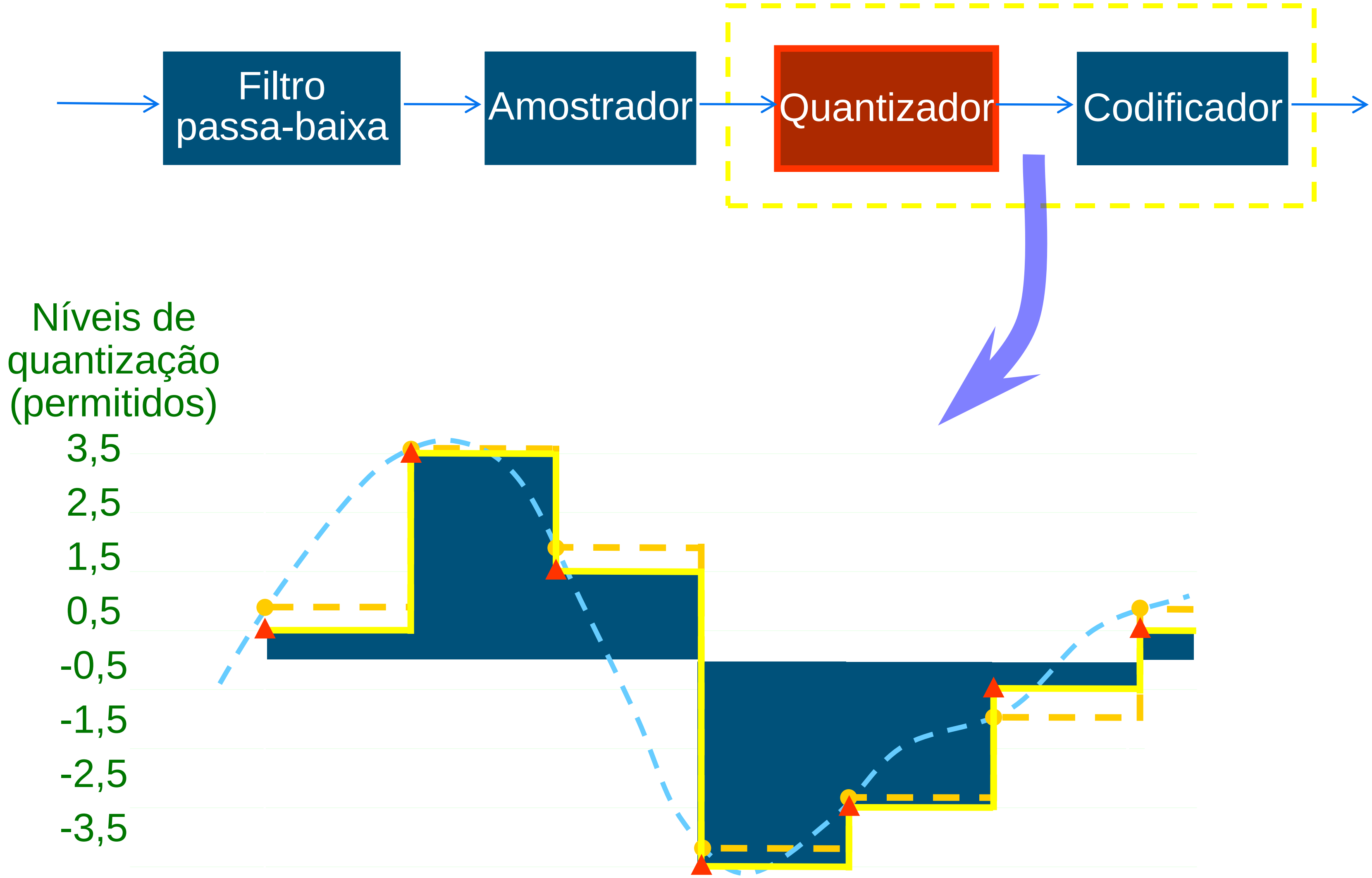
Filtragem é necessária, pois todo sinal realizável tem banda infinita

Amostragem

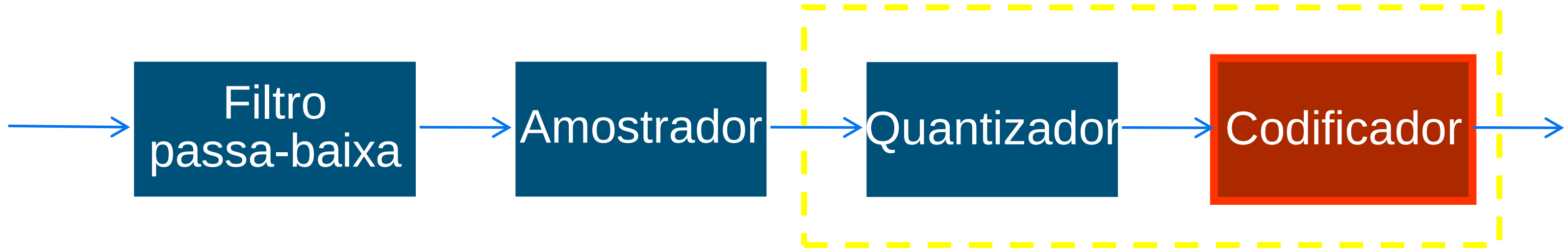


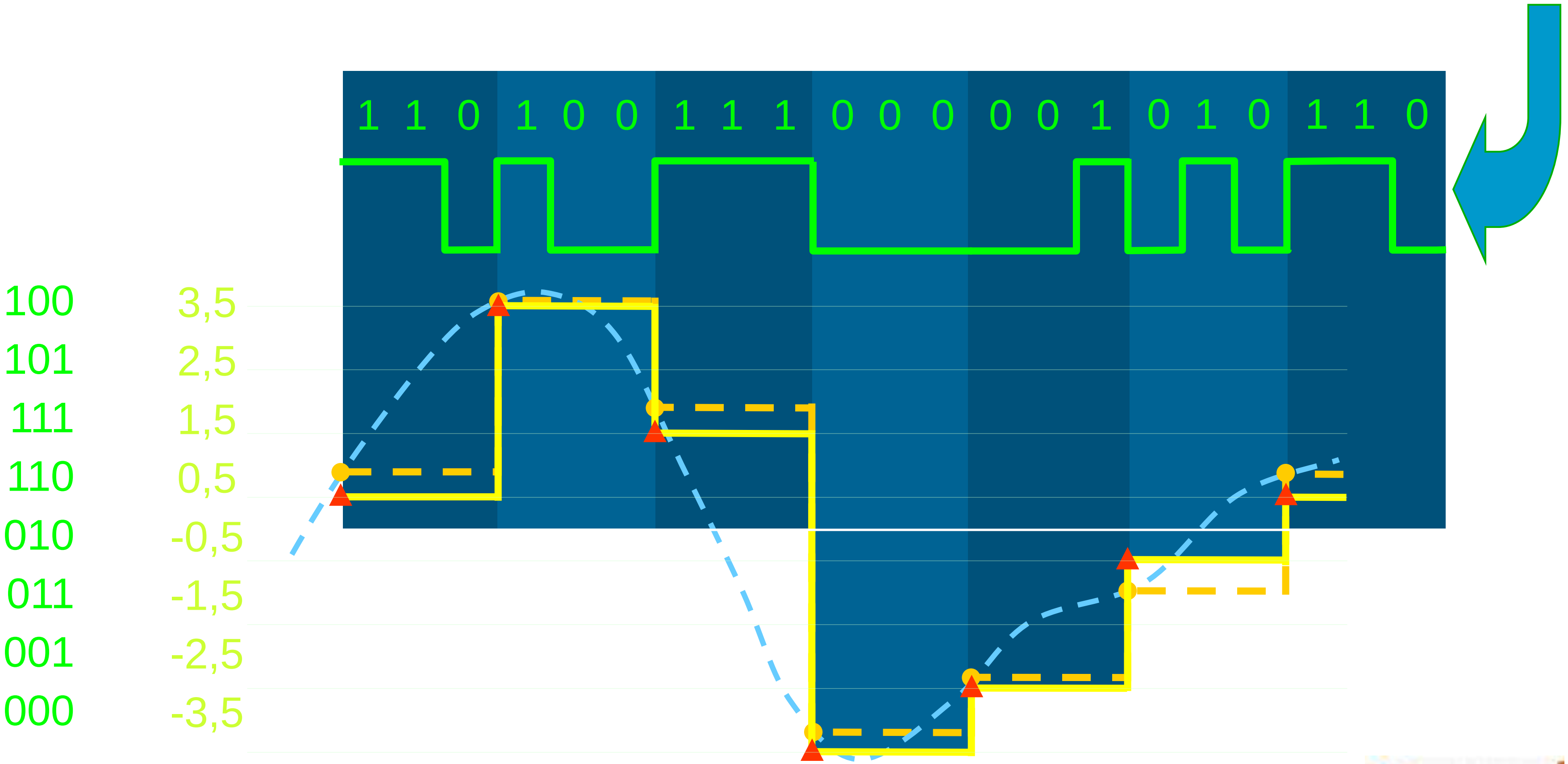
Sinal-
mensagem
analógico
Filtro
passa-baixa
Amostrador
(S&H)
Quantizador
Codificador
Sinal
PCM

