Controle de Processos: *Representação de modelos*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti
& David Fiorillo

Laboratório de Automação e Robótica (LARA)
Dept. Engenharia Elétrica - UnB

Conteúdo

Introdução

- Esta seção apresentará modelos matemáticos paramétricos tanto de entrada/saída como em espaço de estados.
- Esses modelos (tipo paramétricos) são representados através de funções de transferências (aplicáveis apenas a modelos lineares do tipo entrada/saída) ou através de equações de estado (aplicáveis a modelos lineares e não-lineares, tanto de entrada/saída como em espaço de estados).
- Como muitas vezes existe o interesse de se linearizar modelos, visando viabilizar certos tipos de estudo, relacionados, por exemplo, com análise de estabilidade ou desenvolvimento de controladores, apresentam-se alguns conceitos básicos referentes à linearização.

Linearização de equações

- Lidar com sistemas lineares é muito mais simples e fácil do que sistemas não lineares devido a uma principal razão: sistemas lineares são aplicáveis o Princípio da Superposição. Isto implica que, em qualquer sistema multivariável linear, pode-se analisar individualmente o efeito de cada variável de entrada na saída e depois sobrepor seus efeitos.
- Existem muitas ferramentas aplicáveis na análise e projeto de sistemas lineares, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, como:
  - O critério de Routh, empregado na análise de estabilidade de sistemas em tempo contínuo e discreto;
  - O critério de Jury, aplicado na análise de estabilidade de sistemas em tempo discreto;
  - O Lugar Geométrico das Raízes (LGR), aplicado na análise de estabilidade e no projeto de controladores, tanto no domínio do tempo contínuo quanto discreto; e
  - Os diagramas de Bode e de Nyquist, usados na análise de estabilidade e projeto de controladores no domínio da frequência.

Linearização de equações

- Além dessas ferramentas, pode-se ainda aplicar aos sistemas lineares a transformada de Laplace no domínio do tempo contínuo e gerar funções de transferências, ou então a transformada Z no domínio do tempo discreto e gerar funções de transferência discretas.
- A linearização de equações é importante porque, ao serem linearizadas em torno de alguma condição operacional estacionária, as equações podem descrever adequadamente a resposta dinâmica do sistema em alguma região em torno das condições estacionárias. O tamanho desta região, o qual está relacionado com a precisão da aproximação linear, depende do tipo de não linearidade e da magnitude causada no sistema. O quanto uma solução linear se aproxima da realidade pode ser determinada por comparação com a solução da equação original.

Linearização de equações

- A não linearização de uma equação pode se manifestar de diferentes formas. Por exemplo, ao se trabalhar com sistemas eletromecânicos, as não linearidades mais comuns são saturação, histerese (jogo de engrenagens), zona morta, atrito estático e de Coulomb, e etc..
- Por outro lado, ao se lidar com processos industriais, há dois há dois tipos de não linearidades que são predominantes nas equações que compõem o modelo: presença de constantes nas equações dos modelos ou a existência de funções não lineares (tais como variáveis elevada a uma potência, raízes quadradas, log, trigonométricas, etc, ou produto de variáveis).

Linearização de equações

- Os métodos de linearização aqui mencionados se aplicam às não linearidades tipicamente presentes nas equações de modelos. Como são dois os tipos predominantes, seguem as seguintes técnicas específicas de linearização:
  - Emprego de variáveis incrementais ou de perturbação, aplicáveis aos casos em que ocorre a presença de constantes nas equações; e
  - Uso de relações lineares equivalentes através de técnicas de linearização por expansão em série de Taylor, aplicáveis, por exemplo, aos casos de variáveis elevadas a uma potência ou produto de variáveis.
- A operação de linearização pode ser representada por

$f(x,t) \rightarrow \tilde{f}(x,t)$ *onde* f *é uma função não linear e* $\tilde{f}$ *é linear em determinado intervalo de* x *e* t.

Variáveis de perturbação, de desvio ou incrementais

- A presença de uma constante na equação a torna não-linear, sendo que a comprovação deste fato é facilmente demonstrável.

$$f(x) = x + 1$$

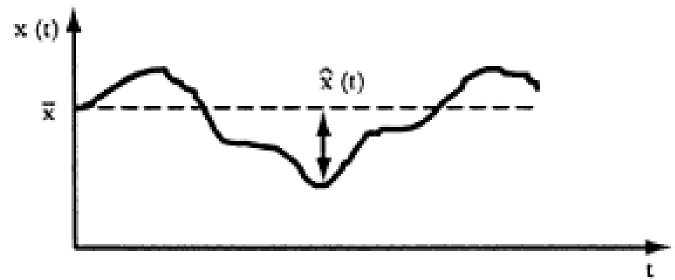
$$f(K \cdot x) = K \cdot x + 1 \quad \neq \quad K \cdot f(x) = K \cdot (x + 1)$$

$$f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1 \quad \neq \quad f(x_1) + f(x_2) = x_1 + 1 + x_2 + 1$$

- Desta forma, não existe a transformada de Laplace de uma constante K.

Variáveis de perturbação, de desvio ou incrementais

- Para evitar as constantes nas equações pode-se extrair as variáveis incrementais das mesmas (só a parte que interessa).
- As variáveis de interesse deste curso são funções do tempo, seus afastamentos dos valores estacionários são também funções do tempo e são chamados de perturbações, desvios ou incrementos



$$\hat{x}(t) = x(t) - \bar{x}$$

$$x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t)$$

$\hat{x}(t) =$ flutuações do valor da variável x em torno de seu valor estacionário em regime de operação nominal. $\hat{x}(t)$ é conhecida como variável incremental, de desvio ou de perturbação de $x(t)$

$x(t) =$ valor da variável x no instante t. $x(t)$ equivale ao valor total da variável, incluindo uma parte fixa ($\bar{x}$) mais uma parte de flutuações $\hat{x}(t)$ em torno desse valor fixo

$\bar{x}$ $=$ valor nominal da variável x em regime estacionário de operação

Variáveis de perturbação, de desvio ou incrementais

- A utilização das variáveis de perturbação traz os seguintes benefícios:
  - Os termos que contenham apenas constantes nas equações diferenciais ordinárias desaparecem; e
  - As condições iniciais para as variáveis de perturbações são todas iguais a zero se o ponto de partida é a condição estacionária nominal de operação.
- Ao se aplicar as variáveis incrementais a uma equação, deve-se substituir todas da equação por suas equivalentes variáveis de perturbação.

