Controle de Processos: *Solução analítica de sistemas lineares dinâmicos*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti
& David Fiorillo

Laboratório de Automação e Robótica (LARA)
Dept. Engenharia Elétrica - UnB

Conteúdo

Introdução

- Conforme já mencionado há três estágios básicos que caracterizam o estudo da dinâmica de sistemas:
  - Obtenção de equações de movimento para diversos tipos de sistemas físicos, já vista;
  - A representação de modelos, já vista;
  - A simulação do modelo matemático obtido, visando analisar seu comportamento temporal que será vista nesta aula.

Formas de solução de equações diferenciais ordinárias

- Conforme já mencionado, há duas alternativas para se efetuar a simulação de um modelo:
  - Encontrar solução analítica apenas de equações de movimento lineares, na prática só é utilizada para sistemas com poucas equações. Isto porque há uma pequena classe de equações passíveis de soluções analíticas (conforme a tabela). Os processos reais gera modelos compostos por equações diferenciais isoladas ou por equações diferenciais lineares ou não lineares, solúveis apenas por métodos numéricos em computadores. Portanto, apenas casos muito simples são passíveis de solução analítica

	Equações lineares			*Equações não-lineares*		
	Uma equação	Algumas equações	Muitas equações	Uma equação	Algumas equações	Muitas equações
Algébrica	trivial	fácil	praticamente impossível	muito difícil	muito difícil	impossível
Diferencial ordinária	fácil	difícil	praticamente impossível	muito difícil	impossível	impossível
Diferencial parcial	difícil	praticamente impossível	impossível	impossível	impossível	impossível

Formas de solução de equações diferenciais ordinárias

Os métodos de solução analítica só funcionam com equações lineares, sendo necessário linearizar as equações não lineares.

- A segunda opção é bem mais geral, sendo empregada para sistemas com qualquer número de equações diferenciais ordinárias, lineares ou não, necessitando, no entanto de um computador.

Além disso, dentro do campo de soluções analíticas em equações diferenciais lineares estaremos restritos as de 1ª e 2ª ordem. Para isso serão abordadas duas técnicas:

- Obter a resposta temporal do sistema através de sua função de transferência via transformada de Laplace e solução via transformada inversa de Laplace.
- Obter a resposta temporal através da soma das respostas natural e forçada do sistema.

Características básicas dos sistemas lineares de 1ª e 2ª ordem

- Um sistema descrito por meio de equações diferenciais ordinárias com derivadas de ordem n;
- Os coeficientes a_i são constantes e f(t) é a excitação ou perturbação;
- Os tipos de perturbações de maior interesse são: degrau, rampa, exponencial, impulso e senoidal.

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = f(t)$$

1ª ordem:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = f(t) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x = f(t)$$

2ª ordem:

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot \tau \cdot \xi \frac{dx}{dt} + x = f(t) \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot \sigma \frac{dx}{dt} + (w_n)^2 \cdot x = f(t)$$

τ = constante de tempo do sistema
ξ = coeficiente de amortecimento
σ = coeficiente de atenuação = $\xi \cdot w_n$
w_n = freqüência natural do sistema = $1/\tau$

Características básicas dos sistemas lineares de 1ª e 2ª ordem

- Os sistemas de 1ª ordem são sistemas que armazenam energia em apenas uma forma e lugar e que possuem um elemento para dissipá-lo.
- Sua equação matemática descritiva utiliza uma única variável e sua 1ª derivada. São exemplos:
  - Massa movendo-se com atrito;
  - Capacitância com resistores;
  - Mola com atrito;
  - Indutância com resistores;
  - Capacitância térmicas com resistências térmicas, etc.
- Em cada caso, as resistências ou atrito dissipam energia e o sistema retorna sozinho a uma posição de equilíbrio estático após uma perturbação externa. Deseja-se descobrir o x(t), ou seja, o comportamento temporal.

$$b\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = f(t) \qquad \text{(sistema com mola e atrito)}$$