Quantização

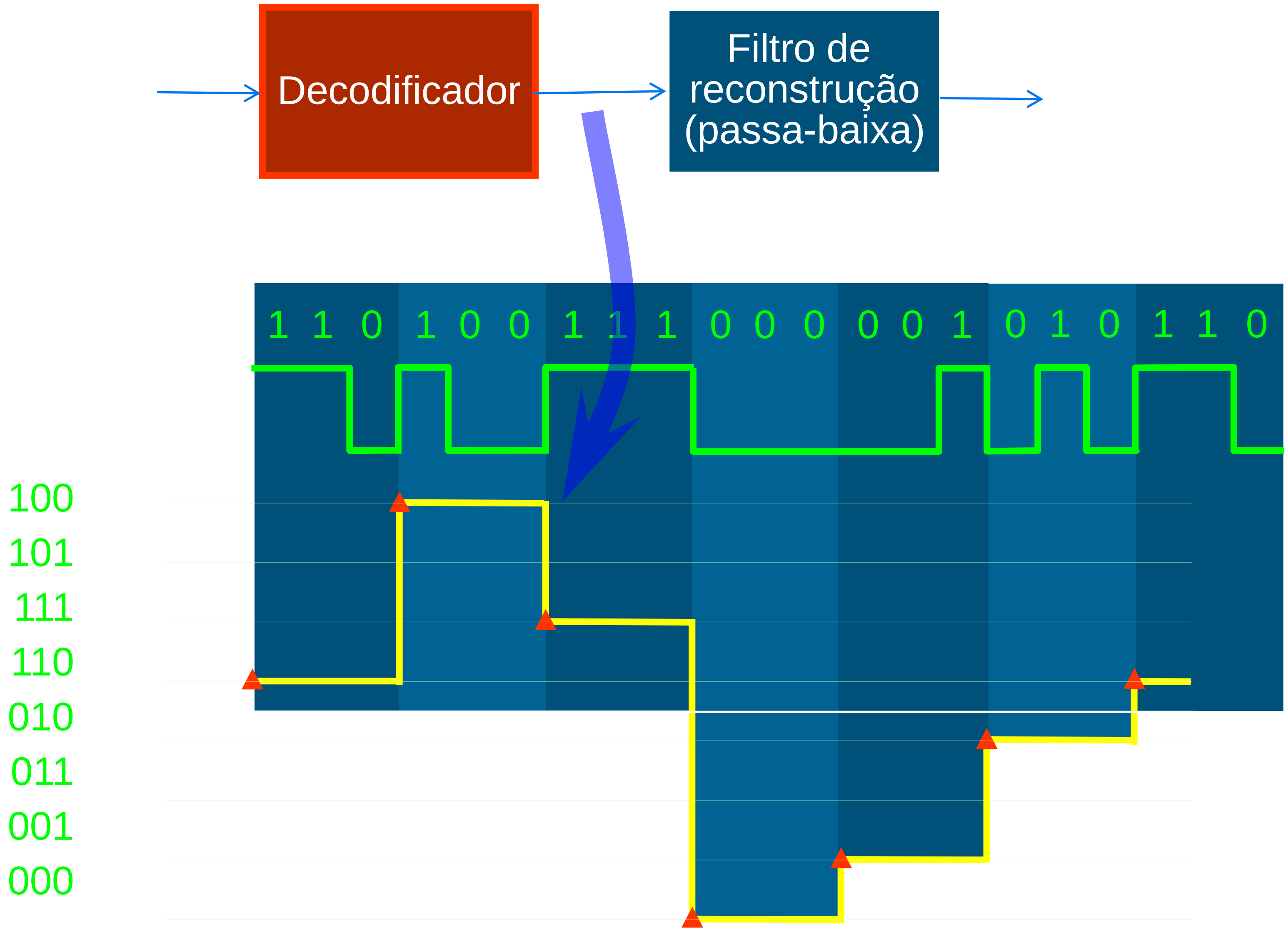


Codificação

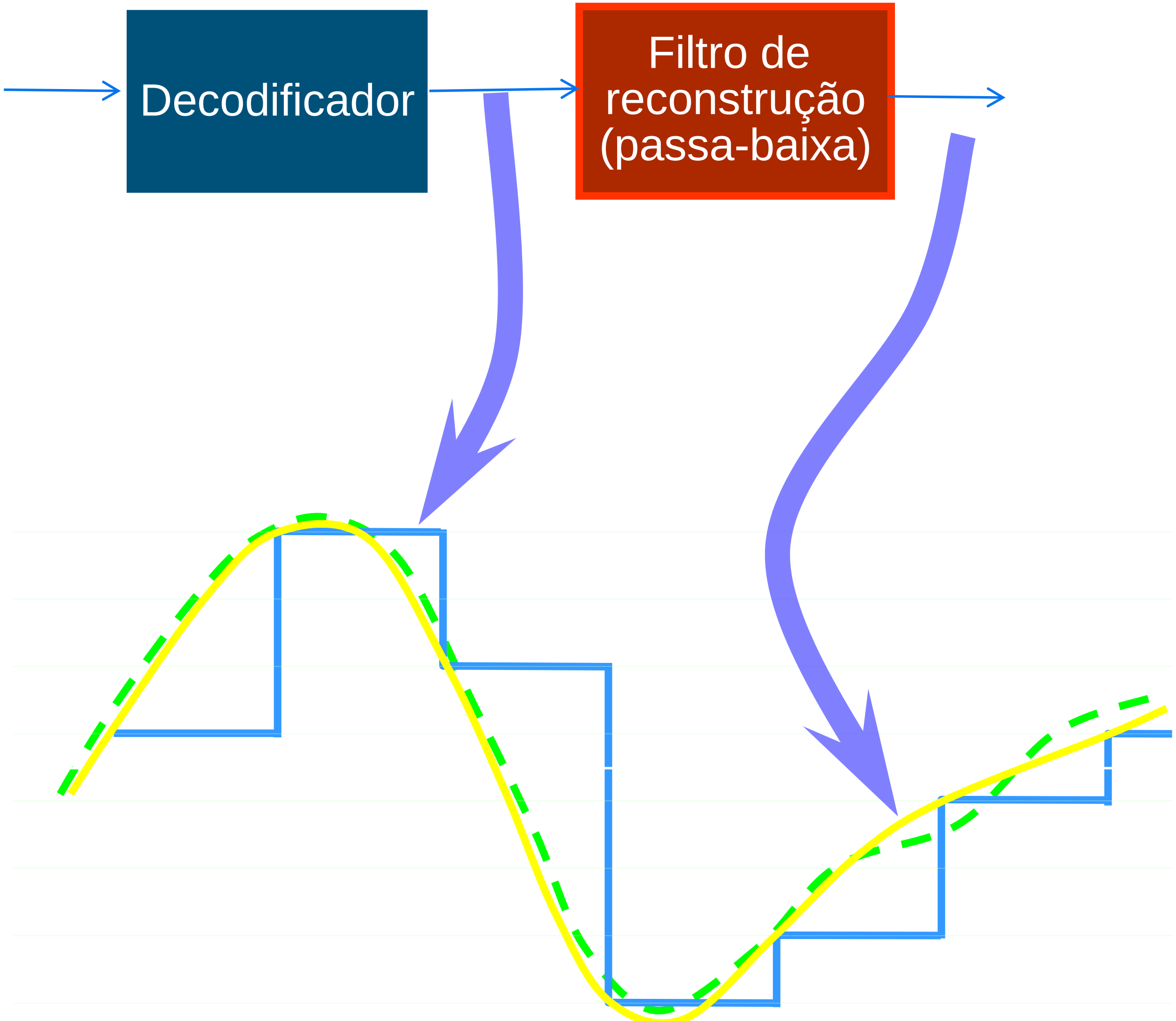




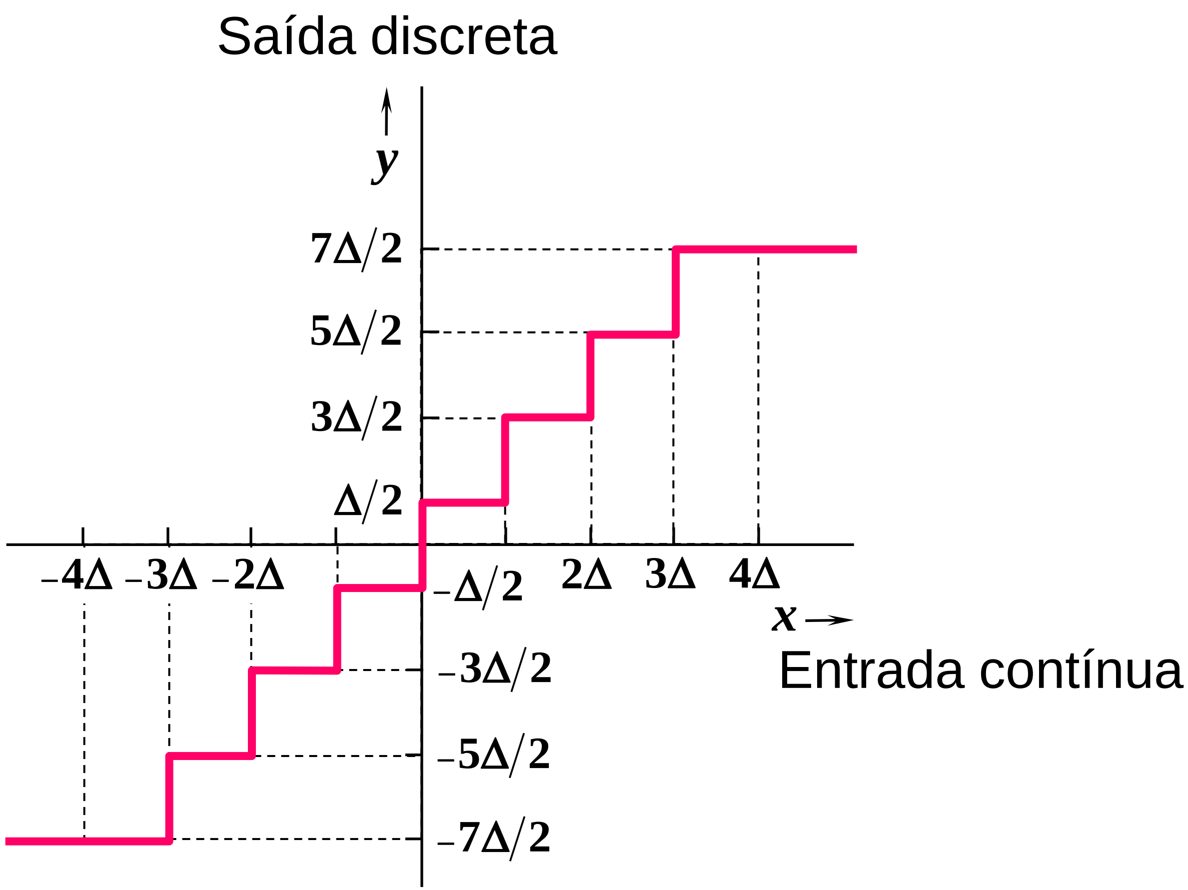
Receptor PCM – decodificador



Receptor PCM – filtro de reconstrução

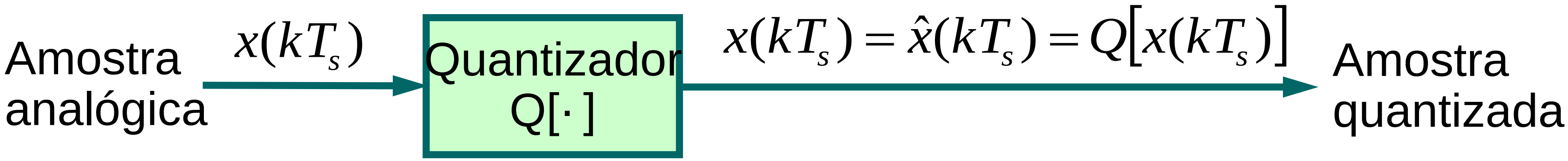


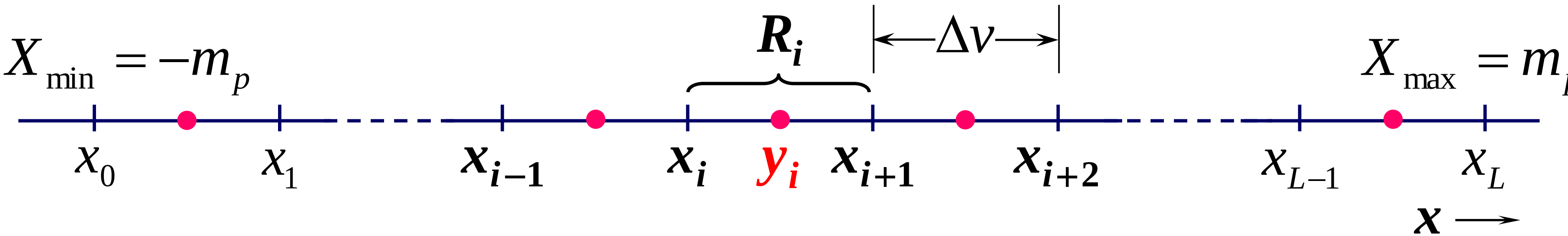
Quantização



departamento de engenharia elétrica

Quantização uniforme





Número de níveis de quantização: L

Tamanho do passo (ou degrau) do quantizador: $\Delta v = x_i - x_{i-1} = y_i - y_{i-1}$

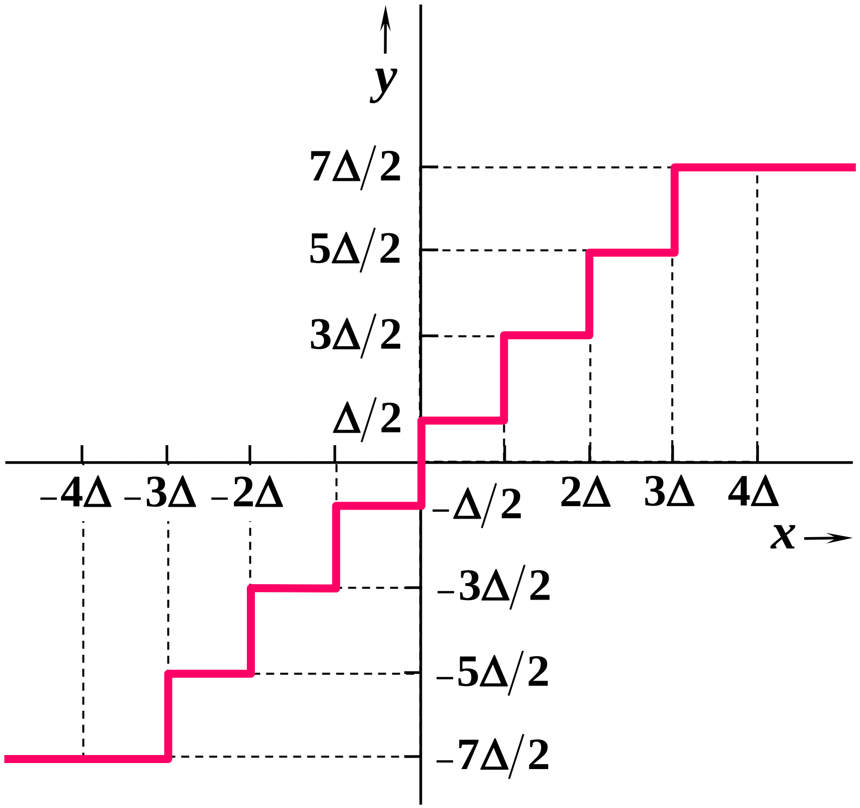
$$\Delta v = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{L} = \frac{2m_p}{L}$$

Níveis de quantização: $\boldsymbol{y_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, L}$

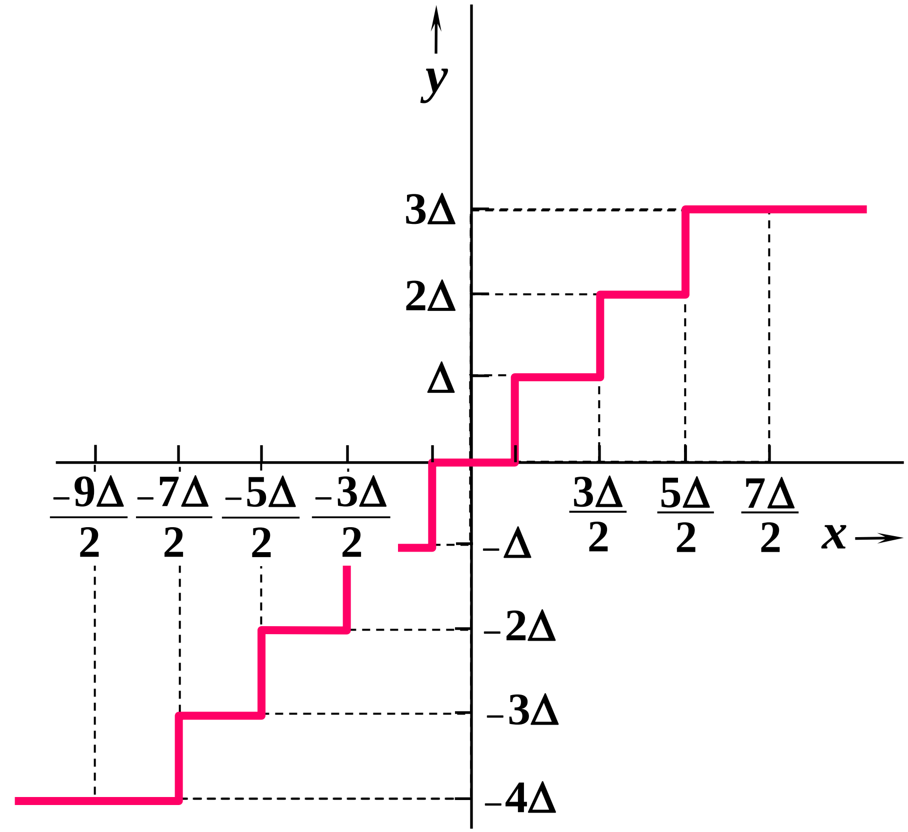
Precisamos de $n = \lceil \log_2 L \rceil$ bits/amostra