Variáveis de perturbação, de desvio ou incrementais

- Exemplo

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) + 1$$

$$\hat{y}(t) = y(t) - \overline{y} \quad \hat{x}(t) = x(t) - \overline{x}$$

$$\tau \frac{d\hat{y}}{dt} + \hat{y}(t) + \overline{y} = K \cdot \left[\hat{x}(t) + \overline{x}\right] + 1$$

$$x(t) = \overline{x} \text{ e } y(t) = \overline{y} .$$

$$\hat{y}(t) = \hat{x}(t) = 0$$

$$\overline{y} = K \cdot \overline{x} + 1$$

$$\tau \frac{d\hat{y}}{dt} + \hat{y}(t) = K \cdot \hat{x}(t)$$

$$\hat{y}(0) = 0 \text{ e } \hat{x}(0) = 0$$

$$\hat{Y}(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s} \hat{X}(s)$$

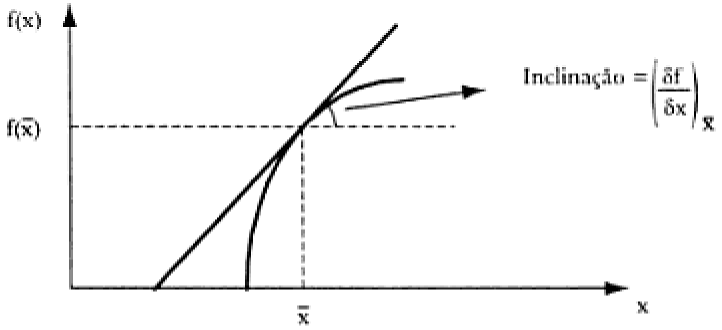
$$y(t) = \hat{y}(t) + \overline{y} = \hat{y}(t) + K \cdot \overline{x} + 1$$

Linearização por expansão em série de Taylor

- Ao linearizar uma função, expande-se a função não linear em série de Taylor em torno do ponto estacionário de operação, desprezando todos os termos após a 1ª derivada parcial. Seja inicialmente a aproximação linear de uma variável. Expandindo-se a função f(x) em série de Taylor em torno de um ponto, tem-se:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(\bar{x})} \cdot (x - \bar{x}) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(\bar{x})} \cdot (x - \bar{x})^2 + \dots$$

$$f(x) \cong f(\bar{x}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(\bar{x})} \cdot (x - \bar{x})$$



- Para funções não lineares com duas variáveis deve-se expandir f(x1,x2) em série de Taylor em torno de valores estacionários, conforme abaixo:

$$f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \cdot (x_2 - \bar{x}_2) +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \cdot \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \cdot \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} + \dots$$

$\bar{x}_1$ = valor estacionário de x_1 $\bar{x}_2$ = valor estacionário de x_2

Desprezando-se as derivadas de ordem superior a 1, resulta:

$$f(x_1, x_2) \cong f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \cdot (x_2 - \bar{x}_2)$$

Linearização por expansão em série de Taylor

- Exemplo de linearização de raiz quadrada:

$$f(x) = k \cdot \sqrt{x}$$

$$f(x) \cong k \cdot \sqrt{\bar{x}} + \frac{k}{2 \cdot \sqrt{\bar{x}}}(x - \bar{x})$$

- Exemplo de linearização de multiplicação de variáveis

$$f(x, y) = x \cdot y$$

$$f(K \cdot x,\ K \cdot y) = K \cdot x \cdot K \cdot y \quad \neq \quad K \cdot f(x, y) = K \cdot x \cdot y$$

$$f(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) \quad \neq \quad f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

$$f(x, y) \cong \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot (x - \bar{x}) + \bar{x} \cdot (y - \bar{y})$$

Substituindo-se $(x - \bar{x})$ e $(y - \bar{y})$ por suas respectivas variáveis incrementais $\hat{x}$ e $\hat{y}$, resulta:

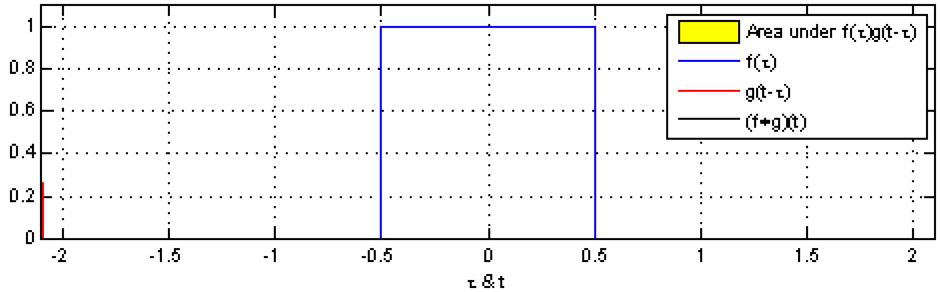
$$f(x, y) \cong \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \hat{x} + \bar{x} \cdot \hat{y}$$

Representações usuais de modelos matemáticos

- As formas mais comuns de se representar modelos matemáticos de processos são:
  - Modelos de convolução discreta: através da resposta ao impulso (ou ao pulso, no caso de sistemas em tempo discreto) ou ao degrau, tratando-se de modelos não paramétricos;
  - Modelos de entrada/saída ou modelos externos: representados através de funções de transferência ou equações de estado, sendo modelos do tipo paramétricos;
  - Modelos em espaço de estado ou modelos internos: representados através de funções de transferência ou equações de estado, sendo modelos do tipo paramétrico.

Representações usuais de modelos matemáticos

- Para se trabalhar com modelos de convolução discreta, é necessário excitar o processo com impulsos (pulsos) ou degraus. Neste caso, pressupõe-se a existência de um processo já em estado operacional. Como não possuímos plantas reais não detalharemos esta técnica.



- Neste curso trabalharemos com modelos matemáticos do tipo paramétrico, tanto internos como externos. Para desenvolvê-los, basta se conhecer os princípios fundamentais que regem os fenômenos físicos, químicos, biológicos e etc. que ocorrem nos processos. Esses modelos são representados por funções de transferências (aplicáveis apenas a sistemas lineares) ou por equações em espaço de estados (aplicáveis tanto a sistemas lineares como não lineares).
- Além destas representações, existem outras formas de representar modelos de processos como: análise de correlação, redes neurais, lógica fuzzy, etc.

Funções de transferência

- A função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo é definida como sendo a relação entre as transformadas de Laplace da saída e da entrada do sistema, assumindo-se que todas as condições iniciais sejam nulas.
- A função de transferência entre duas variáveis de um sistema estabelece as duas seguintes situações:
  – Quanto da variável de entrada será transferida à variável de saída;
  – Os polos da função de transferência indicam qual tipo de movimento natural o sistema pode ter (independente de como o movimento natural foi estimulado). Isto acontece porque o denominador da função de transferência contém a equação característica do sistema e, portanto, os polos da função de transferência correspondem às raízes da equação característica, as quais determinam as característica naturais do sistema (seus autovalores). Os autovalores ditam se o sistema é estável ou instável, sobre ou subamortecido, rápido ou lento, etc.

Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

$$\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot \sqrt{y(t)} = K \cdot u(t)$$

$$\sqrt{y(t)} \cong \sqrt{\bar{y}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{y}}}\left[y(t) - \bar{y}\right]$$

$$\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot \left\{\sqrt{\bar{y}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{y}}}\left[y(t) - \bar{y}\right]\right\} = K \cdot u(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + \hat{y}(t) \qquad \text{e} \qquad u(t) = \bar{u} + \hat{u}(t)$$

$$\ddot{\hat{y}}(t) + 5 \cdot \dot{\hat{y}}(t) + 6 \cdot \left\{\sqrt{\bar{y}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{y}}}\hat{y}(t)\right\} = K \cdot \left[\bar{u} + \hat{u}(t)\right]$$

$$y(t) = \bar{y} \ \text{ e } \ u(t) = \bar{u}$$

$$6 \cdot \sqrt{\bar{y}} = K \cdot \bar{u}$$

$$\ddot{\hat{y}}(t) + 5 \cdot \dot{\hat{y}}(t) + \frac{6}{2 \cdot \sqrt{\bar{y}}}\hat{y}(t) = K \cdot \hat{u}(t)$$

$$s^2 \cdot \hat{Y}(s) - \hat{y}(0) \cdot s - \dot{\hat{y}}(0) + 5 \cdot s \cdot \hat{Y}(s) - 5 \cdot \hat{y}(0) + \frac{3}{\sqrt{\bar{y}}}\hat{Y}(s) = K \cdot \hat{U}(s)$$

$$G(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{U}(s)} = \frac{K}{s^2 + 5 \cdot s + \dfrac{3}{\sqrt{\bar{y}}}}$$

Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

- RELAÇÕES DO SISTEMA
  - Balanço de massa:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s \qquad \text{(assumindo-se } \rho \text{ como constante)}$$

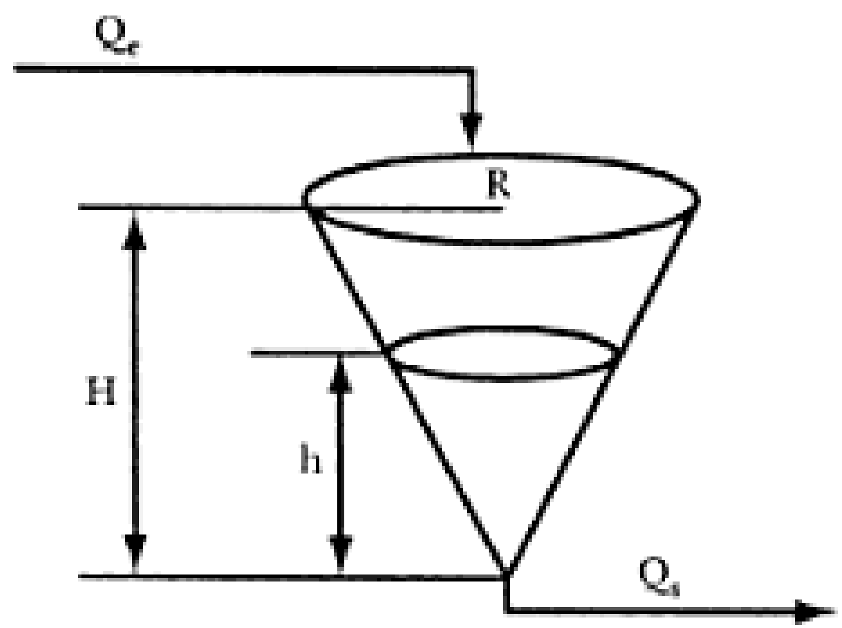
- RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

$$Q_s = K \cdot \sqrt{h}$$

- IDENTIDADE

$$V = \frac{h \cdot \pi \cdot r^2}{3} \qquad \text{sendo } r = h\frac{R}{H}$$

$$\therefore V = \frac{\pi \cdot R^2}{3 \cdot H^2} h^3$$



Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO LINEARIZADA

Linearizando-se os termos não-lineares:

$$h^3 = \bar{h}^3 + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \left(h - \bar{h}\right)$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{\bar{h}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}\left(h - \bar{h}\right)$$

Sejam as seguintes variáveis de perturbação:

$$h(t) = \bar{h} + \hat{h}(t)$$

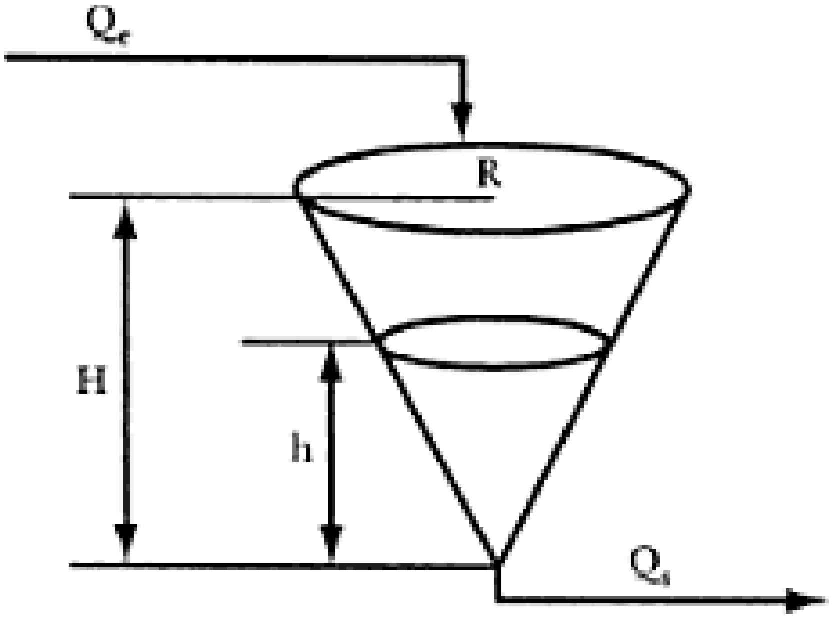
$$V(t) = \bar{V} + \hat{V}(t)$$

$$Q_e(t) = \bar{Q}_e + \hat{Q}_e(t)$$

$$\bar{V} + \hat{V} = \frac{\pi \cdot R^2}{3 \cdot H^2}\left(\bar{h}^3 + 3 \cdot \bar{h}^2 \cdot \hat{h}\right)$$

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = \frac{\pi \cdot R^2}{3 \cdot H^2} 3 \cdot \bar{h}^2 \frac{d\hat{h}}{dt} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \bar{h}^2}{H^2} \frac{d\hat{h}}{dt}$$

$$Q_s = K \cdot \left(\sqrt{\bar{h}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}} \hat{h}\right)$$



Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

$$\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \bar{h}^2}{H^2}\frac{d\hat{h}}{dt} = \bar{Q}_e + \hat{Q}_e - K \cdot \left(\sqrt{\bar{h}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}\hat{h}\right)$$

$$h = \bar{h} \text{ e } Q_e = \bar{Q}_e$$

$$\bar{Q}_e = K \cdot \sqrt{\bar{h}}$$

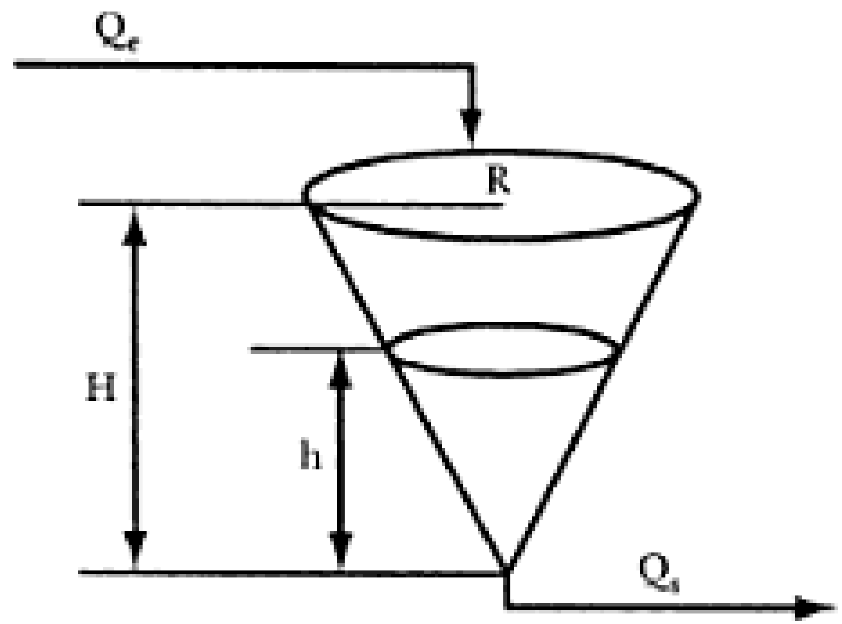
$$\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \bar{h}^2}{H^2}\frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{Q}_e - \frac{K}{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}\hat{h}$$

$$\hat{h}(0) = 0$$

$$\left(\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \bar{h}^2}{H^2}s + \frac{K}{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}\right) \cdot \hat{h}(s) = \hat{Q}_e(s)$$

$$G(s) = \frac{\hat{h}(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{1}{\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \bar{h}^2}{H^2}s + \frac{K}{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}} = \frac{K_P}{1 + \tau \cdot s}$$

$$K_P = \frac{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}{K} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \bar{h}^{5/2}}{K \cdot H^2}$$



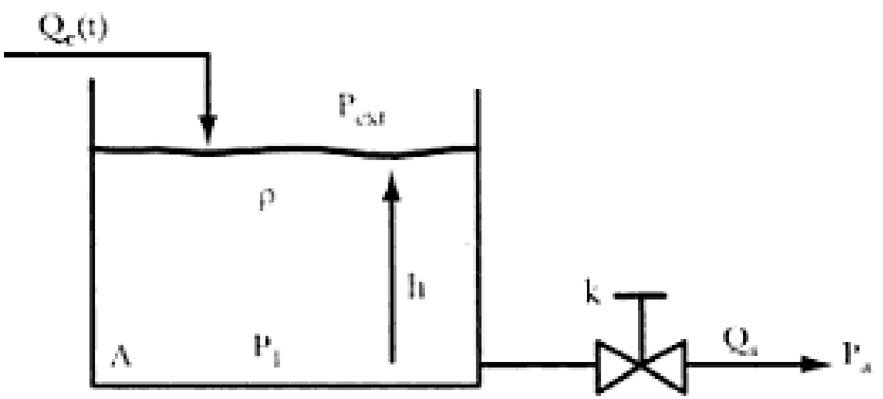
Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

$A = 2\ \mathrm{m}^2 \qquad \rho = 1000\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad C_v = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s} \cdot \sqrt{\mathrm{Pa}}}$

$\overline{Q}_e = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \qquad P_{ext} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \qquad g = 9{,}8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot A \frac{dh}{dt} = \rho \cdot (Q_e - Q_s) \quad \therefore \quad A \frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s$$

$$Q_s = C_v \cdot \sqrt{P_1 - P_{ext}} \qquad P_1 = P_{ext} + \rho \cdot g \cdot h \quad \therefore \quad h = \frac{P_1 - P_{ext}}{\rho \cdot g}$$



$$\frac{A}{\rho \cdot g} \frac{dP_1}{dt} = Q_e - C_v \cdot \sqrt{P_1 - P_{ext}}$$

$$C_F = A/(\rho \cdot g)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{C_F}\left(Q_e - C_v \cdot \sqrt{P_1 - P_{ext}}\right)$$

$$\hat{P}_1 = P_1 - \overline{P}_1 \qquad \text{e} \qquad \hat{Q}_e = Q_e - \overline{Q}_e$$

$$\overline{Q}_e = C_v \cdot \sqrt{\overline{P}_1 - P_{ext}}$$

$$\frac{d\hat{P}_1}{dt} = \frac{1}{C_F}\left(\hat{Q}_e - C_v \cdot \sqrt{\hat{P}_1 - P_{ext}}\right)$$

$$\frac{d\hat{P}_1}{dt} = \frac{1}{C_F}\left(\hat{Q}_e - \frac{C_v \cdot \hat{P}_1}{2 \cdot \sqrt{\overline{P}_1 - P_{ext}}}\right) = \frac{1}{C_F}\left(\hat{Q}_e - \frac{C_v^{\,2}}{2 \cdot \overline{Q}_e}\hat{P}_1\right)$$

Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

$$R_F = 2 \cdot \overline{Q}_e / C_v^{\,2}$$

$$\frac{d\hat{P}_1}{dt} = \frac{1}{C_F}\left(\hat{Q}_e - \frac{\hat{P}_1}{R_F}\right)$$

$$R_F = 4{,}80 \cdot 10^6 \ \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m^5}} \qquad \text{e} \qquad C_F = 2{,}039 \cdot 10^{-4} \ \frac{\mathrm{m^5}}{\mathrm{N}}$$

