Controle de Processos: *Modelagem matemática de processos*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti
& David Fiorillo

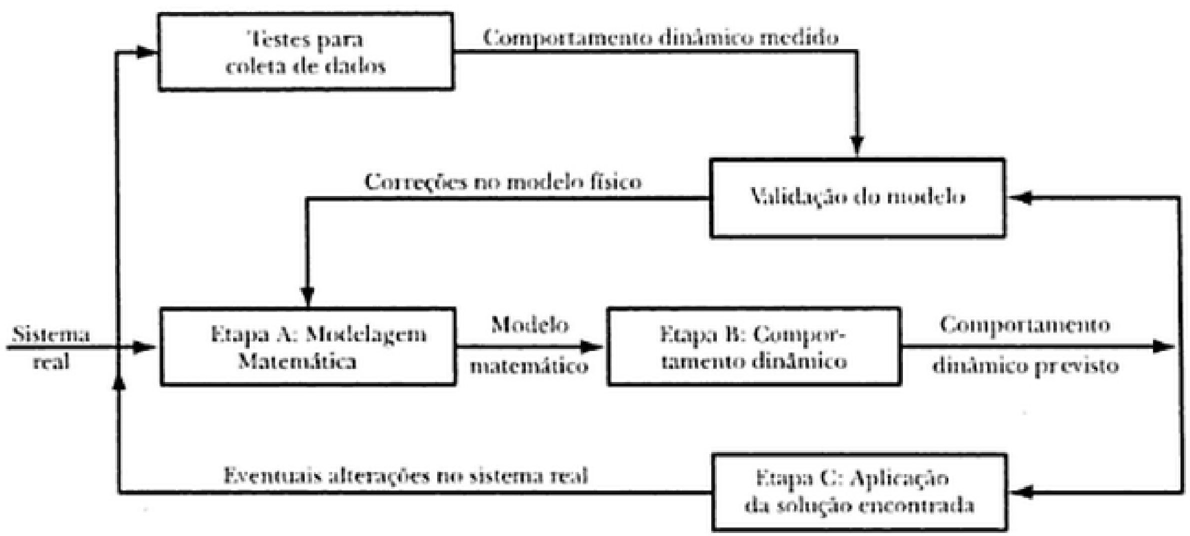
Laboratório de Automação e Robótica (LARA)
Dept. Engenharia Elétrica - UnB

Conteúdo

1. Etapas no estudo da dinâmica de sistemas
2. Métodos teóricos para obtenção de modelos matemáticos de sistemas
3. Modelagem: do sistema real ao modelo físico
4. Equações de mecanismos: do modelo físico ao matemático
5. Cuidados na modelagem
6. Modelos nas áreas da engenharia
7. Exemplo de modelagem
8. Comportamento dinâmico: simulação do modelo físico
9. Análise do comportamento dinâmico
10. Exemplo de simulação de modelo
11. Multiplicidade de modelos

Etapas no estudo da dinâmica de sistemas

- A semelhança no comportamento dinâmico dos sistemas físicos permite que se desenvolva um padrão analítico de estudo. A dinâmica é o estudo de como certas entidades variam no tempo e das causas que provocam essas variações. Há 3 etapas que caracterizam esse estudo:
  - Obter um modelo matemático;
  - Estudar o comportamento dinâmico do modelo;
  - Aplicar o modelo para a solução de um problema.

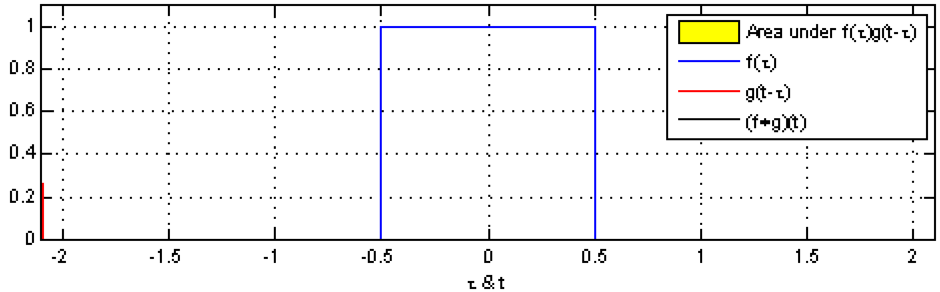


Representação de modelos

- As formas mais comuns de se representar modelos matemáticos de processos são:
  - Modelos de convolução discreta: através da resposta ao impulso (ou ao pulso, no caso de sistemas em tempo discreto) ou ao degrau, tratando-se de modelos não paramétricos;
  - Modelos de entrada/saída ou modelos externos: representados através de funções de transferência ou equações de estado, sendo modelos do tipo paramétricos;
  - Modelos em espaço de estado ou modelos internos: representados através de funções de transferência ou equações de estado, sendo modelos do tipo paramétrico.