Características básicas dos sistemas lineares de 1ª e 2ª ordem

- O sistemas de 2ª ordem contêm dois elementos distintos de armazenamento de energia e mais um mecanismo de dissipação.

$$\tau^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \tau \cdot \xi \frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

Características da resposta temporal de sistemas lineares

- As mais importante funções de excitação podem ser representadas na forma, $f(t) = F \cdot e^{s \cdot t}$
- A superposição de respostas temporais é válida.
- A resposta total consiste na soma de duas partes distintas: forçada e natural, $x = x_f + x_n$
- A resposta forçada é semelhante à excitação (entrada do sistema ou perturbação). Sua magnitude é proporcional à magnitude da excitação, $x_f(t) = X_f \cdot e^{s \cdot t}$
- A resposta natural é sempre na forma, $x_n(t) = X_n \cdot e^{s \cdot t}$
- A equação característica do sistema é uma expressão algébrica em s, obtida pela substituição da resposta natural na equação deferencial homogênea (não excitada)

Características da resposta temporal de sistemas lineares

- Funções de perturbação ou excitação mais empregadas:
  - Constante;
  - Exponencial;
  - Senoidal;
  - Senoidal amortecida.

$$f = F \qquad (s = 0)$$

$$f = F \cdot e^{-\sigma_f \cdot t} \qquad \left(s = -\sigma_f\right)$$

$$f = \mathrm{Re}\left(F \cdot e^{j \cdot w_f \cdot t}\right) = F \cdot \cos\left(w_f \cdot t\right) \qquad \left(s = j \cdot w_f\right)$$

$$f = \mathrm{Re}\left\{F \cdot \exp\left[\left(-\sigma_f + j \cdot w_f\right) \cdot t\right]\right\} = F \cdot e^{-\sigma_f \cdot t} \cdot \cos\left(w_f \cdot t\right)$$

$$\left(s = -\sigma_f + j \cdot w_f\right)$$

Resposta natural dos sistemas de 1ª ordem

- Resposta (movimento) natural de sistemas de 1ª ordem;
- Desenvolvimento para resposta natural a excitação f(t)=0;
- A solução x deve ser uma resposta cuja derivada seja sempre proporcional à própria resposta. A função e^{st} tem essa propriedade. Essa solução é introduzida na equação de movimento para verificar quais valores das constantes X e s satisfazem.
- A equação é satisfeita para X=0 (ausência de movimento) e para X diferente de 0 resultando em b.s + k = 0 (equação característica cujo solução é s = k/b)
- A raiz da equação determina completamente o comportamento dinâmico dos movimentos naturais do sistema. Esses movimentos tem sempre a mesma forma, independente do tipo de excitação que é aplicada.
- O valor da constante X pode ser estabelecido a partir da posição do sistema em t=0 (X=x(0)=x0).
- Se o autovalor for real positivo (s>0), resulta uma exponencial crescente que denota uma resposta natural ilimitada (instabilidade).

$$b\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = 0 \quad \text{(equação homogênea)}$$