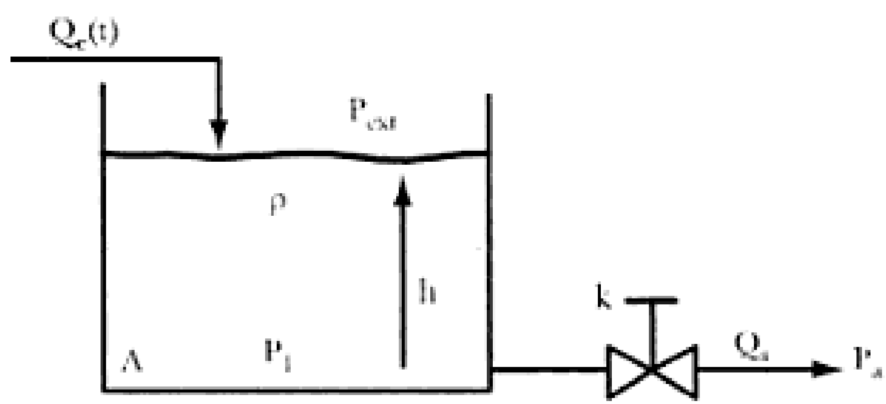
$$\overline{P}_1 = \left(\frac{\overline{Q}_e}{C_v}\right)^2 + P_{est} \qquad \therefore \overline{P}_1 = 1{,}157 \cdot 10^5 \ \mathrm{Pa}$$

$$\overline{h} = \frac{\overline{P}_1 - P_{est}}{\rho \cdot g} = 1{,}468 \ \mathrm{m}$$

$$\hat{P}_1(0) = 0 \qquad P_1(0) = \overline{P}_1$$

$$G(s) = \frac{\hat{P}_1(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{\dfrac{1}{C_F}}{s + \dfrac{1}{R_F \cdot C_F}}$$

$$G(s) = \frac{\hat{P}_1(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{4904}{s + 1{,}0216 \times 10^{-3}} = \frac{4800313}{1 + 978{,}86 \times 10^{-7} \cdot s}$$



Exemplo de aplicação de Função de transferência para modelagem

$$\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$

$$s^2 \cdot Y(s) - y(0) \cdot s - \dot{y}(0) + 5 \cdot s \cdot Y(s) - 5 \cdot y(0) + 6 \cdot Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$\left(s^2 + 5 \cdot s + 6\right) \cdot Y(s) = K \cdot U(s) + y(0) \cdot s + 5 \cdot y(0) + \dot{y}(0)$$

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + 5 \cdot s + 6} U(s)$$

$$y(0) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 0$$

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + 5 \cdot s + 6} U(s) + \frac{s + 5}{s^2 + 5 \cdot s + 6}$$

- Neste caso, como a equação dada tem condições iniciais não nulas, não é possível gerar uma função de tranferência relacionando a saída Y(s) com a entrada U(s). O que se pode fazer é montar um vetor de funções de transferência composto de duas funções

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + 5 \cdot s + 6}$$

$$G_{CI}(s) = \frac{Y(s)}{1} = \frac{s + 5}{s^2 + 5 \cdot s + 6}$$

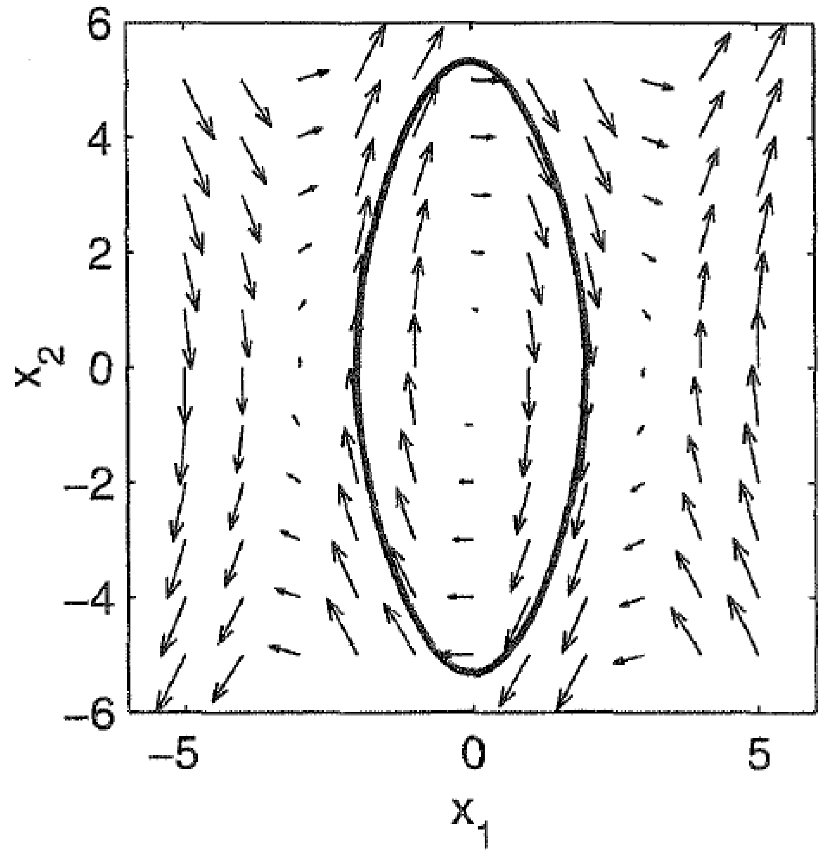
- Supôs-se que o segundo termo estivesse multiplicado por 1, sendo que a transformada de Laplace do impulso unitário corresponde justamente a 1. Desta forma, é possível escrever o segundo termo como se fosse uma função de transferência excitada por um impulso unitário

Espaço de estados

- O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis (chamada variáveis de estado), tal que o conhecimento destas variáveis em $t=t0$, junto com o conhecimento da entrada para $t \geq t0$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t0$.
- As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as variáveis que constituem o menor conjunto de variáveis determinantes do estado do sistema. Notar que as variáveis de estado não necessitam ser grandezas fisicamente mensuráveis ou observáveis. Na prática, é conveniente escolher grandezas facilmente mensuráveis.
- Vetor de estados é composto pelas variáveis de estado necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema.

Espaço de estados

- O espaço n-dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos formados pelas variáveis de estado é chamado de espaço de estados (ou espaço de fase). No caso particular do sistema de 2ª ordem, o espaço de fase é bidimensional e conhecido como plano de fase.
- Para analisar um sistema dinâmico, via espaço de estados, interessam três tipos de variáveis: de entrada, de saída e de estado. A representação em espaço de estados não é única, exceto que o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer das diferentes representações.