Representação de modelos

- Para se trabalhar com modelos de convolução discreta, é necessário excitar o processo com impulsos (pulsos) ou degraus. Neste caso, pressupõe-se a existência de um processo já em estado operacional. Como não possuímos plantas reais não detalharemos esta técnica.



- Neste curso trabalharemos com modelos matemáticos do tipo paramétrico, tanto internos como externos. Para desenvolvê-los, basta se conhecer os princípios fundamentais que regem os fenômenos físicos, químicos, biológicos e etc. que ocorrem nos processos. Esses modelos são representados por funções de transferências (aplicáveis apenas a sistemas lineares) ou por equações em espaço de estados (aplicáveis tanto a sistemas lineares como não lineares).
- Além destas representações, existem outras formas de representar modelos de processos como: análise de correlação, redes neurais, lógica fuzzy, etc.

Métodos teóricos para obtenção de modelos matemáticos de sistemas

- Há 3 estágios para gerar analiticamente um modelo matemático e simulá-lo:
  - Especificar o sistema e imaginar um modelo físico que se ajuste ao comportamento real;
  - Derivar um modelo matemático através de equações de mecanismos baseado nas leis da física;
  - Com o modelo, estudar seu comportamento dinâmico através da solução das equações diferenciais para as devidas entradas.

Modelagem: do sistema real ao modelo físico

- Um modelo físico imaginário que se assemelha ao sistema real em suas características mais marcantes, mas que é mais simples (uma idealização) e portanto, mas propício ao estudo. A habilidade para simplificar, a ponto de não invalidar o modelo, é o ponto crucial em sua elaboração. Os seguintes tipos de aproximação são passíveis de utilização na maioria dos problemas:
  – Desprezar pequenos efeitos: reduz o número de variáveis e, consequentemente, o número e a complexidade das equações de movimento.
  – Assumir ambiente independente: ambiente em torno do sistema não seja afetado por ele.
  – Substituir características distribuídas por concentradas: resultando em um modelo com equações diferenciais ordinárias ao invés de equações diferenciais parciais.
  – Assumir relações lineares de causa e efeito entre as variáveis físicas: frequentemente um sistema não-linear pode ser aproximado por equações lineares. A análise de um sistema linear pode ser efetuada por métodos analíticos, sem a necessidade de métodos numéricos. Quando a equação linear é resolvida, a solução é geral, valendo para todas as magnitudes do movimento.
  – Assumir que os parâmetros físicos não variem com o tempo: conduz a equações diferenciais invariantes no tempo;
  – Desprezar incertezas e ruídos: Em sistemas reais há um certo grau de incertezas nos valores de parâmetros, de medições efetuadas, de entradas e disturbios.

Equações de mecanismos: do modelo físico ao matemático

- Um ponto importante a ser considerado na geração das equações de um modelo é a relação das variáveis físicas (i, V, x, v, etc) que descreve o estado instantâneo de um sistema.
- É de praxe escrever relações de equilíbrio como: balanço de forças, vazões e energia; ou relações de compatibilidade, que descrevem as interconexões das variáveis (relações constitutivas), para encontrar equações do modelo.
- Portanto, ao se gerar as equações do mecanismos devem:
  - Definição das variáveis;
  - Relações do sistema (equilíbrio)
  - Relações constitutivas para cada elemento;
  - Combinação das relações obtidas resultando no modelo desejado.

Cuidados na modelagem

- Definição das fronteiras físicas do sistema: deve-se especificar claramente as fronteiras físicas de um sistema (volume de controle) antes de escrever suas relações de equilíbrio. Dentro de um volume controle espera-se que qualquer variável física possua simultaneamente o mesmo valor em todos os seus pontos.
- Origem das relações constitutivas: as relações constitutivas dos elementos individuais são puramente empíricas. Assim, a relação entre força e deslocamento de uma mola ou a relação entre a corrente e a tensão em um resistor não são deduzidas de nenhum princípio básico da física, sendo determinadas experimentalmente em estudos sobre relação causa/efeitos.