$$\therefore \quad b\frac{dx}{dt} = -k \cdot x$$

$$x = X \cdot e^{s \cdot t} \quad \text{(solução proposta)}$$

$$b \cdot X \cdot s \cdot e^{s \cdot t} + k \cdot X \cdot e^{s \cdot t} = 0$$

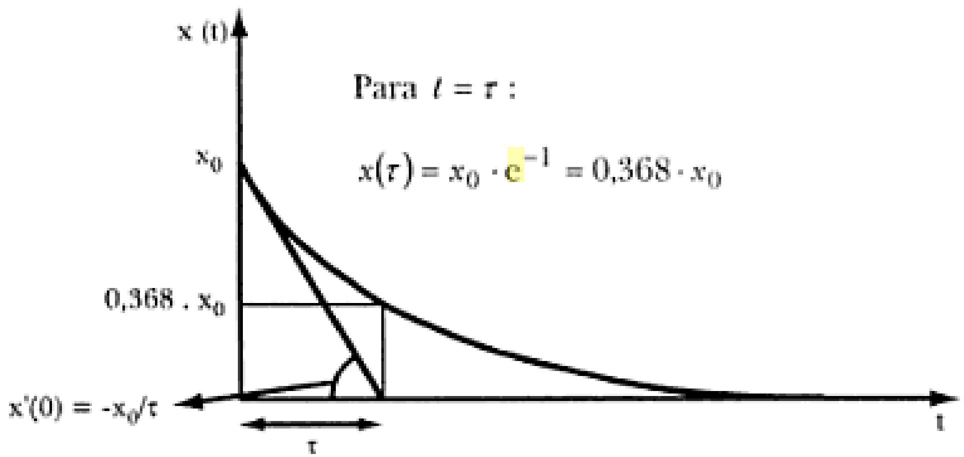
$$x(t) = X \cdot e^{-(k/b) \cdot t}$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{(-k/b) \cdot t}$$

$$x_0 = x(0)$$

$$\tau = \frac{b}{k} = -\frac{1}{s} \quad \text{(constante de tempo do sistema)}$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-t/\tau}$$



Reposta total ao degrau de sistemas de 1ª ordem

- $H(t)$ é o degrau unitário em $t=0$;
- Solução proposta é a superposição das respostas natural e forçada;
- Assumiu-se que $x(0+)=x(0)$, senão haveria velocidade infinita em um sistema físico excitado por uma perturbação finita.

$$b\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = f(t) = f_0 \cdot H(t)$$

onde $H(t)$ =degrau unitário em $t = 0$

$x = x_f + x_n$ (superposição das respostas natural e forçada)

$x_f = X_f$ (para $t > 0$) (resposta do mesmo tipo da excitação)

$x_n = X_n \cdot e^{s \cdot t}$ (forma geral do movimento natural)

$k \cdot X_f = f_0$ (para $t > 0$) $\rightarrow X_f = \frac{f_0}{k} = x_f$

$$X_n \cdot e^{s \cdot t} \cdot (b \cdot s + k) = 0$$

$$b \cdot s + k = 0 \rightarrow s = -\frac{k}{b}$$

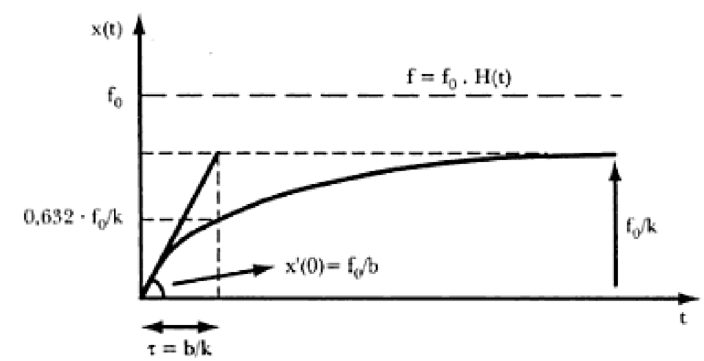
$$x_n = X_n \cdot e^{-(k/b)t}$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k} + X_n \cdot e^{-(k/b)t}$$

$$x(0_+) = x(0) = \frac{f_0}{k} + X_n \quad \rightarrow \quad X_n = x(0) - \frac{f_0}{k}$$

$x(t) = \frac{f_0}{k} + \left(x(0) - \frac{f_0}{k}\right) \cdot e^{-(k/b) \cdot t}$ (para $t > 0$)

$x(t) = \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-(k/b) \cdot t}\right]$ (para $t > 0$)



Reposta total à exponencial de sistemas de 1ª ordem

- Aplicação da excitação exponencial;
- Separação das soluções natural e forçada;
- Respostas total.