Na prática, na maioria das vezes, $L = 2^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

Característica de transferência de um quantizador uniforme



Característica de um quantizador uniforme do tipo *midrise.*



Característica de um quantizador uniforme do tipo *midtread.*

departamento de engenharia elétrica

Desempenho: razão sinal-ruído de quantização

$x(t)$: sinal-mensagem original

$x(kT_s)$: k-ésima amostra de $x(t)$

$\hat{x}(kT_s)$: versão quantizada de $x(kT_s)$

$\hat{x}(t)$: sinal-mensagem reconstruído usando as amostras quantizadas de $x(t)$

Erro e ruído de quantização

Erro de quantização

$$q(kT_s) = \hat{x}(kT_s) - x(kT_s) \Rightarrow \hat{x}(kT_s) = x(kT_s) + q(kT_s)$$

$$q(t) = \hat{x}(t) - x(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t) + q(t)$$

Ruído de quantização

Razão sinal-ruído de quantização:

$$RSR_q = \frac{\text{Potência média de } x(t)}{\text{Potência média de } q(t)} = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{\langle q^2(t) \rangle}$$

Cálculo de $\langle q^2(t) \rangle$

Potência média do ruído de quantização

Usando o interpolador ideal podemos escrever:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left[f_s(t-kT_s)\right] \qquad \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left[f_s(t-kT_s)\right]$$

$$\therefore, \quad q(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\hat{x}(kT_s) - x(kT_s)\right]\mathrm{sinc}\left[f_s(t-kT_s)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left[f_s(t-kT_s)\right]$$

$$\hat{x}(kT_s) - x(kT_s) = q(kT_s)$$

$$\therefore, \quad \left\langle q^2(t)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} q^2(t)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} q(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left[f_s(t-kT_s)\right]\right\}^2 dt$$

Potência média do ruído de quantização

$$\langle q^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} q(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left[f_s(t-kT_s)\right]\right\}^2 dt$$

Explorando a ortogonalidade das funções sinc

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T f_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^2(kT_s) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=-N/2}^{N/2} q^2(kT_s)$$

$=$ valor quadrático médio de $q(kT_s)$

$$= E\left[q^2(kT_s)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q^2 p_q(q)\,dq$$

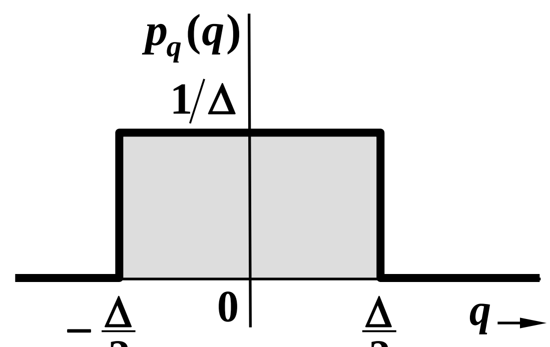
$$= \frac{\Delta^2}{12}$$

$$= \frac{X_{\max}^2}{3L^2}$$

Se $X_{\min} = -X_{\max}$,

$$\Delta = \frac{2X_{\max}}{L}$$

Assumindo que $-\Delta/2 < q < \Delta/2$ (i.e., $X_{\min} \le x(t) \le X_{\max}$ para $\forall t$) e que a distribuição probabilística de q é uniforme nesse intervalo, ou seja:



Razão sinal-ruído de quantização (uniforme)

$$RSR_q = \frac{\text{Potência média de } x(t)}{\text{Potência média de } q(t)} = \frac{\langle x^2(t)\rangle}{\langle q^2(t)\rangle} = \frac{\langle x^2(t)\rangle}{\Delta^2/12}$$

Se $X_{\min} = -X_{\max}$,

$$\Delta = \frac{2X_{\max}}{L}$$

$$= 3L^2 \frac{\langle x^2(t)\rangle}{X_{\max}^2}$$

Essa estimativa para RSR_q assume que não há sobrecarga do quantizador, isto é, assume que $X_{\min} \le x(t) \le X_{\max}$ para todo t.

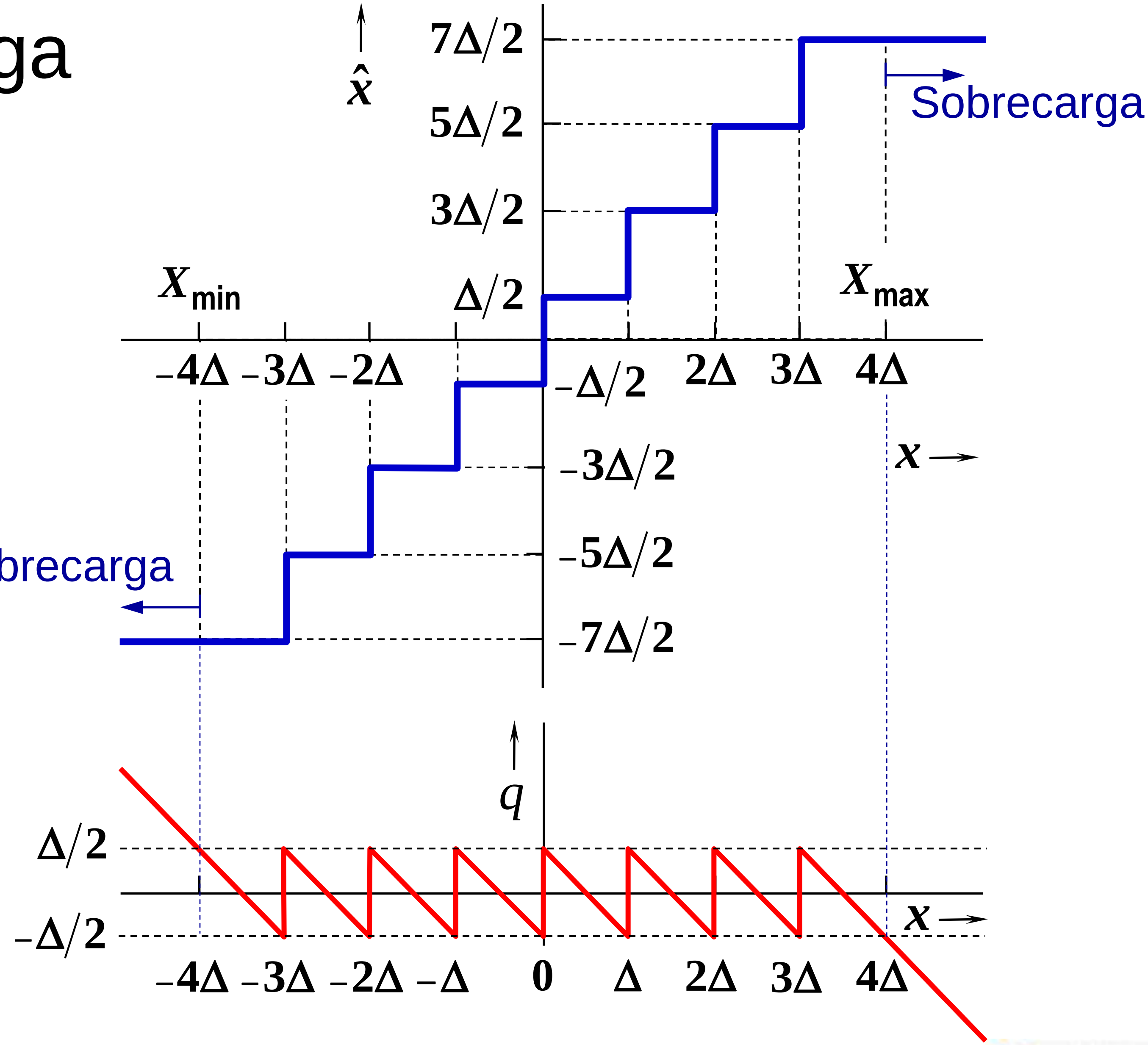
$$RSR_q\Big|_{dB} = 10\log\left[3L^2 \frac{\langle x^2(t)\rangle}{X_{\max}^2}\right]$$

$$L = 2^n$$

$$= 6{,}02n + 4{,}77 + 10\log\left[\frac{\langle x^2(t)\rangle}{X_{\max}^2}\right]$$

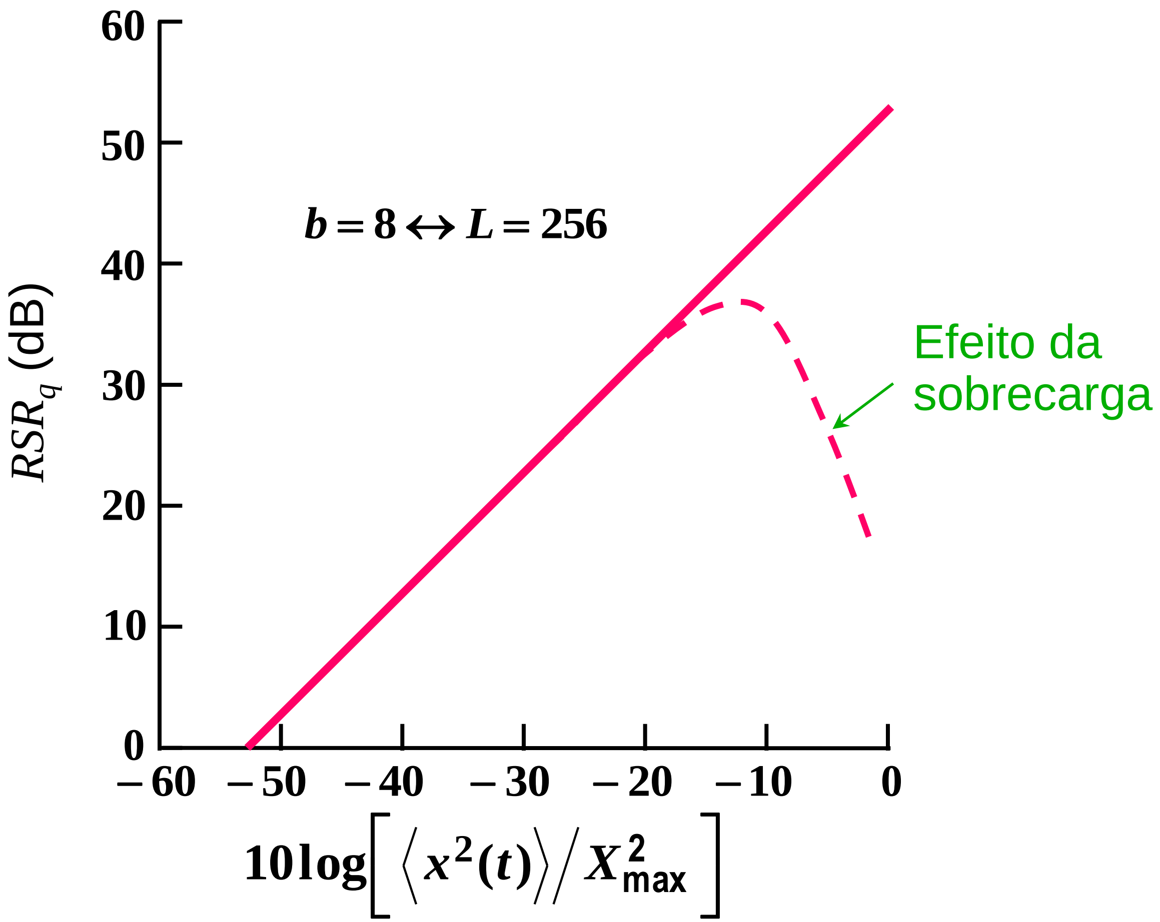
Portanto, para cada bit adicional na palavra-código, a RSR_q aumenta de $\cong$ 6 dB (isto é, é quadruplicada).

Região de sobrecarga



Razão sinal-ruído de quantização

$$RSR_q\Big|_{dB} = 6{,}02n + 4{,}77 + 10\log\left[\frac{\langle x^2(t)\rangle}{X_{\max}^2}\right]$$



Razão sinal-ruído de quantização

$$RSR_q\Big|_{dB} = 6{,}02b + 4{,}77 + \left\langle x^2(t) \right\rangle_{dB} - 10\log\left(X_{\max}^2\right)$$

$\Downarrow$

Portanto, se P_x diminuir (ou aumentar) K dB, a RSR_q também diminuirá (ou aumentará) de K dB, se b e $X_{\max}$ não forem alterados.

Contudo, a equação acima só é válida quando $|x(t)| \leq X_{\max}$, caso contrário, haverá sobrecarga do quantizador e, nessa condição, um aumento em P_x também causará diminuição da RSR_q, uma vez que a sobrecarga aumentará.