Espaço de estados

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \qquad y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \qquad y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \qquad y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Espaço de estados

$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ (equações de estado)

$y(t) = g(x, u, t)$ (equações de saída)

Se as equações de estado e de saída são linearizadas em torno do estado operacional do sistema, resulta:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

onde:

$A(t)$ = matriz de estado

$B(t)$ = matriz de entrada

$C(t)$ = matriz de saída

$D(t)$ = matriz de transmissão direta

Caso o sistema além de linear seja invariante no tempo, tem-se que:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

Exemplo de aplicação de Espaço de Estado para modelagem linear

$$\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$

$$x_1(t) = y(t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -6 \cdot x_1(t) - 5 \cdot x_2(t) + K \cdot u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\,u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\,\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{D}\,u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{CI} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(condições iniciais)}$$

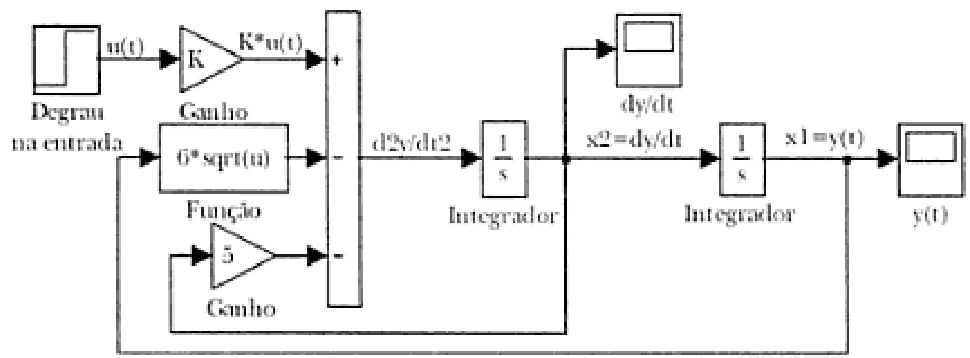
Exemplo de aplicação de Espaço de Estado para modelagem não linear

- Como existe um termo não linear, não é possível empregar a forma matricial. O que se pode fazer para resolver é resolver numericamente o sistema de equações diferenciais empregando o diagrama de simulação.
- Para proposta de controle sugere-se linearizá-lo em torno do ponto de operação. Caso a linearização não represente bem o comportamento do sistema deve-se trabalhar com análise de controle de sistema não lineares.

$$\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot \sqrt{y(t)} = K \cdot u(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -6 \cdot \sqrt{x_1(t)} - 5 \cdot x_2(t) + K \cdot u(t)$$



Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho \cdot A \frac{dH_1}{dt} = \rho \cdot (Q_e - Q_1) \quad \therefore \frac{dH_1}{dt} = \frac{Q_e - Q_1}{A}$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{A}$$

$$\vdots$$

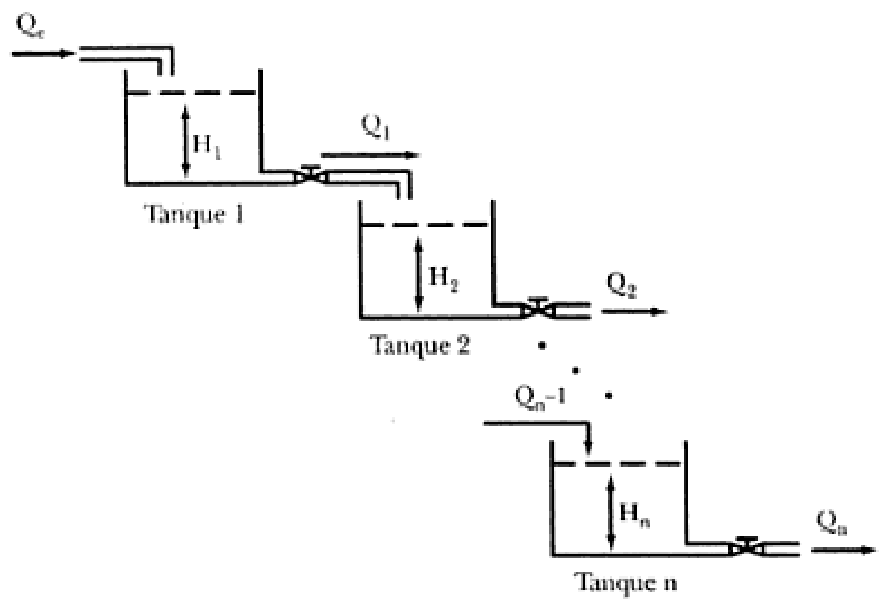
$$\frac{dH_n}{dt} = \frac{Q_{n-1} - Q_n}{A}$$

$$Q_1 = C_v \cdot \sqrt{P_{ext} + \rho \cdot g \cdot H_1 - P_j}$$

$$Q_2 = C_v \cdot \sqrt{P_{ext} + \rho \cdot g \cdot H_2 - P_j}$$

$$\vdots$$

$$Q_n = C_v \cdot \sqrt{P_{ext} + \rho \cdot g \cdot H_n - P_j}$$



Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

$$P_j = P_{ext}$$

$$Q_1 = C_v \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot H_1} = C_v \cdot \sqrt{\rho \cdot g} \cdot \sqrt{H_1} = k \cdot \sqrt{H_1}$$

$$Q_2 = C_v \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot H_2} = k \cdot \sqrt{H_2}$$

$$\vdots$$

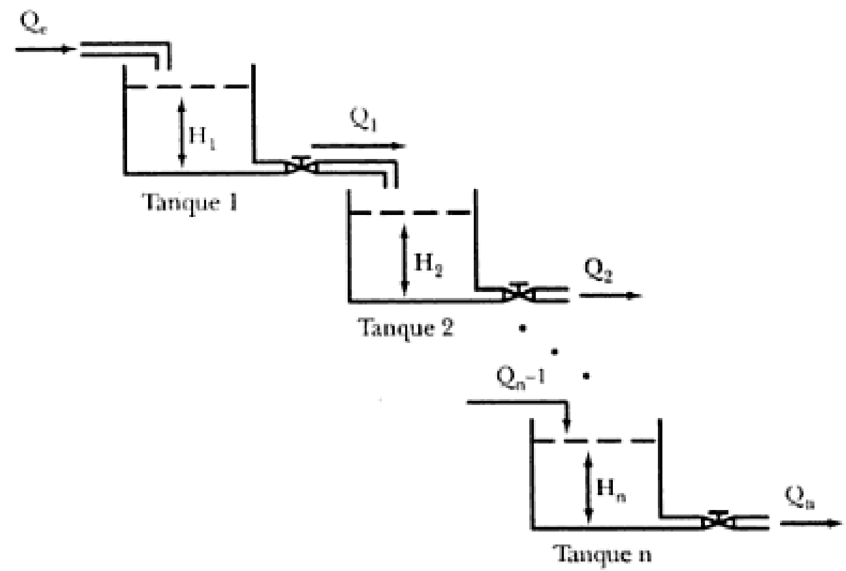
$$Q_n = C_v \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot H_n} = k \cdot \sqrt{H_n} \quad \text{onde} \quad k = C_v \cdot \sqrt{\rho \cdot g}$$