$$b\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = f(t)$$

$$f(t) = f_0 \cdot e^{-\sigma_f \cdot t} \cdot H(t) \text{ (aplicação repentina de exponencial)}$$

$$x = x_f + x_n$$

$$x_f = X_f \cdot e^{-\sigma_f \cdot t} \text{ (para } t > 0\text{) (do mesmo tipo da excitação)}$$

$$x_n = X_n \cdot e^{s \cdot t}$$

$$X_f \cdot (k - b \cdot \sigma_f) = f_0 \text{ (para } t > 0\text{)}$$

$$\therefore X_f = \frac{f_0}{k - b \cdot \sigma_f}$$

$$X_n \cdot e^{s \cdot t} \cdot (b \cdot s + k) = 0$$

$$b \cdot s + k = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{k}{b}$$

$$\therefore x_n = X_n \cdot e^{-(k/b) \cdot t}$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k - b \cdot \sigma_f} e^{-\sigma_f \cdot t} + X_n \cdot e^{-(k/b) \cdot t}$$

$$x(0) = \frac{f_0}{k - b \cdot \sigma_f} + X_n \quad \rightarrow \quad X_n = x(0) - \frac{f_0}{k - b \cdot \sigma_f}$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k - b \cdot \sigma_f} e^{-\sigma_f \cdot t} + \left(x(0) - \frac{f_0}{k - b \cdot \sigma_f} \right) \cdot e^{-(k/b) \cdot t} \text{ (para } t > 0\text{)}$$

Reposta total ao impulso de sistemas de 1ª ordem

- A resposta ao impulso não possui componentes natural e forçada separadas;
- Há apenas a resposta total;
- A magnitude de um impulso é definida por sua área;
- A largura do impulso deve ser muito pequena quando comparada com a constante de tempo do sistema;
- A resposta de um sistema de 1ª ordem citado a um impulso de magnitude f0 é idêntica ao movimento natural a partir de uma posição inicial de magnitude x(0+)=f0;
- Pode-se considerar que o impulso gera a condição inicial em tão curto tempo, que ele não tem nenhum outro efeito no sistema.

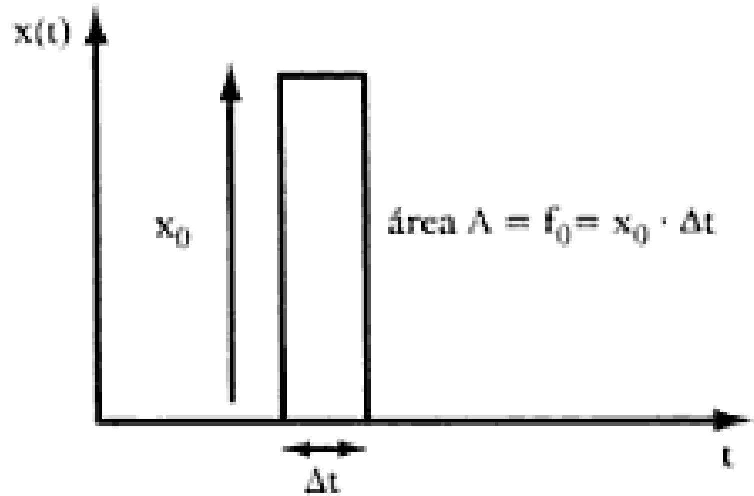
$$[f(t) = f_0 \cdot \delta(t)]$$

$$dx/dt + (1/\tau) \cdot x = f(t)$$

$$x(t) = f_0 \cdot e^{-t/\tau} \qquad (\text{para } t > 0)$$

$$b \cdot dx/dt + k \cdot x$$

$$x(t) = f_0 \cdot e^{-(k/b)t} \quad (\text{para } t > 0)$$



Reposta total à senoidal de sistemas de 1ª ordem

- Aplicação da função senoidal;
- Verificação de sua defasagem;
- Resposta total de um sistema de 1ª ordem a uma excitação senoidal

$f(t) = f_0 \cdot \cos(w_f \cdot t) \cdot H(t) = f_0 \cdot \mathrm{Re}(e^{s' \cdot t}) \cdot H(t)$ (aplicação repentina de senóide)

onde $s' = j \cdot w_f$

$x = x_f + x_n$

$x_f = X_f \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f)$ (para $t > 0$)

$x_n = X_n \cdot e^{s \cdot t}$

$X_f = \left| \dfrac{f_0}{k + j \cdot b \cdot w_f} \right|$ e $\theta_f = \left\lfloor \dfrac{f_0}{k + j \cdot b \cdot \omega_f} \right\rfloor$ o símbolo $\lfloor\ \rfloor$ indica fase.