Exemplo: quantização de sinais de voz

$$RSR_q\Big|_{dB} = 6{,}02n + 4{,}77 + 10\log\left[\frac{\langle x^2(t)\rangle}{X_{\max}^2}\right]$$

fdp laplaciana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_x} e^{-\frac{\sqrt{2}\,|x|}{\sigma_x}}$$

Sinais de voz: fdp laplaciana

$$\langle x^2(t)\rangle = E\left[x^2(t)\right] = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = \sigma_x^2$$

Regra prática: $X_{\max} = 4\sigma_x = 4\sqrt{\langle x^2(t)\rangle}$

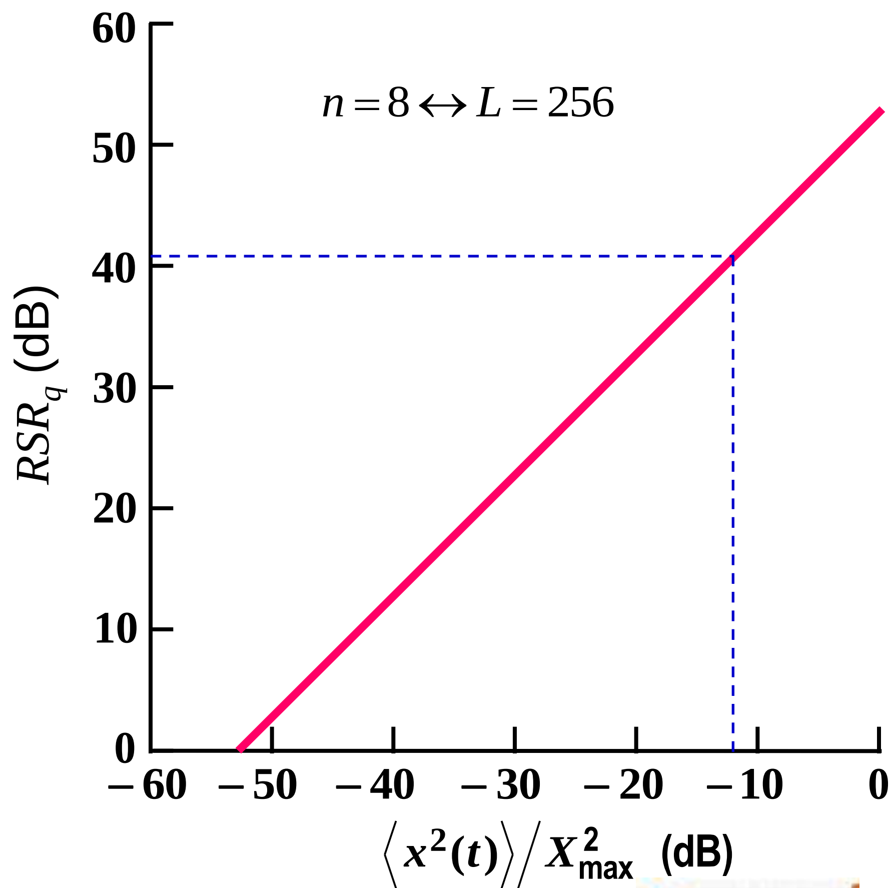
$$\Downarrow$$

$$\approx 0{,}35\% \text{ das amostras} \notin [-X_{\max}, X_{\max}]$$

$$10\log\left(\sigma_x^2 / X_{\max}^2\right) \cong -12 \text{ dB}$$

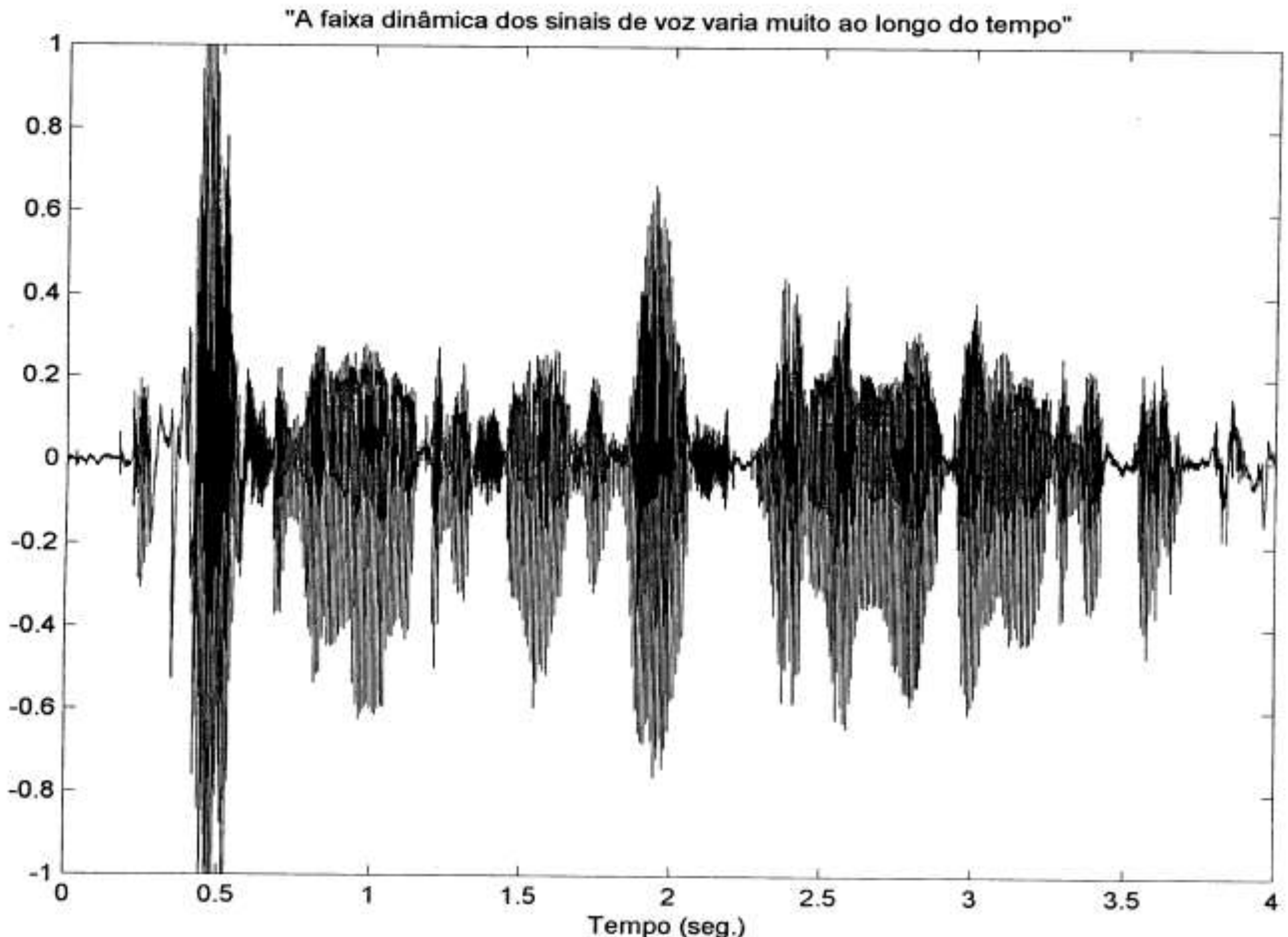
$$RSR_q\Big|_{dB} = 6{,}02b - 7{,}27$$

$$RSR_q\Big|_{dB} \cong 41\,\text{dB}, \quad \text{para } n = 8$$



departamento de engenharia elétrica

Quantização não Uniforme - Motivação



A potência média do sinal de voz na entrada de um codificador PCM da rede telefônica pode variar de 40 dB (10.000).

Redução da RSR com a redução de σ_x

Se $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2(t)\rangle} = \dfrac{X_{\max}}{4}$,

$$10\log\left(\sigma_x^2 / X_{\max}^2\right) \cong -12 \text{ dB}$$

$$RSR_q\Big|_{dB} \cong 41 \text{ dB}$$

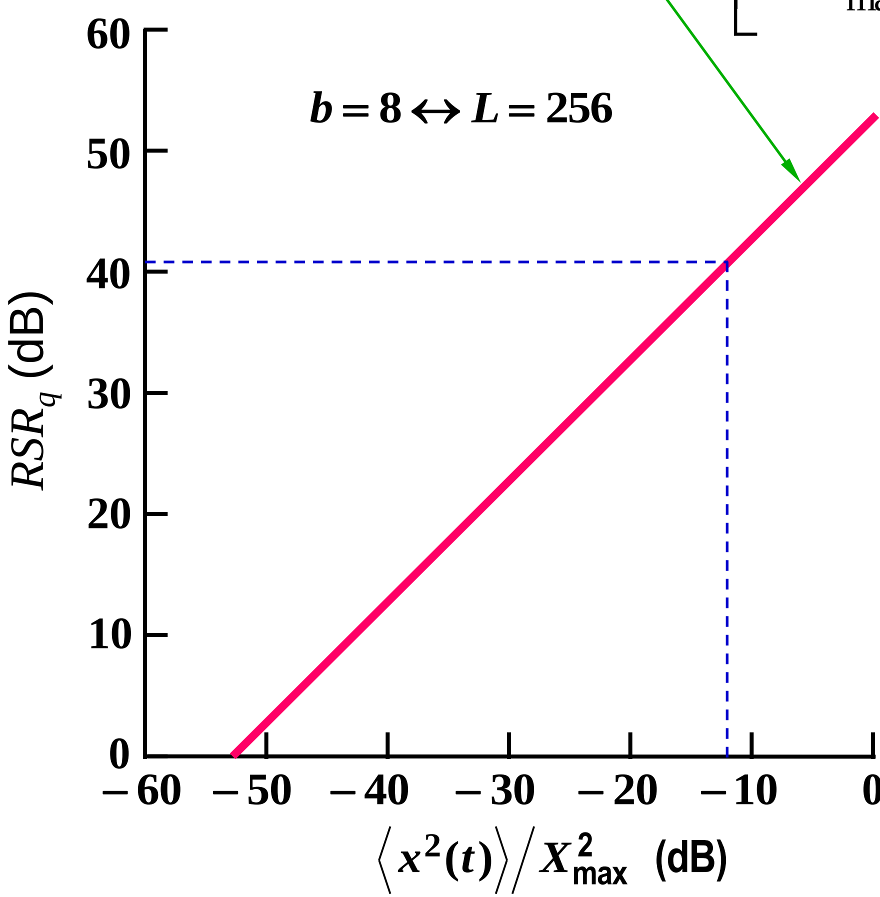
Contudo, se

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2(t)\rangle} = \frac{X_{\max}/4}{\sqrt{10.000}},$$

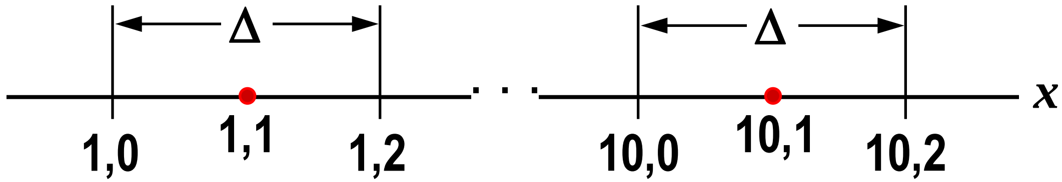
$$10\log\left(\sigma_x^2 / X_{\max}^2\right) \cong -52 \text{ dB}$$

$$RSR_q\Big|_{dB} \cong 0{,}9 \text{ dB}$$

$$RSR_q\Big|_{dB} = 6{,}02n + 4{,}77 + 10\log\left[\frac{\langle x^2(t)\rangle}{X_{\max}^2}\right]$$



Erro de quantização relativo



$$x = 1{,}0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = 1{,}1 \quad \Rightarrow \quad |q| = 0{,}1 \quad (10\%)$$

$$x = 10{,}0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = 10{,}1 \quad \Rightarrow \quad |q| = 0{,}1 \quad (1\%)$$

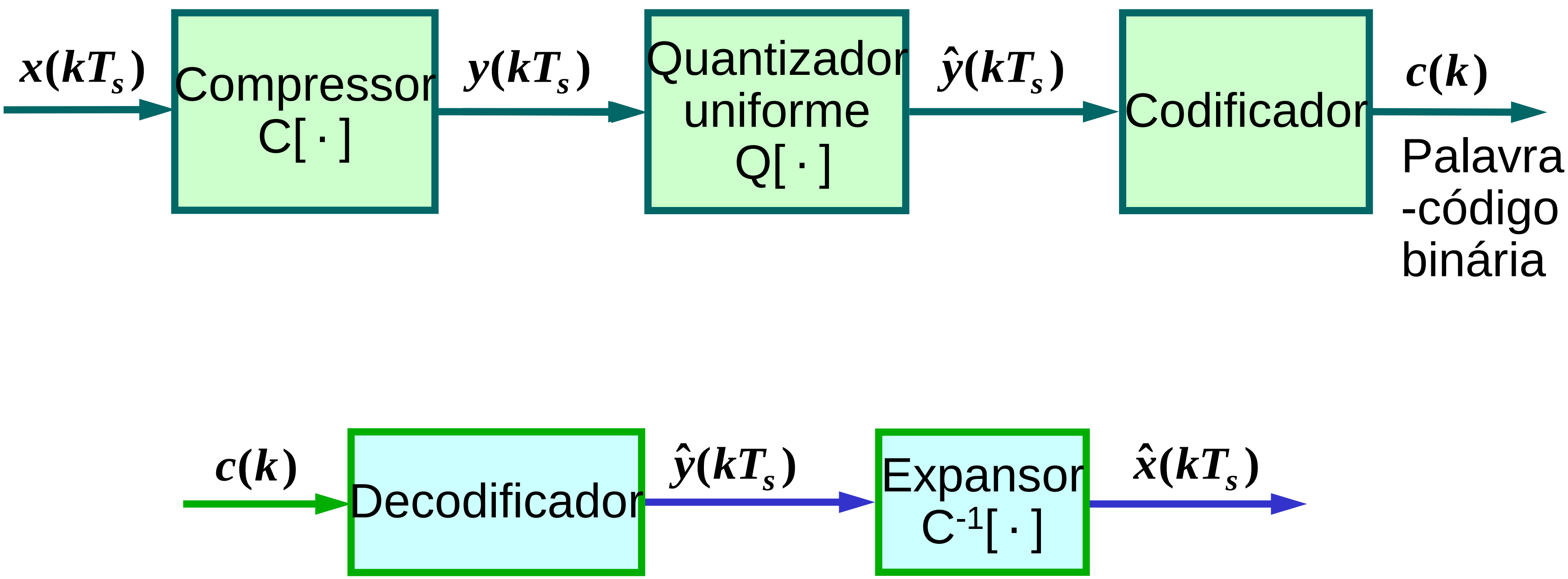
$$|q| \leq \frac{\Delta}{2} \quad \leftarrow$$ q_{max} independe da magnitude de x