Cuidados na modelagem

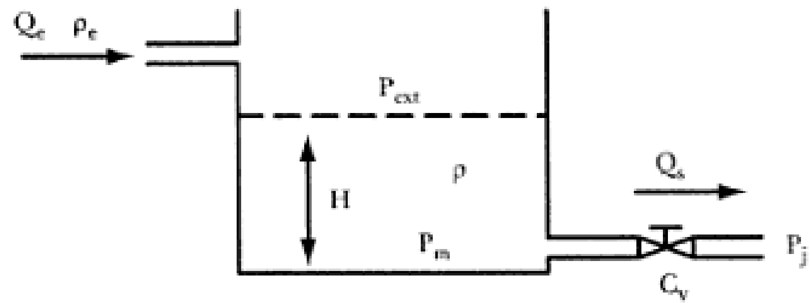
- Classificação das variáveis físicas: As variáveis físicas podem ser classificadas em variáveis T (through, ou através, ou de uma ponta a outra ou longitudinal, variável de um ponto) ou A (across, ou entre, ou de um lado ao outro ou transversal, variável de dois pontos). As variáveis T medem a transmissão de algo através de um elemento: corrente através de um resistor, vazão através de um duto, força através de uma mola, etc. As variáveis A medem a diferença no estado entre as extremidades de um elemento como a queda de tensão num resistor, a diferença de pressão num duto, etc.
  - Relações de equilíbrio se dão entre variáveis T e são também chamadas de relações nodais, de vértice, de continuidade ou de fluxo (lei da corrente de Kirchhorf, continuidade, equilíbrio de forças)
  - Relações de compatibilidade são sempre relações entre variáveis A e são também conhecidas como relações de malha, caminho ou de conectividade (lei das malhas de Kirchhorf, queda de pressão, etc).

Modelos nas áreas da engenharia

- Engenharia mecânica: leis de Newton (equilíbrio de forças e momentos) + leis particulares (relações de atrito, equação de mola, etc);
- Engenharia elétrica: leis de Kirchhorf (relação tensão/corrente em componentes (resistore, capacitor, indutor), relações de ganho em amplificadores, equações de torque/fluxo magnético em motores, etc)
- Engenharia química: equações de balanço (princípios de conservação de massa, energia e momento) + leis particulares (equação dos gases perfeitos, cinética de reações, leis da termodinâmica, etc)

Exemplo de modelagem

- Equação do sistema
  - Balanço de massa
    - A massa específica da água é constante
    - Desprezam-se dilatações térmicas do tanque, área constante ao longo da altura
- Equação constitutiva
  - O parâmetro Cv é uma característica da válvula, sendo fornecido pelo fabricante.
- Equação do movimento
  - Parâmetros: Cv, g, A e ρ são constantes;
  - Variáveis externas a serem fornecidas: $Q_e(t)$, $P_{ext}(t)$ e $P_j(t)$;
  - Condição inicial: H(0)
  - Variável de saída: H(t)



$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot A \frac{dH}{dt} = \rho_e \cdot Q_e - \rho \cdot Q_s$$

$$A\frac{dH}{dt} = Q_e - Q_s$$

$$Q_s = C_v \cdot \sqrt{\Delta P}$$

$$Q_s = C_v \cdot \sqrt{P_m - P_j}$$

$$P_m = P_{ext} + \rho \cdot g \cdot H$$

$$Q_s = C_v \cdot \sqrt{P_{ext} + \rho \cdot g \cdot H - P_j}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q_e - C_v \cdot \sqrt{P_{ext} + \rho \cdot g \cdot H - P_j}}{A}$$

Comportamento dinâmico: simulação do modelo físico

São necessários:

- Modelo matemático
- Equação descritiva das variáveis de entrada em função do tempo;
- Valor das condições iniciais nas variáveis de interesse. As equações diferenciais exigem valores numéricos para as condições de contorno. O número dessas condições é igual à ordem da equação. Em particular, os valores de contorno das variáveis dependentes para o valor inicial da variável independente são chamados de “condições iniciais”.

Análise do comportamento dinâmico

A análise do comportamento dinâmico do sistema implica em verificar como as variáveis de interesse respondem no tempo. Para realizar esse estudo há duas alternativas:

- Encontrar a solução analítica das equações de movimento que descrevam a resposta temporal do sistema; ou
- Realizar a integração numérica das equações de movimento do sistema.