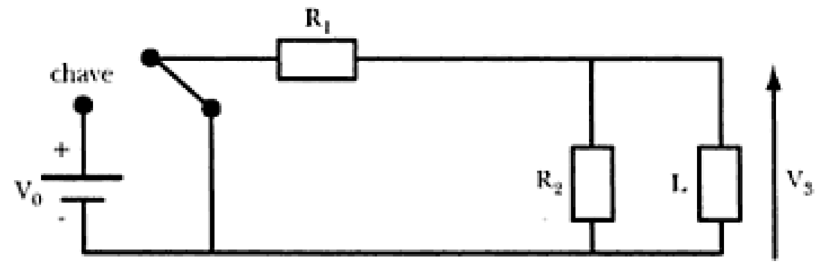
$x_n = X_n \cdot e^{-(k/b) \cdot t}$

$X_n = x(0) - X_f \cdot \cos(\theta_f)$

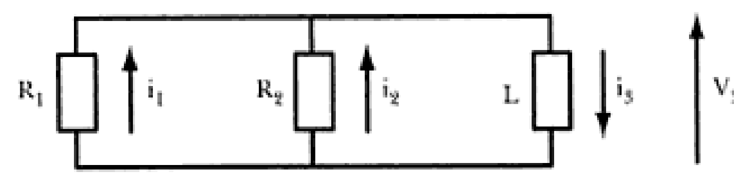
$x(t) = X_f \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f) + [x(0) - X_f \cdot \cos(\theta_f)] \cdot e^{-(k/b) \cdot t}$

Exemplos de resposta temporal de sistema de 1ª ordem

- O circuito é conectado à bateria por um longo período;
- A chave é repentinamente comutada para terra;
- Determinar as correntes de malhas e tensões nos nós.



$$i_3(0\_) = \frac{V_0}{R_1} \quad \text{e} \quad V_3(0\_) = 0$$



- RELAÇÃO DO SISTEMA

  $i_3 = i_1 + i_2$

- RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

  $$i_1 = -\frac{V_3}{R_1} \quad i_2 = -\frac{V_3}{R_2} \quad i_3 = \frac{1}{L}\int V_3 \; dt + i_{30}$$

- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

$$\frac{1}{L}\int V_3 \; dt + i_{30} = -V_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{L}V_3 = -\frac{d(V_3)}{dt}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow L \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{d(V_3)}{dt} + V_3 = 0$$

Exemplos de resposta temporal de sistema de 1ª ordem

- A obtenção da equação que descreve V3(t) é feita de duas formas: através da resposta total do sistema e via transformada de Laplace.

- RESPOSTA TOTAL DO SISTEMA

$$V_3(t) = V_{30} \cdot e^{-t/\tau} \qquad (\text{para } t > 0)$$

$$\tau = L \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$i_{30} = -V_{30} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$V_{30} = \frac{-i_{30}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{-\frac{V_0}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{-V_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_3(t) = \frac{-V_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \exp\left[-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} t \right]$$

- TRANSFORMADA DE LAPLACE

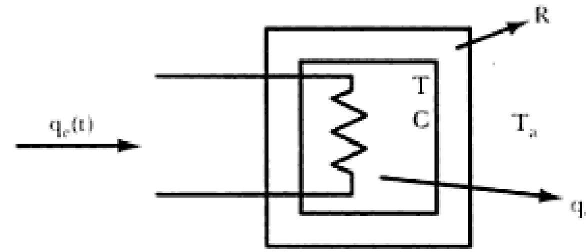
$$\frac{V_3(s)}{s \cdot L} + \frac{V_0}{s \cdot R_1} = -V_3(s) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$V_3(s) = \frac{-V_0 \cdot R_2}{(R_1 + R_2) \cdot \left[s + \frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} \right]}$$

$$V_3(t) = \frac{-V_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \exp\left[-\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} t \right]$$