IDEAL: $$\frac{|q|}{|x|} 100\% \leq \beta\% \quad \leftarrow$$ q_{max} relativo (ou percentual) independe da magnitude de x

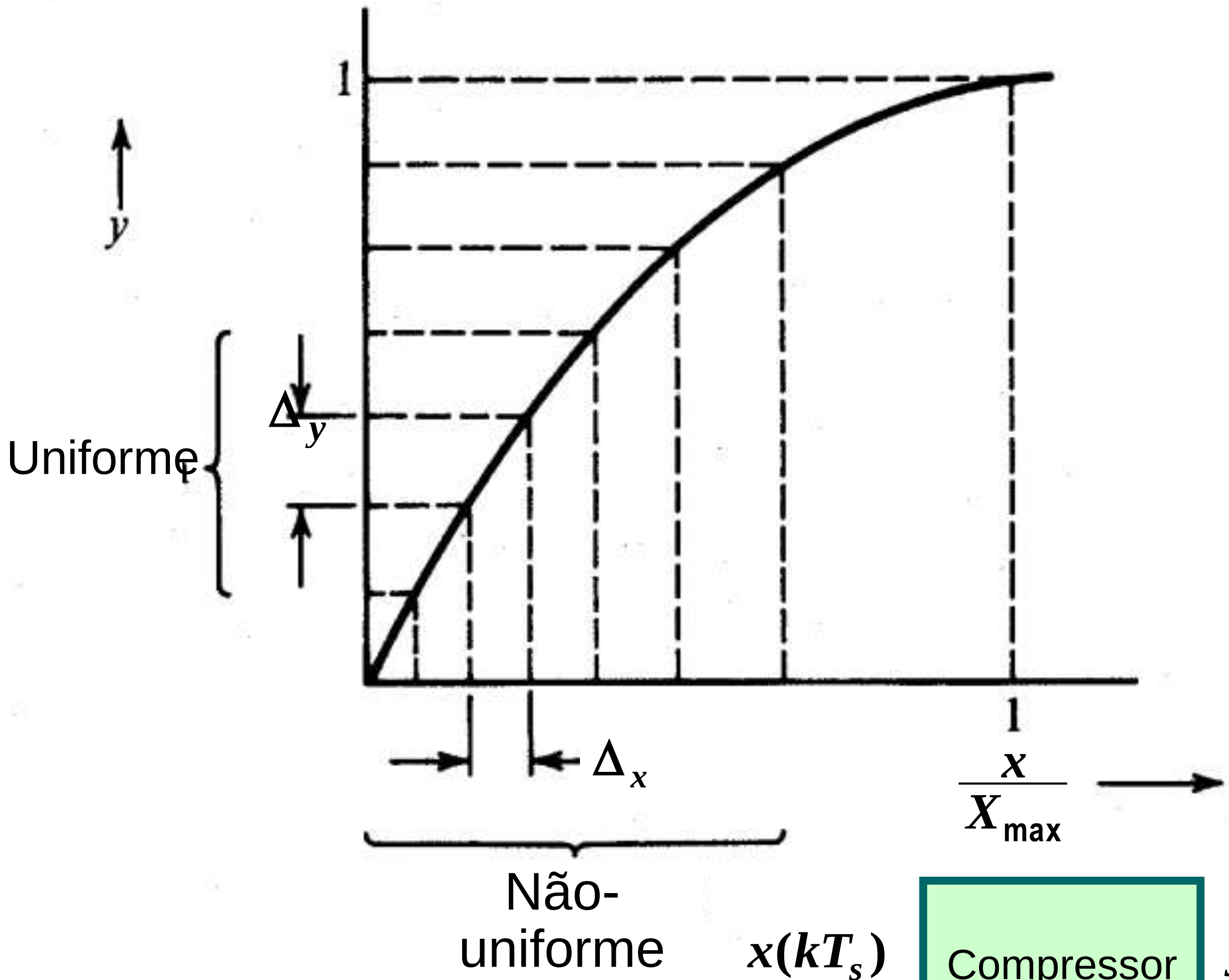
QUANTIZADOR NÃO-UNIFORME

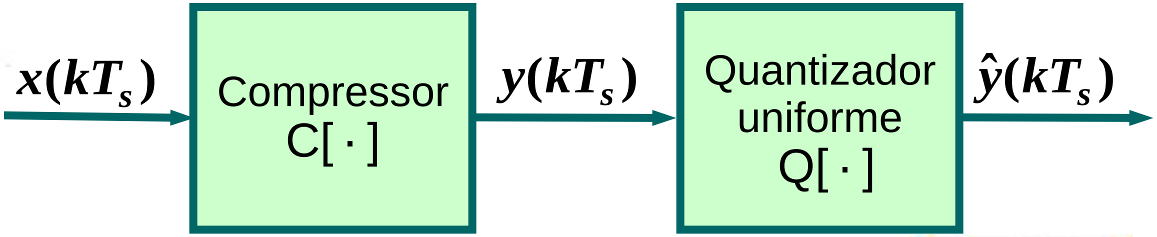
Quantização não-uniforme baseada em compansão

<u>com</u>pressão + ex<u>pansão</u> = compansão



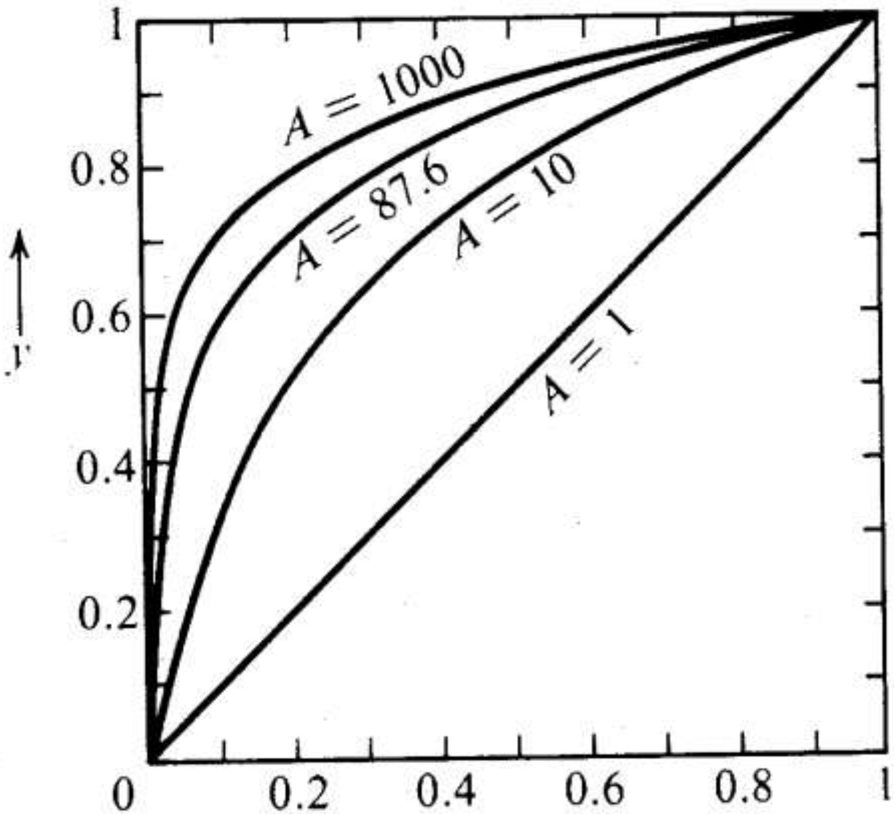
Quantização não-uniforme baseada em compansão





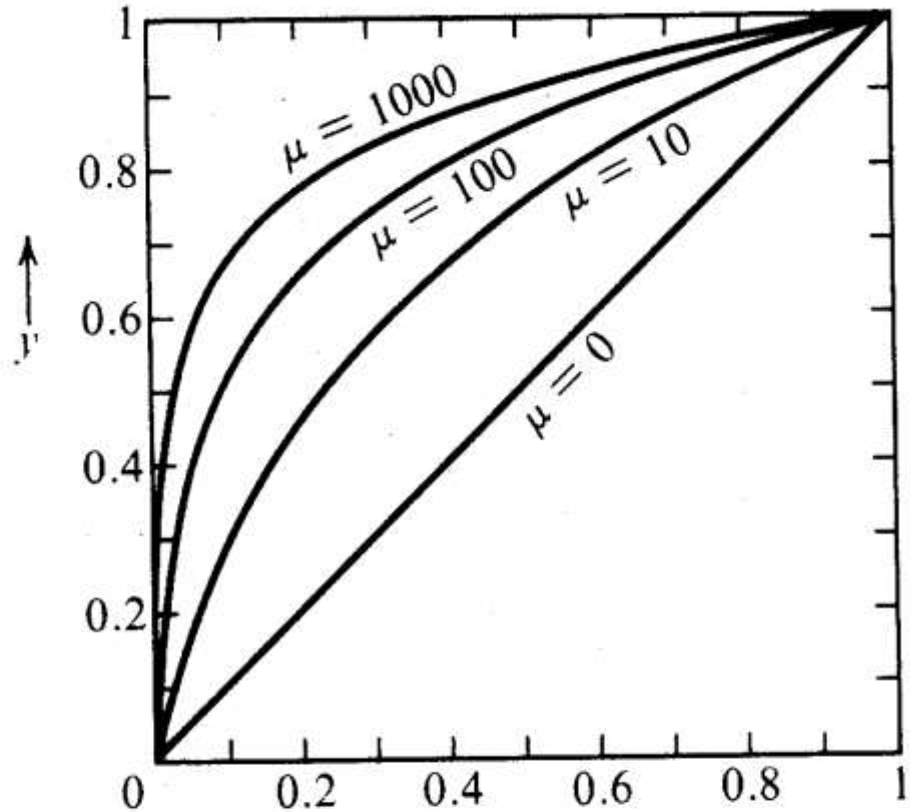
Características de compressão

Lei-A



$\dfrac{x}{X_{max}} \longrightarrow$

Lei-μ



$\dfrac{x}{X_{max}} \longrightarrow$

Sistema PCM
Lei-μ

$$\boldsymbol{C(x) = \frac{X_{\max}}{\ln(1+\mu)} \ln\left(1 + \ln\frac{\mu|x|}{X_{\max}}\right)\operatorname{sgn}(x), \qquad 0 \le \frac{|x|}{X_{\max}} \le 1}$$

$$RSR_{\text{lei-}\mu} = 6{,}02n + 4{,}77 - 20\log\left[\ln(1+\mu)\right]$$

$$-10\log\left[1 + \left(\frac{X_{\max}}{\mu\sigma_x}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{X_{\max}}{\mu\sigma_x}\right)\right] \quad (\text{dB})$$

$$\cong 6{,}02n + 4{,}77 - 20\log\left[\ln(1+\mu)\right](\text{dB}) \quad \text{para} \quad \mu >> \frac{X_{\max}}{\sigma_x}$$

$$\frac{\max(\Delta)}{\min(\Delta)} = \mu + 1$$

Valor usado nos E.U.A. e Japão : $\mu = 255$

Sistema PCM
Lei-A

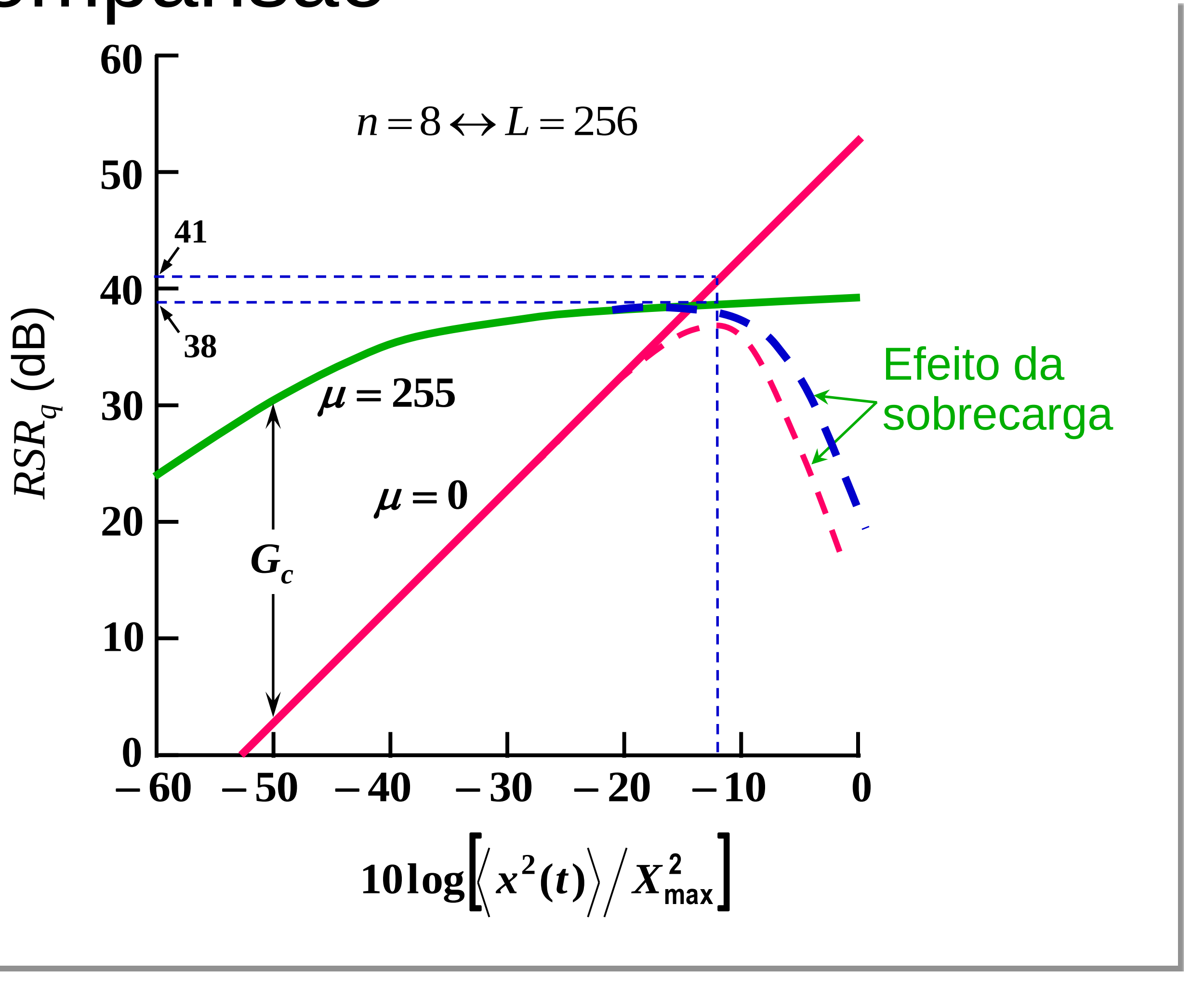
$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+\ln A}|x|\,\mathrm{sgn}(x), & 0 \le \dfrac{|x|}{X_{\max}} \le \dfrac{1}{A} \\[2ex] \dfrac{X_{\max}}{1+\ln A}\left(1+\ln\dfrac{A|x|}{X_{\max}}\right)\mathrm{sgn}(x), & \dfrac{1}{A} < \dfrac{|x|}{X_{\max}} \le 1 \end{cases}$$