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{Q_e - k \cdot \sqrt{H_1}}{A}$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{k \cdot \sqrt{H_1} - k \cdot \sqrt{H_2}}{A}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dH_n}{dt} = \frac{k \cdot \sqrt{H_{n-1}} - k \cdot \sqrt{H_n}}{A}$$



$$\frac{d\hat{H}_1}{dt} = \frac{\hat{Q}_e - \frac{k}{2 \cdot \sqrt{\overline{H}_1}} \hat{H}_1}{A}$$

$$\frac{d\hat{H}_2}{dt} = \frac{\frac{k}{2 \cdot \sqrt{\overline{H}_1}} \hat{H}_1 - \frac{k}{2 \cdot \sqrt{\overline{H}_2}} \hat{H}_2}{A}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\hat{H}_n}{dt} = \frac{\frac{k}{2 \cdot \sqrt{\overline{H}_{n-1}}} \hat{H}_{n-1} - \frac{k}{2 \cdot \sqrt{\overline{H}_n}} \hat{H}_n}{A}$$

- As equações de movimento são não lineares, portanto, para se poder empregar funções de transferência, é necessário linearizá-las.

Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

$\hat{H}_i(0)$ para $i = 0$ a n seja nula,

$$G_1(s) = \frac{\hat{H}_1(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{\dfrac{2\cdot\sqrt{\overline{H}_1}}{k}}{1 + \dfrac{2\cdot A\cdot\sqrt{\overline{H}_1}}{k}s} = \frac{K}{1+\tau\cdot s}$$

sendo $K = \dfrac{2\cdot\sqrt{\overline{H}_1}}{k}$ $\quad \tau = \dfrac{2\cdot A\cdot\sqrt{\overline{H}_1}}{k}$

Trata-se de um sistema de 1ª ordem.

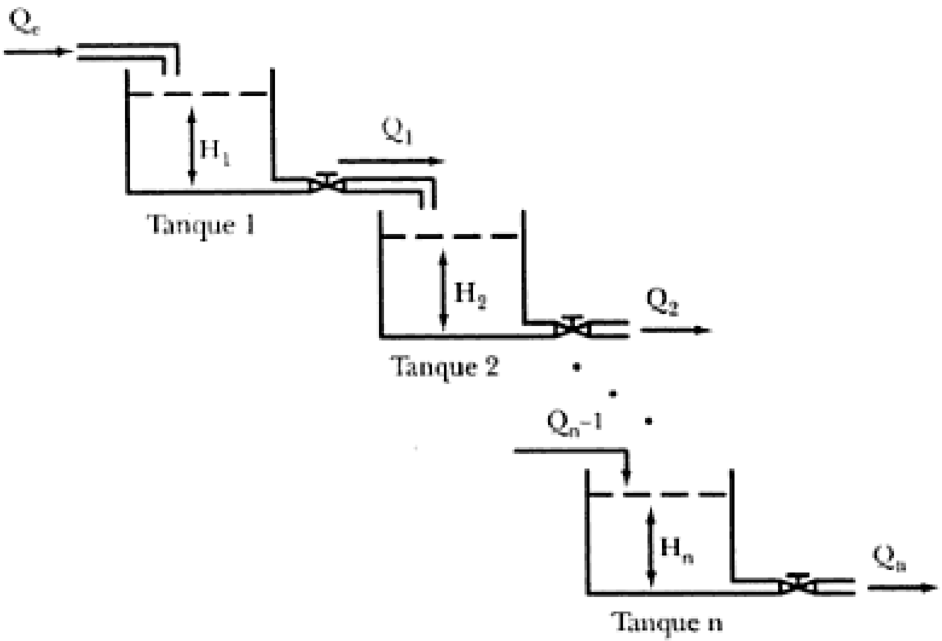
$$\overline{H}_1 = \overline{H}_2 = \cdots = \overline{H}_n$$

$$G_2(s) = \frac{\hat{H}_2(s)}{\hat{H}_1(s)} = \frac{\dfrac{k}{2\cdot\sqrt{\overline{H}_1}}}{A\cdot s + \dfrac{k}{2\cdot\sqrt{\overline{H}_2}}} = \frac{1}{1+\tau\cdot s}$$

$$\hat{Q}_1(s) = \frac{k}{2\cdot\sqrt{\overline{H}_1}}\hat{H}_1 \quad \therefore \quad G_2'(s) = \frac{\hat{H}_2(s)}{\hat{Q}_1(s)} = \frac{1}{A\cdot s + \dfrac{k}{2\cdot\sqrt{\overline{H}_2}}} = \frac{K}{1+\tau\cdot s}$$

$$\vdots$$

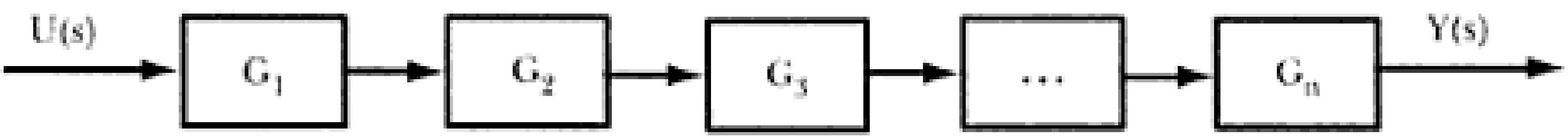
$$G_n(s) = \frac{\hat{H}_n(s)}{\hat{H}_{n-1}(s)} = \frac{\dfrac{k}{2\cdot\sqrt{\overline{H}_{n-1}}}}{A\cdot s + \dfrac{k}{2\cdot\sqrt{\overline{H}_n}}} = \frac{1}{1+\tau\cdot s}$$



Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

- Percebe-se que foram geradas n funções de transferência, uma para cada tanque. Cada equação de movimento linearizada corresponde a uma função de transferência; cada uma delas poderia fornecer o nível em cada tanque. Como os tanque não possuem interação, pode-se ainda definir um função de transferência única, produto de todas as funções de transferência.
- A justificativa por ter escolhido as funções de transferência do tanque 2 em diante, relacionando o nível do tanque seguinte com o nível do tanque anterior, foi para efetuar o cancelamento entre os níveis na função de transferência global do sistema. Então, para sistemas não interativos em cascata, pode-se multiplicar as funções de transferência dos elementos do sistema.