Exemplos de resposta temporal de sistema de 1ª ordem

- O problema mostra uma capacitância termal C revestida por uma isolação, que tem uma resistência térmica equivalente R;
- A temperatura dentro do vaso, assumida uniforme, é T(t);
- O calor é adicionado no interior do sistema à taxa qe(t);
- A temperatura ambiente Ta ao redor da isolação é constante;
- Encontrar a equação que define a resposta temporal para uma entrada degrau de amplitude A em qe(t).
- Deseja-se obter a resposta temporal desta equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem, utilizando dois métodos: transformada de Laplace e resposta temporal direta pela soma de soluções natural e forçada.



- EQUAÇÃO DO SISTEMA

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C}\left(q_e - q_s\right)$$

- EQUAÇÃO CONSTITUTIVA

$$q_s = \frac{1}{R}\left(T - \overline{T}_a\right)$$

- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C}\left[q_e - \frac{1}{R}\left(T - \overline{T}_a\right)\right]$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{R\cdot C}T = \frac{1}{C}q_e + \frac{1}{R\cdot C}\overline{T}_a$$

$$\frac{1}{R\cdot C}\overline{T} = \frac{1}{C}\overline{q}_e + \frac{1}{R\cdot C}\overline{T}_a$$

$$\overline{T} = \overline{T}_a + R\cdot\overline{q}_e$$

$$\hat{T}(t) = T(t) - \overline{T}$$

$$\hat{q}_e(t) = q_e(t) - \overline{q}_e$$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} + \frac{1}{R\cdot C}\left(\hat{T} + \overline{T}\right) = \frac{1}{C}\left(\hat{q}_e + \overline{q}_e\right) + \frac{1}{R\cdot C}\overline{T}_a$$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} + \frac{1}{R\cdot C}\hat{T} = \frac{1}{C}\hat{q}_e$$

Exemplos de resposta temporal de sistema de 1ª ordem

- Solução usando-se a transformada de Laplace e entrada degrau.

$$\hat{T}(0) = 0 \quad T(0) = \overline{T}$$

$$\hat{T}(s) \cdot \left(s + \frac{1}{R \cdot C} \right) = \frac{1}{C} \hat{q}_e(s)$$

$$\frac{\hat{T}(s)}{\hat{q}_e(s)} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{R \cdot C}}$$

$$\left(\hat{q}_e = A/s \right)$$

$$\hat{T} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{R \cdot C}} \frac{A}{s} \qquad \left(\text{pólo em } s = -\frac{1}{R \cdot C} \right)$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$\hat{T}(t) = A \cdot R \cdot \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \qquad (\text{para } t > 0)$$

$$T(t) = \overline{T} + \hat{T}(t) \qquad (\text{para } t > 0)$$

Exemplos de resposta temporal de sistema de 1ª ordem

- Obtenção da solução no tempo de forma direta.

Resposta natural: $R_n = T_n \cdot e^{s \cdot t}$

Resposta forçada: $R_f = T_f$

$q_e(t) = A$ para $t > 0$

Solução natural: $e^{s \cdot t} \cdot \left(s \cdot T_n + \frac{1}{R \cdot C} T_n \right) = 0$

$\therefore \; s \cdot T_n + \frac{1}{R \cdot C} T_n = 0$

$s = -\frac{1}{R \cdot C} = -\frac{1}{\tau}$

$R_n = T_n \cdot e^{-t/\tau}$

Solução forçada: $\frac{T_f}{R} = A \quad$ (para $t > 0$) $\quad \therefore \; R_f = T_f = A \cdot R$

Solução total:

$\hat{T}(t) = R_n + R_f = T_n \cdot e^{-t/\tau} + A \cdot R$

$\hat{T}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = -A \cdot R \qquad \therefore \hat{T}(t) = A \cdot R \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

- Sem trabalhar com variáveis incrementais.