$$\boxed{RSR_{\text{lei-}A} \cong 6{,}02n + 4{,}77 - 20\log[\ln A]\ (\text{dB}) \quad \text{para} \quad A >> \frac{X_{\max}}{\sigma_x}}$$

$$\frac{\max(\Delta)}{\min(\Delta)} = A$$

Valor padronizado pelo ITU-T: $\quad A = 87{,}6$

Razão sinal-ruído de um sistema baseado em compansão



Taxa de bits do PCM

$$R_b = f_s \times n$$

Taxa de bits (bps) PCM

Taxa de amostragem (amostras por segundo)

Número de bits por amostra

Ex.: Sinal de voz com banda telefônica, Quantizador uniforme

B_m	3.300 Hz
f_s	8 kHz
n	12 bits
L	4.096 níveis
R_b	96 kbps

$$RSR_q\Big|_{dB} = 6{,}02n - 7{,}27$$

$$\cong 65 \text{ dB},$$

$$\text{quando } \sigma_x = X_{\max}/4$$

Log-PCM: Lei-A ou Lei-μ

Sinal de voz com banda telefônica

B_m	3.300 Hz
f_s	8 kHz
n	8 bits
L	256 níveis
R_b	64 kb/s

$$RSR_{\text{lei-A}} \cong 6{,}02b + 4{,}77 - 20\log(1 + \ln A) \quad \text{(dB)}$$

$$\cong 38{,}2 \quad \text{(dB)}$$

$$A = 87{,}6$$

$$RSR_{\text{lei-}\mu} \cong 6{,}02b + 4{,}77 - 20\log[\ln(1 + \mu)] \quad \text{(dB)}$$

$$\cong 38{,}1 \quad \text{(dB)}$$

$$\mu = 255$$

Largura de banda de transmissão requerida pelo PCM

Por um canal não-ruidoso com uma largura de banda de transmissão de B_T Hz é possível transmitir, sem erro, no máximo $2B_T$ elementos de informação (ou símbolos) independentes por segundo

Largura de banda de transmissão mínima teórica requerida para transmitir R_s símbolos por seg.

$$(B_T)_{\text{min-teo}} = \frac{R_s}{2} \quad \text{Hz}$$

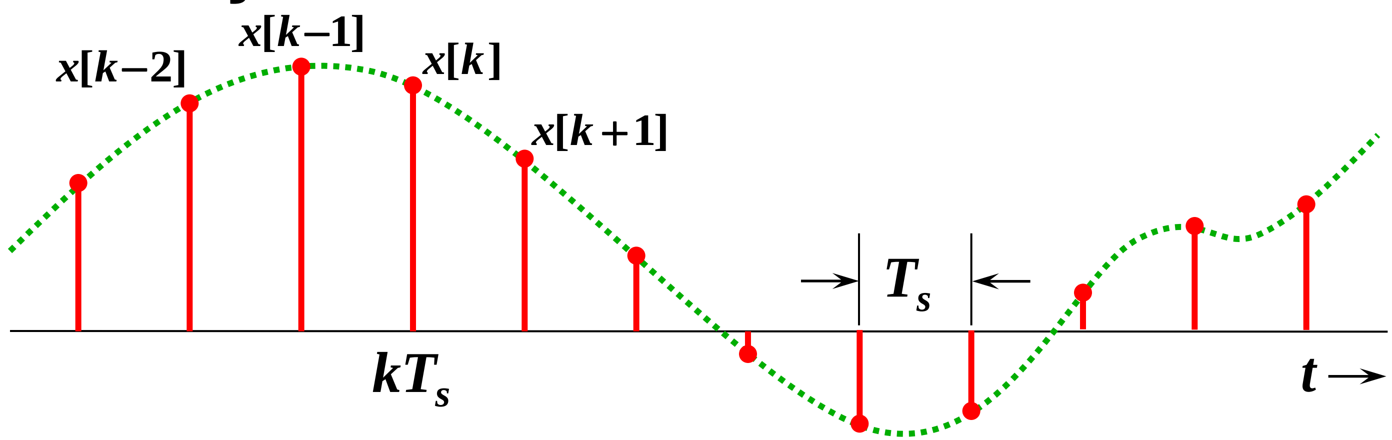
$$(B_T)_{\text{min-teo}} = \frac{R_b}{2I_M} \quad \text{Hz}$$

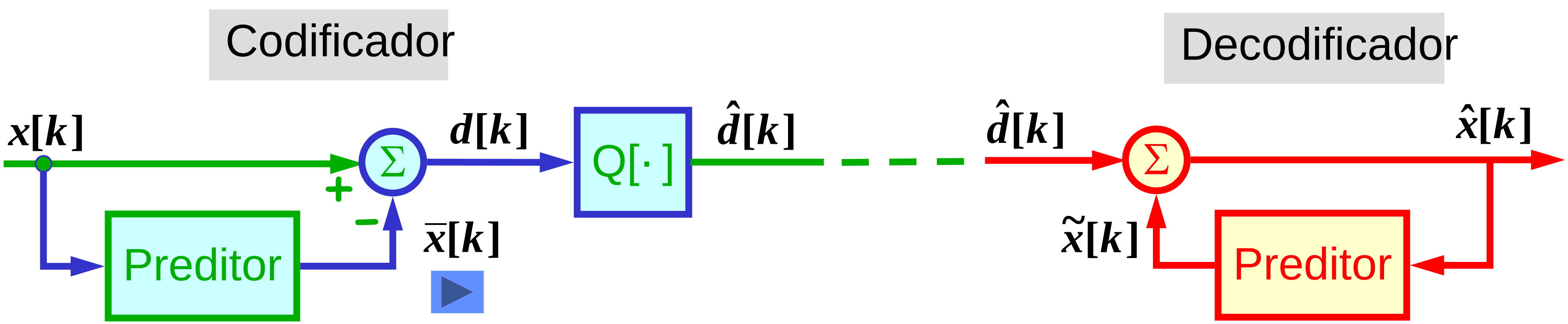
$$= \frac{R_b}{2\log_2 M} \text{Hz}$$

$$R_S = \frac{R_b}{I_M} = \frac{R_b}{\log_2 M}$$

Para codificação binária $R_s = R_b$

Codificação PCM diferencial – DPCM





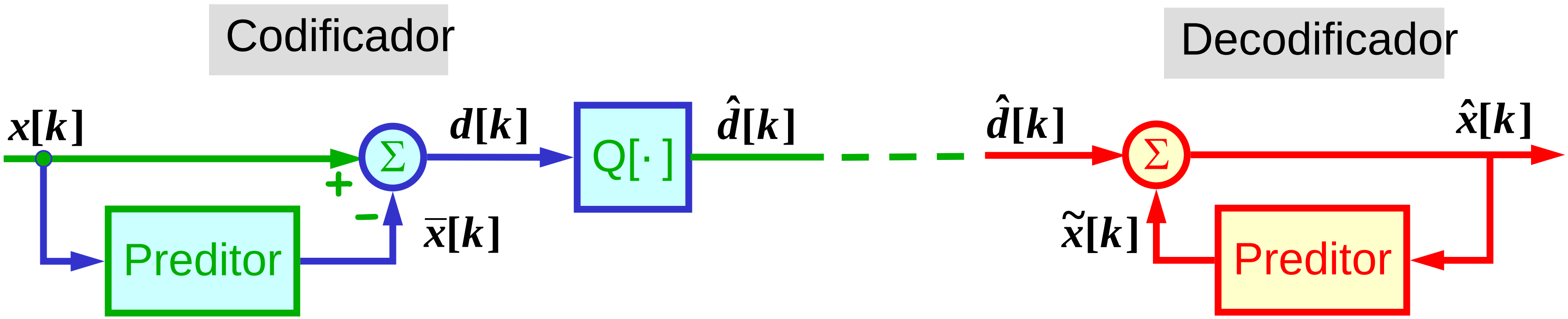
$$\hat{x}[k] = \tilde{x}[k] + \hat{d}[k]$$

$$\hat{x}[k] = x[k] + e[k]$$

$$e[k] = ?$$

$e[k]$: erro de reconstrução

Codificação PCM diferencial – DPCM



$$\hat{x}[k] = \tilde{x}[k] + \hat{d}[k]$$

$$\hat{x}[k] = \tilde{x}[k] + d[k] + q[k]$$

$$\hat{x}[k] = \bar{x}[k] + \varepsilon[k] + d[k] + q[k]$$

$$\hat{x}[k] = x[k] + q[k] + \varepsilon[k]$$

$$\hat{x}[k] = x[k] + e[k]$$

$$\hat{d}[k] = d[k] + q[k]$$

$$\tilde{x}[k] = \bar{x}[k] + \varepsilon[k]$$

$$\bar{x}[k] + d[k] = x[k]$$

$$e[k] = q[k] + \varepsilon[k]$$

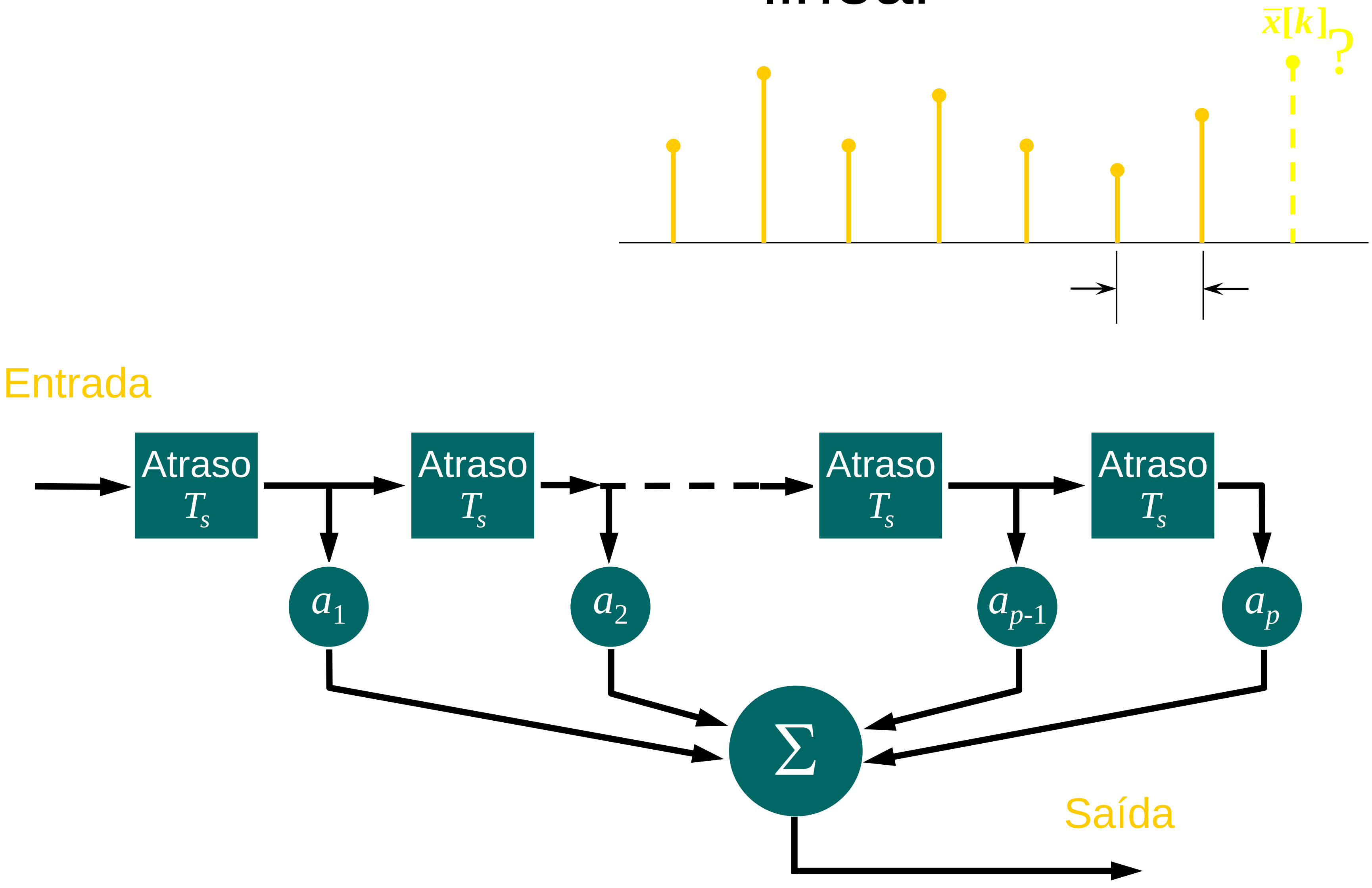
$$\tilde{x}[k] = \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{x}[k-i]$$