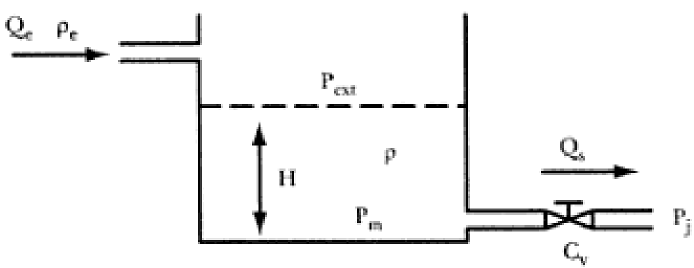
Exemplo de simulação de modelo

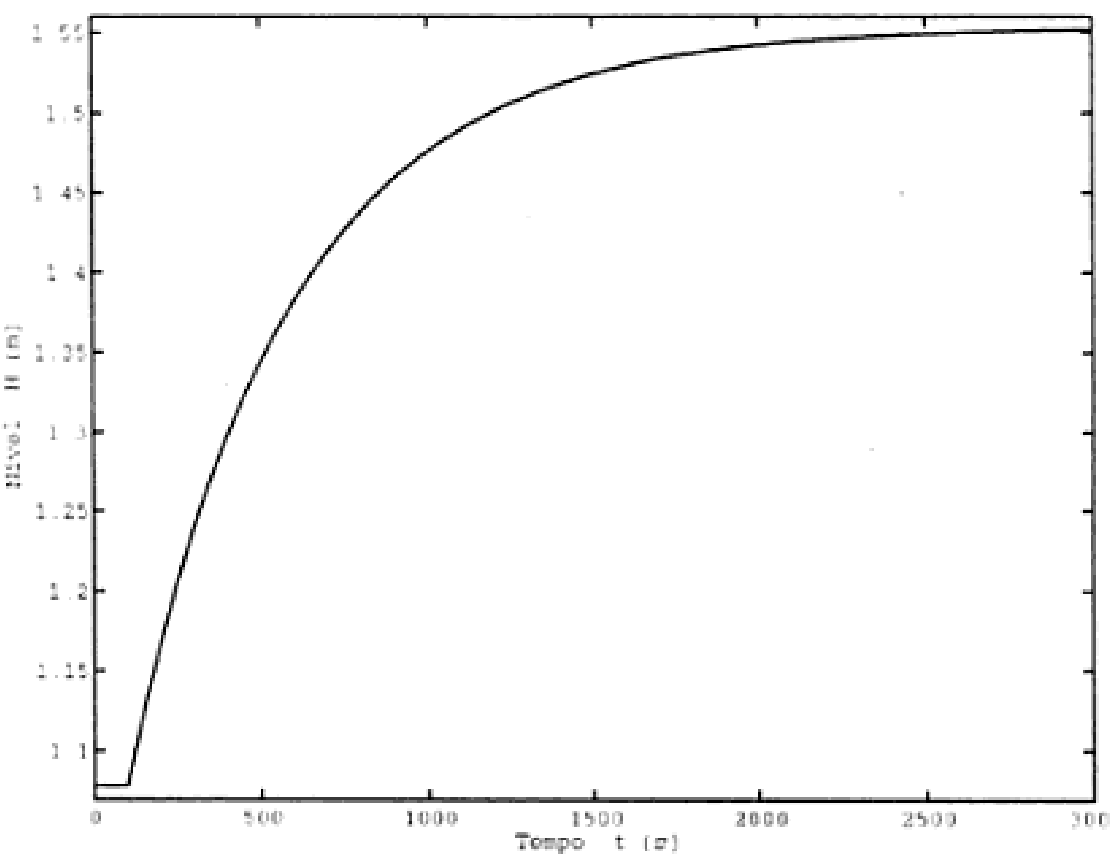
$Q_e = 0{,}05\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ $\quad Q_e = 0{,}06\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

$g = 9{,}8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ $\quad C_v = 4{,}8628 \cdot 10^{-4}\ \dfrac{\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{Pa}}}$

$H(0)$ em 1,0788 m)

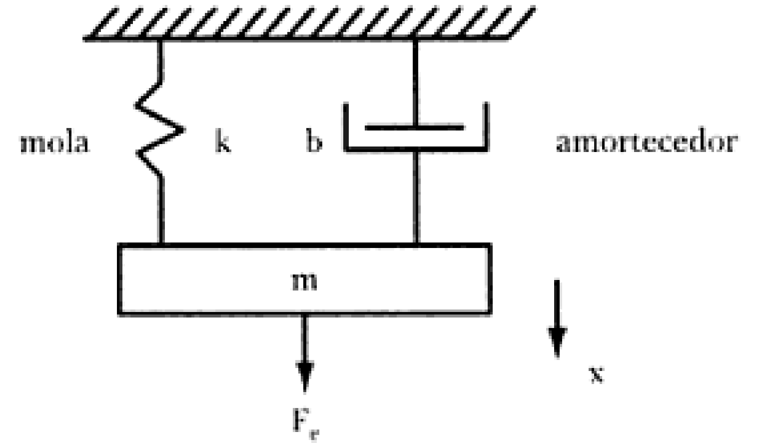
$\rho = 1000\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ $\quad A = 10\ \mathrm{m}^2$ $\quad P_{ext} = P_j = 100.000\ \mathrm{Pa}$





Multiplicidade de modelos

- Não há um único modelo para um dado processo, mas uma infinidade deles, cada um apropriado a um dado objetivo.



$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_e$$

$$F_k = \frac{k \cdot x}{1 - \varepsilon \cdot |x|}$$

$$(\varepsilon \cdot |x| << 1)$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + \frac{k \cdot x}{1 - \varepsilon \cdot |x|} = F_e$$

Referências

- Claudio Garcia – Modelagem e simulação - 2005 – EDUSP.