Solução forçada: $\frac{1}{R \cdot C} T_f = \frac{1}{C}\left(\bar{q}_e + A\right) + \frac{1}{R \cdot C} \bar{T}_a$

$\therefore \; T_f = R \cdot \left(\bar{q}_e + A\right) + \bar{T}_a$

Solução total: $T(t) = R_n + R_f$

$T(t) = T_n \cdot e^{-t/\tau} + R \cdot \left(\bar{q}_e + A\right) + \bar{T}_a$

$T(0) = \bar{T} = R \cdot \bar{q}_e + \bar{T}_a$

$\therefore \; R \cdot \bar{q}_e + \bar{T}_a = T_n + R \cdot \left(\bar{q}_e + A\right) + \bar{T}_a$

$T_n = -A \cdot R$

$T(t) = A \cdot R \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) + R \cdot \bar{q}_e + \bar{T}_a$

$T_n = -A \cdot R$

$T(t) = A \cdot R \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) + R \cdot \bar{q}_e + \bar{T}_a$

$\hat{T}(t) = A \cdot R \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad$ e $\quad \bar{T} = R \cdot \bar{q}_e + \bar{T}_a$

Exemplos de resposta temporal de sistema de 1ª ordem

- Resposta ao impulso possui apenas a parte natural, pois é idêntica ao movimento natural a partir da posição inicial.

$$q_e(t) = q_{e,0} \cdot \delta(t)$$
$$T(0) = q_{e,0}$$
$$\therefore \ \hat{T}(t) = q_{e,0} \cdot e^{-t/\tau} \quad (\text{para } t > 0)$$

- Resposta a entrada senoidal.

$$q_e(t) = q_{e,0} \cdot \cos(w_f \cdot t) \cdot H(t) = q_{e,0} \cdot \mathrm{Re}\left(e^{s' \cdot t}\right) \cdot H(t)$$
$$s' = j \cdot w_f$$

Resposta natural: $R_n = T_n \cdot e^{s \cdot t}$

$$s = \frac{-1}{\tau} \ \therefore R_n = T_n \cdot e^{-t/\tau}$$

Resposta forçada:

$$R_f = T_f \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f) \qquad (\text{para } t > 0)$$

$$T_f = \left| \frac{q_{e,0}}{\frac{1}{R} + j \cdot C \cdot \omega_f} \right| \quad \text{e} \quad \theta_f = \left[\frac{q_{e,0}}{\frac{1}{R} + j \cdot C \cdot \omega_f} \right]$$

Resposta total:

$$\hat{T}(t) = T_n \cdot e^{-t/\tau} + T_f \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f) \quad (\text{para } t > 0)$$
$$\hat{T}(0) = \hat{T}_0 = T_n + T_f \cdot \cos\theta_f \qquad \therefore T_n = \hat{T}(0) - T_f \cdot \cos\theta_f$$
$$\hat{T}(t) = \left[\hat{T}(0) - T_f \cdot \cos(\theta_f)\right] \cdot e^{-t/\tau} + T_f \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f)$$

Resposta natural dos sistemas de 2ª ordem

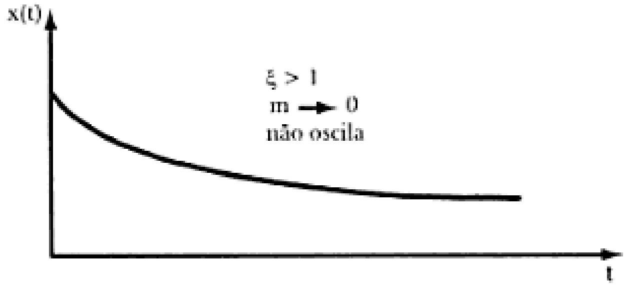
Seja a seguinte equação de movimento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0 \quad \text{(sistema massa / mola / amortecedor)}$$

$$x_n = X \cdot e^{s \cdot t} \qquad \text{onde} \quad s = -\sigma + j \cdot w$$

- CASO SOBRE-AMORTECIDO

$$x_n = C_1 \cdot e^{-\sigma_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\sigma_2 \cdot t} \quad (\text{para } t > 0 \text{ e } \xi > 1)$$