$$\neq$$

$$\bar{x}[k] = \sum_{i=1}^{p} a_i x[k-i]$$

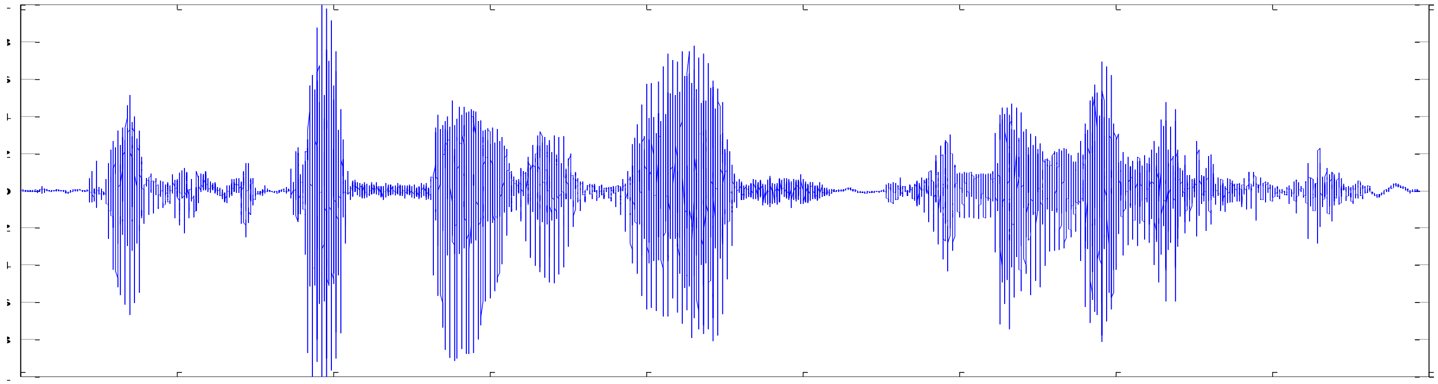
Esse componente do erro de reconstrução pode assumir valores muito grandes

Filtro transversal usado como preditor linear

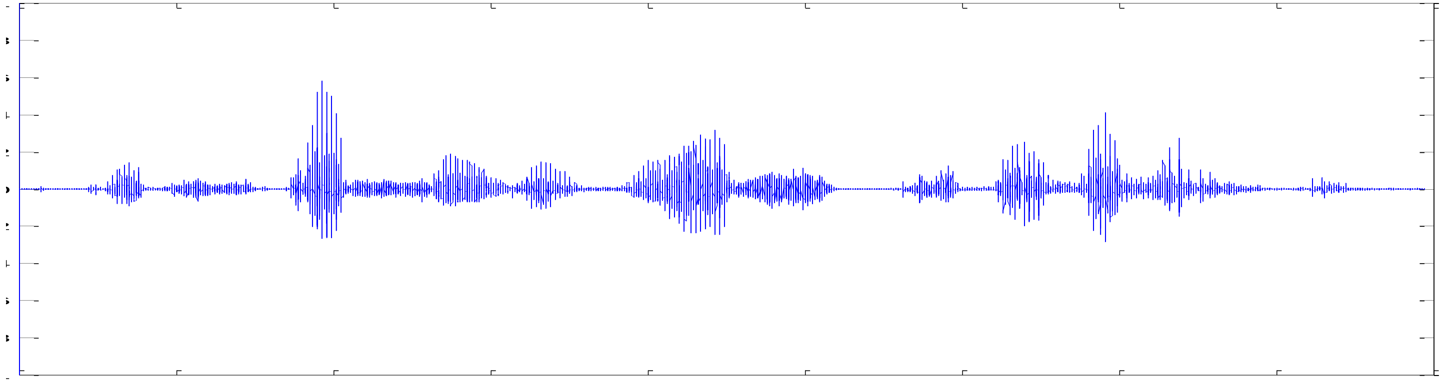


Efeito da predição na faixa dinâmica das amostras

Sinal original, $x[k]$

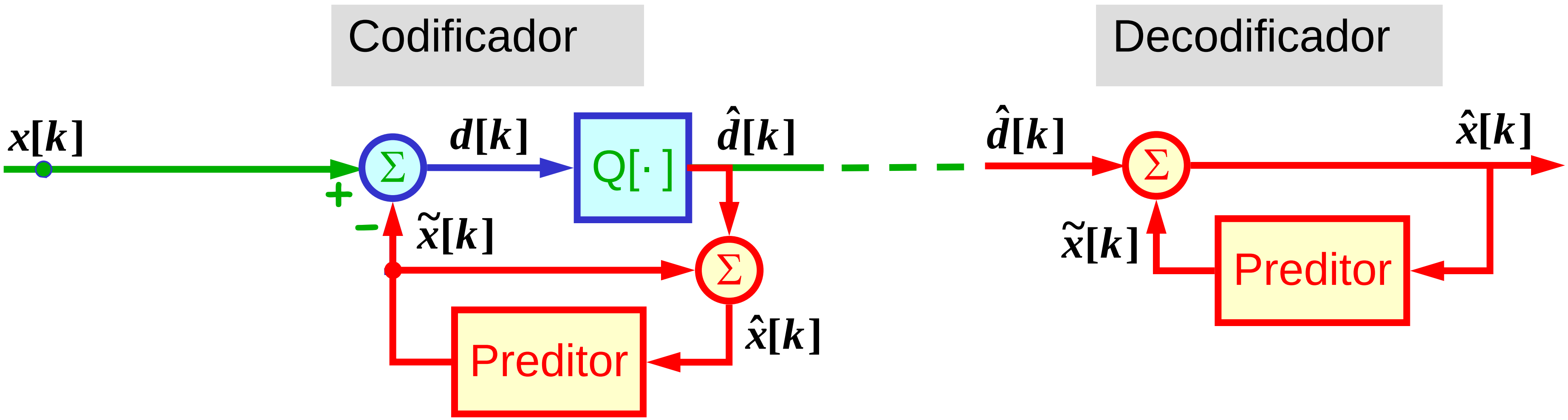


Erro de predição, $d[k] = x[k] - x[k-1]$



departamento de engenharia elétrica

Sistema DPCM prático



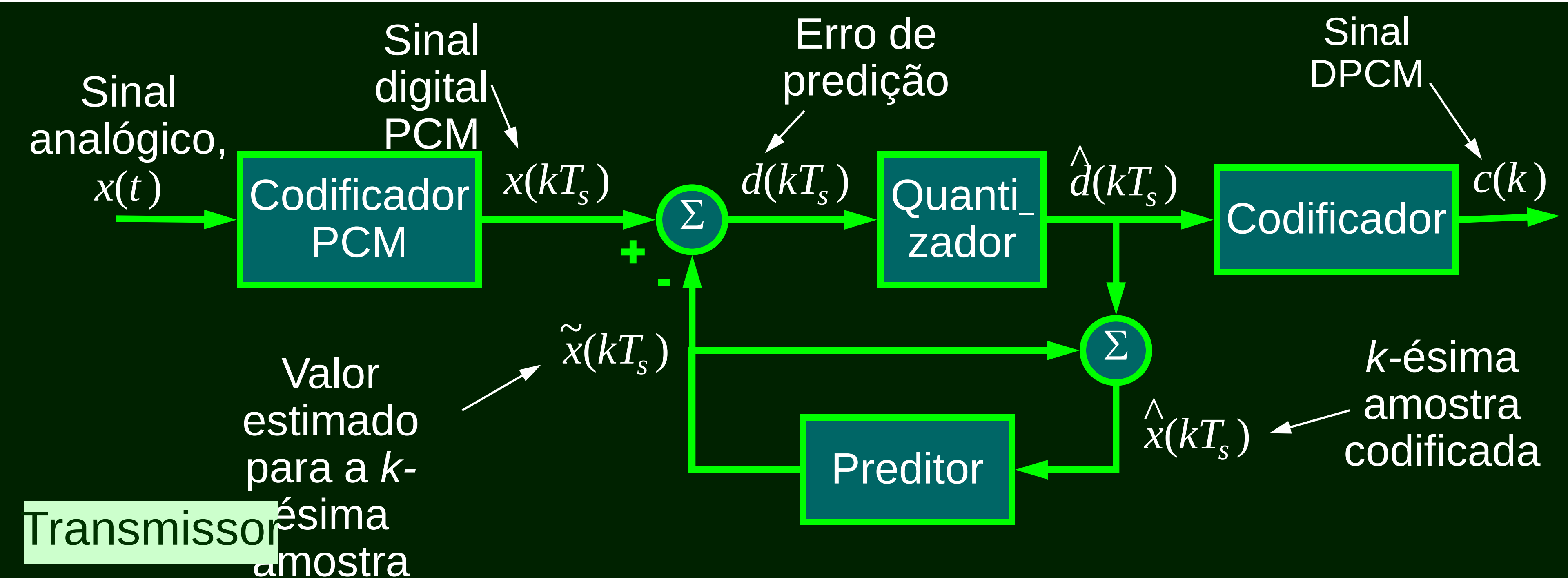
$$\hat{x}[k] = \tilde{x}[k] + \hat{d}[k]$$

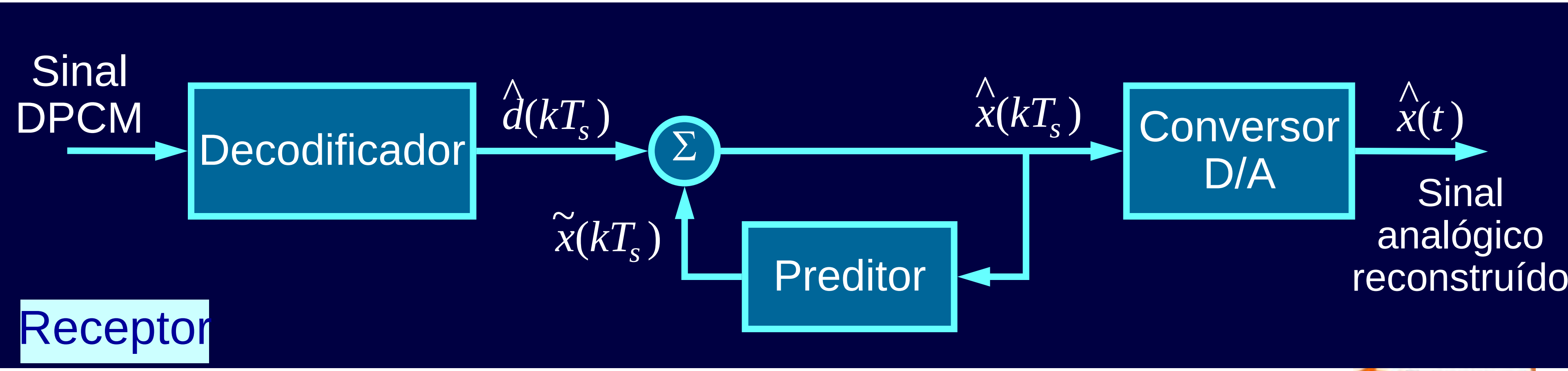
$$\hat{x}[k] = \underbrace{\tilde{x}[k] + \overbrace{d[k]}^{}}_{} \overbrace{\;+\; q[k]}^{}$$

$$\boxed{\hat{x}[k] = x[k] + q[k]}$$

erro de reconstrução de $\hat{x}[k]$ = $q[k]$ = erro de quantização de $d[k]$

Sistema DPCM: transmissor e receptor





Ganho de predição

$$RSR_q = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{\langle q^2(t) \rangle} = \frac{P_x}{P_q}$$

Quantizador uniforme:

$$P_q = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$P_{q,\text{PCM}} = \frac{\Delta_{\text{PCM}}^2}{12} = \frac{(2X_{\text{max}}/L)^2}{12}$$

$$P_{q,\text{DPCM}} = \frac{\Delta_{\text{DPCM}}^2}{12} = \frac{(2D_{\text{max}}/L)^2}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} RSR_{q,\text{PCM}} &= \frac{P_x}{P_{q,\text{PCM}}} \\ RSR_{q,\text{DPCM}} &= \frac{P_x}{P_{q,\text{DPCM}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_p = \frac{RSR_{q,\text{DPCM}}}{RSR_{q,\text{PCM}}} = \frac{P_{q,\text{PCM}}}{P_{q,\text{DPCM}}}$$

$$= \frac{X_{\text{max}}^2}{D_{\text{max}}^2} \cong \frac{P_x}{P_d}$$

$$\boxed{G_p = \frac{RSR_{q,\text{DPCM}}}{RSR_{q,\text{PCM}}} = \frac{P_x}{P_d}}$$

Ganho de Predição

$$\text{Ganho de predição} = G_p = \frac{\text{Potência de } x(t)}{\text{Potência de } d(t)} = \frac{P_x}{P_d} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2}$$

No caso de sinais de voz, esse ganho é de 4 a 11 dB. Isso permite que o número de bits por amostra em um sistema DPCM seja 1 a 2 bits menor que aquele requerido pelo PCM para propiciar a mesma RSR. Para uma taxa de amostragem de 8 kHz, isso significa uma economia de 8 a 16 kbps.

Um ganho maior do que o mencionado pode ser obtido se o preditor e o quantizador do esquema DPCM forem adaptativos. Nesse caso, o esquema é denominado ADPCM (*adaptive differential pulse-code modulation*). Um ADPCM que despende 32 kbps pode propiciar praticamente a mesma qualidade de um PCM lei-A que despende 64 kbps.