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \cdots \cdot G_n(s) = \frac{\hat{H}_1(s)}{\hat{Q}_e(s)} \frac{\hat{H}_2(s)}{\hat{H}_1(s)} \frac{\hat{H}_3(s)}{\hat{H}_2(s)} \cdots \frac{\hat{H}_n(s)}{\hat{H}_{n-1}(s)} = \frac{\hat{H}_n(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{K}{(1+\tau \cdot s)^n}$$



Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

$u(t) = Q_e(t)$ (variável de entrada)

$x_i(t) = H_i(t) \quad i = 1 \text{ a } n$ (variáveis de estado)

$y(t) = H_n(t)$ (variável de saída)

$$\dot{x}_1(t) = \dot{H}_1(t) = f_1(u, x_1)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{H}_2(t) = f_2(x_1, x_2)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = \dot{H}_n(t) = f_n(x_{n-1}, x_n)$$

$$y(t) = x_n(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad f(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} f_1(u, x_1) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_n(x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix}$$

$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, u)$ (equação de estado)

$y(t) = g(x_n) = x_n(t)$ (equação de saída)

$$\mathbf{CI} = \begin{pmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ \vdots \\ H_n(0) \end{pmatrix}$$

- Neste exemplo, definiu-se a saída como sendo o nível no último tanque (Hn). No entanto, o nível em cada tanque é disponível como um estado do sistema, sendo portanto possível, caso se deseje, torná-los saídas do mesmo.

Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

- Os exemplos anteriores são usados para expor, de forma prática, o que significa modelos internos e externos de um processo.
- Suponha que esse sistema de n tanques em cascata seja colocado dentro de uma caixa preta, com acesso apenas à sua vazão de entrada Qe e ao nível no último tanque Hn. Neste caso, seriam diretamente mensuráveis apenas estas duas variáveis. Os demais níveis ou vazões ficariam inacessíveis para medidores externos. Esse é um caso muito comum nos processos industriais.

$$G(s) = \frac{\hat{H}_N(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{K}{(1+\tau \cdot s)^N}$$

Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

- Caso estivesse trabalhando com uma coluna de destilação, consegue-se medir as vazões externas à coluna (vazão de alimentação, vazão de reciclo, vazões de saída e vazão de vapor para o refervedor), a temperatura nos pratos em que se colocou sensores e a pressão no topo ou no fundo da coluna, mas não as variáveis internas do tipo vazões de vapor ou de líquido entre bandejas, nem a pressão ou líquido acumulado em cada prato.
- Voltando ao exemplo do tanque, caso se deseje desenvolver um modelo empírico do sistema de n tanques em cascata, empregando-se técnicas de identificação de sistemas, ele terá como entradas e saídas apenas os valores das variáveis efetivamente mensuráveis. O modelo anterior caixa preta é um exemplo de modelo externo (entrada/saída).
- Por outro lado, quando se tem informações internas como vazões internas e todos os níveis de cada tanque trabalharemos com modelos internos. Estes, proveem informações muito mais completas acerca do sistema, pois disponibilizam como saída todos os estados.

Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

- Considerando um modelo de amortecedor de automóvel.
- Função de transferência

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = b \cdot \dot{u} + k \cdot u$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(0) = 0$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b \cdot s + k}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

$$U(s) = \frac{A}{s} \quad A(s) = m \cdot s^2 + b \cdot s + k$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}$$

- Espaço de estados

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = b \cdot \dot{u} + k \cdot u$$

$$b \cdot \dot{u} + k \cdot u \quad \text{sendo } u = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$u_1 = A \cdot \text{sen}(w \cdot t) \ \text{e} \quad u_2 = A \cdot w \cdot \cos(w \cdot t)$$

$$u_1 = H(t) \quad \text{e} \quad u_2 = \delta(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k/m & b/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{CI} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}$$

Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

- Caso a entrada seja um sinal gerado externamente, sem uma expressão analítica conhecida que o defina e, ainda por cima, eventualmente sujeito a ruído, deve-se evitar derivá-lo.
- Seguindo a recomendação dada em Ogata 2003, inicialmente, compara-se a equação diferencial do sistema com o coeficiente da derivada de ordem mais alta da saída igualando a 1

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$\ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_2 \cdot y = b_0 \cdot \ddot{u} + b_1 \cdot \dot{u} + b_2 \cdot u$$

$$a_1 = \frac{b}{m} \quad a_2 = \frac{k}{m} \quad b_0 = 0 \quad b_1 = \frac{b}{m} \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

$$x_1 = y - \beta_0 \cdot u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \cdot \dot{u} - \beta_1 \cdot u = \dot{x}_1 - \beta_1 \cdot u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \cdot \ddot{u} - \beta_1 \cdot \dot{u} - \beta_2 \cdot u = \dot{x}_2 - \beta_2 \cdot u$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \cdot \beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \cdot \beta_1 - a_2 \cdot \beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right] \cdot u$$

Relação entre funções de transferência e equações de espaço de estado

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{b}{m}\,u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]\cdot u$$

$$y = x_1 + \beta_0 \cdot u$$

$$\dot{y} = x_2 + \beta_0 \cdot \dot{u} + \beta_1 \cdot u$$

$$\ddot{y} = x_3 + \beta_0 \cdot \ddot{u} + \beta_1 \cdot \dot{u} + \beta_2 \cdot u$$

$$\begin{aligned} x_3 + \beta_0 \cdot \ddot{u} + \beta_1 \cdot \dot{u} + \beta_2 \cdot u + a_1 \cdot \left(x_2 + \beta_0 \cdot \dot{u} + \beta_1 \cdot u\right) + \\ + a_2 \cdot \left(x_1 + \beta_0 \cdot u\right) = b_0 \cdot \ddot{u} + b_1 \cdot \dot{u} + b_2 \cdot u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_1 = \left(b_0 - \beta_0\right)\cdot \ddot{u} + \left(b_1 - \beta_1 - a_1 \cdot \beta_0\right)\cdot \dot{u} + \\ + \left(b_2 - \beta_2 - a_1 \cdot \beta_1 - a_2 \cdot \beta_0\right)\cdot u \end{aligned}$$

$$x_3 = -a_1 \cdot x_2 - a_2 \cdot x_1$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 + \beta_2 \cdot u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{b}{m}\,u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}\,x_1 - \frac{b}{m}\,x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]\cdot u$$

$$y_1 = y = x_1$$

$$y_2 = \dot{y} = x_2 + \frac{b}{m}\,u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b/m \end{bmatrix} u$$

$$\mathrm{CI} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) - \frac{b}{m}\,u(0) \end{pmatrix}$$

Conclusões

- Com os assuntos estudados nesta aula o engenheiro de controle de processos ou eletricista será capaz de:
  - Idealizar ensaios de levantamento de modelos para soluções de controle e instrumentação;
  - Escolher a representação matemática adequada para seu processo estudado;
  - Propor melhorias nos critérios de escolha da instrumentação de seu processo para o bom condicionamento dos ensaios:
    - Quantidade de medidores para melhor caracterizar o processo
    - Aumento da precisão de certos pontos de medição;
    - Aumento da taxa de amostragem de certos pontos de medição;
    - Mudança dos pontos de medição (evitar medição de ruído).

Referências

- Claudio Garcia – Modelagem e simulação - 2005 – EDUSP