Padrões ITU-T para telefonia fixa

Padrão	Esquema	Taxa de amostragem	Bits por amostra	Taxa de bits	Qualidade (MOS[&])	Ano de conclusão
G.711	Log-PCM	8 kHz	8 bits	64 kbps	4,3	1972
G.721 [$]	ADPCM	8 kHz	4 bits	32 kbps	4,1	1984

[$] Atualmente o padrão G.721 faz parte do padrão G.726

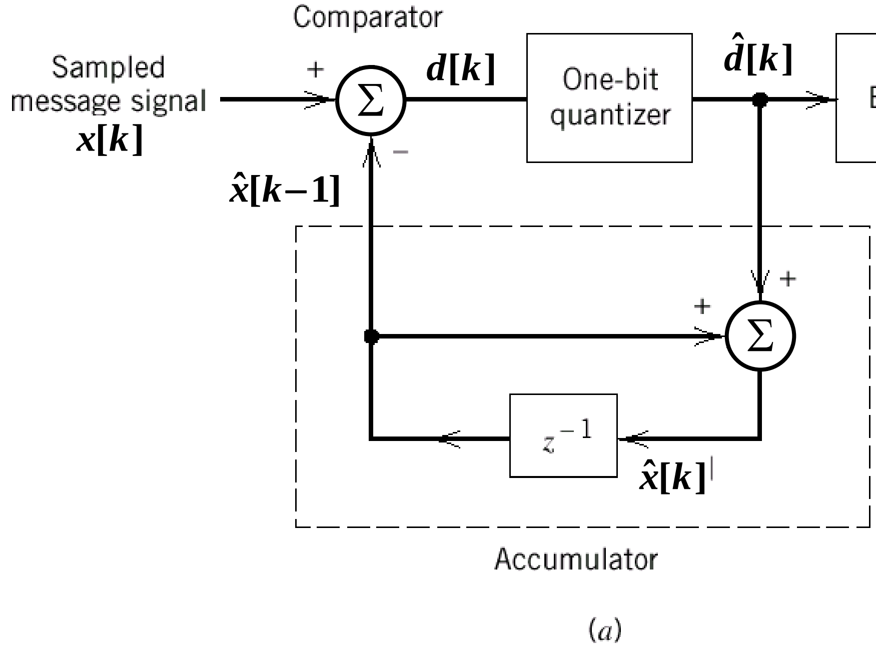
[&] MOS: *mean opinion score* (escore médio de opnião) — é uma medida subjetiva da qualidade de um sinal de voz, com uma escala de cinco pontos:

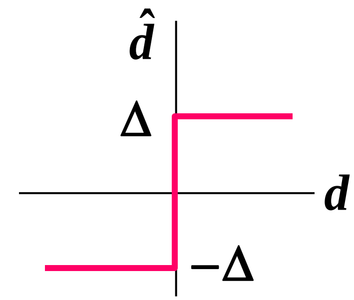
5 (excelente), 4 (boa), 3 (satisfatória ou razoável), 2 (ruim) e 1 (muito ruim)

departamento de engenharia elétrica

Sistema DM (delta modulation)

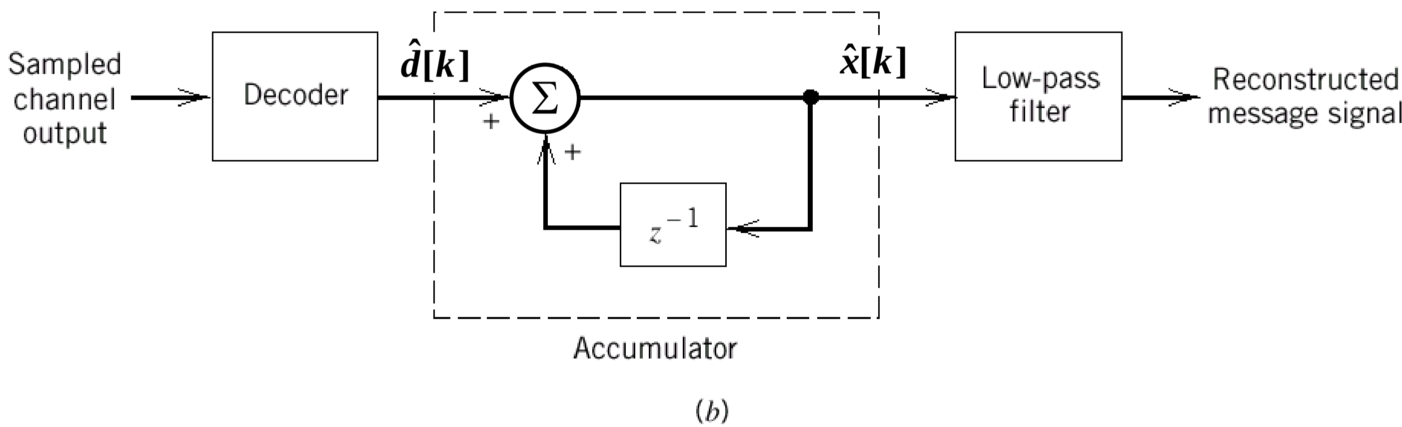
(a) Transmissor



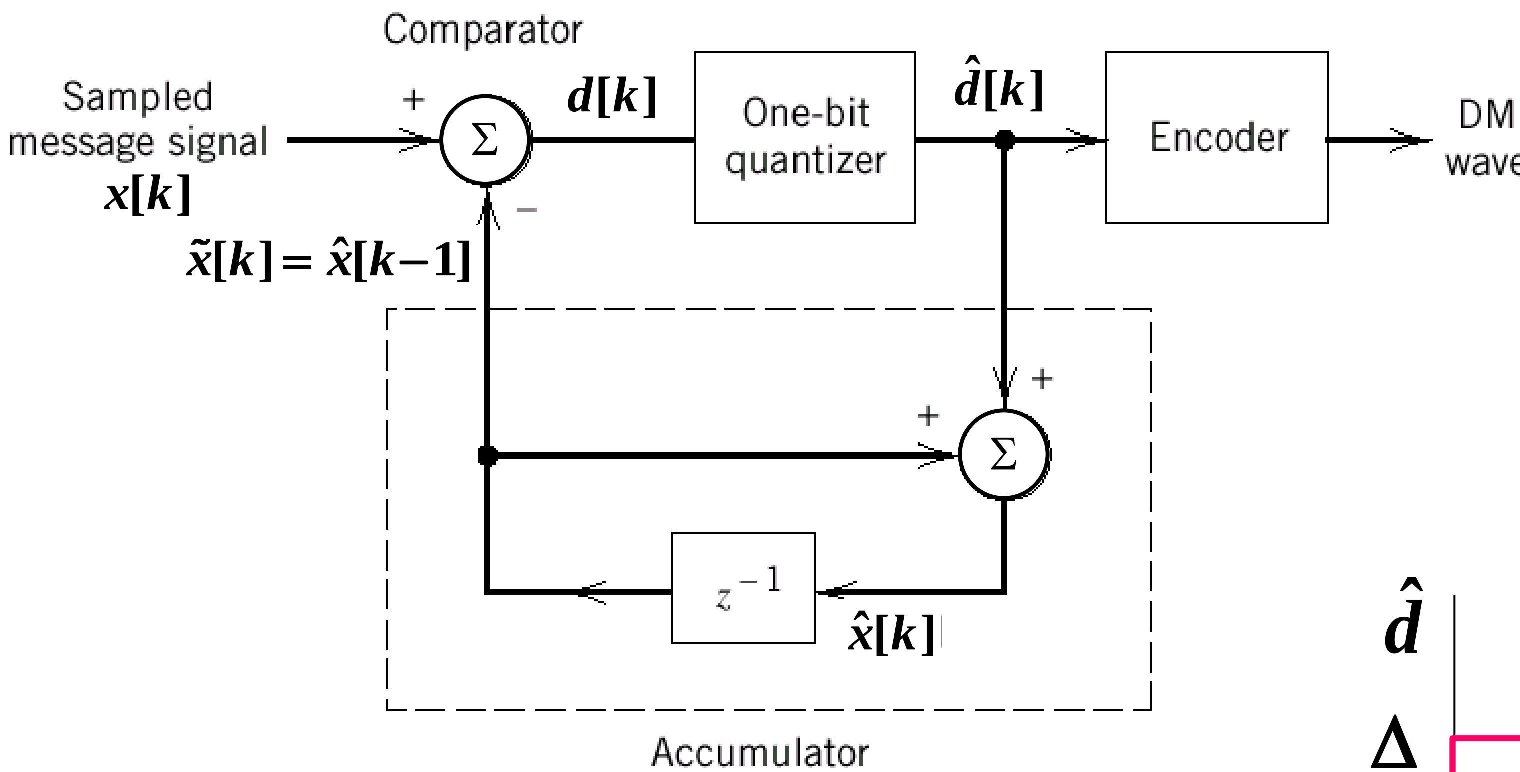


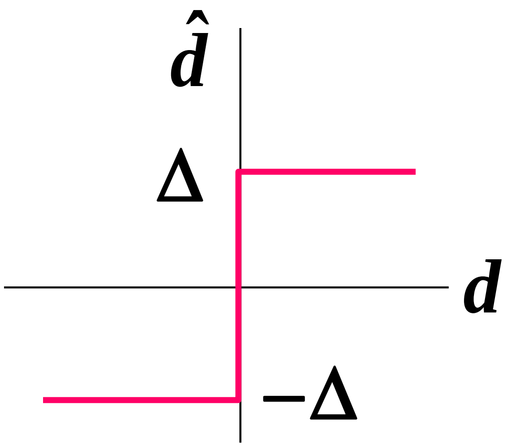
One-bit quantizer

(b) Receptor



Transmissor DM





Quantizador de um bit

Ilustração da modulação delta (delta modulation – DM)

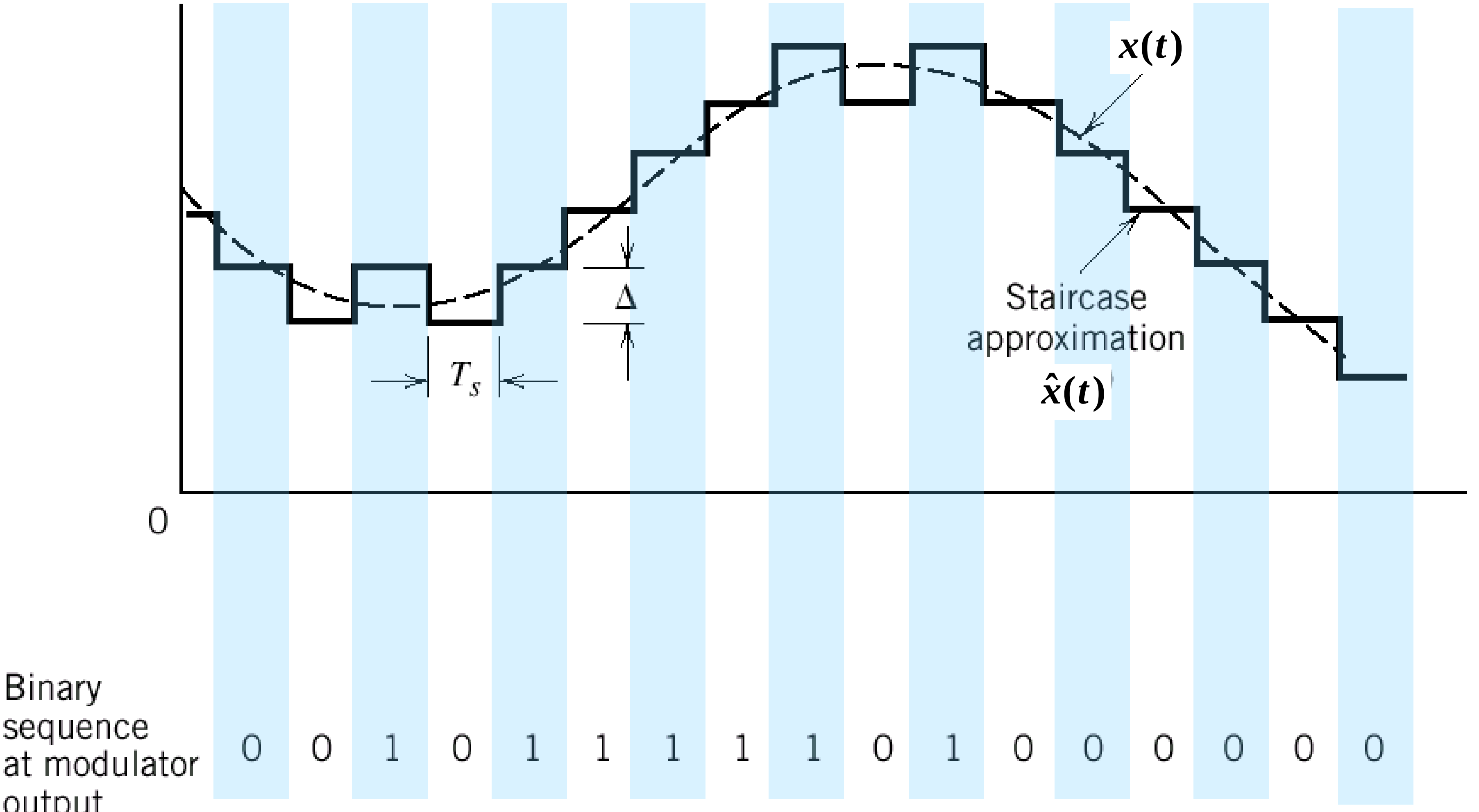


Ilustração dos dois tipos de erro de quantização na modulação delta