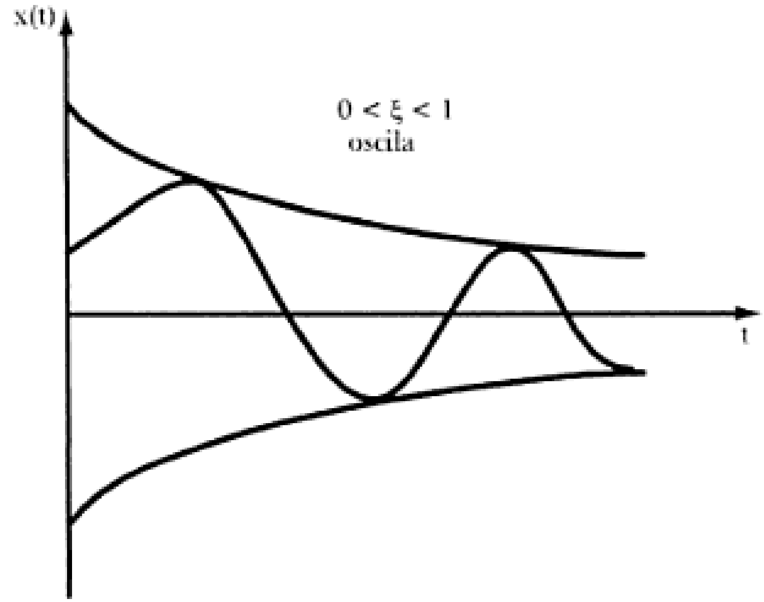


- CASO CRITICAMENTE AMORTECIDO

$$x_n = e^{-\sigma \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \qquad (\text{para } t > 0 \text{ e } \xi = 1)$$

- CASO SUBAMORTECIDO

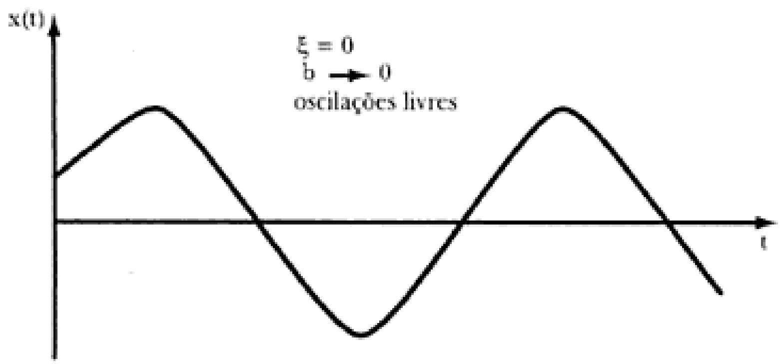
$$x_n = C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(w \cdot t - \theta) \quad (\text{para } t > 0 \quad \text{e} \quad 0 < \xi < 1)$$



Resposta natural dos sistemas de 2ª ordem

- CASO NÃO-AMORTECIDO

$x_n = C_3 \cdot \cos(w \cdot t - \theta)$ (para $t > 0$ e $\xi = 0$)



$m \cdot s^2 + b \cdot s + k = 0$

$$s = -\frac{b}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{para} \quad \frac{k}{m} \leq \left(\frac{b}{2 \cdot m}\right)^2$$

$$s = -\frac{b}{2 \cdot m} \pm j \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2 \cdot m}\right)^2} \quad \text{para} \quad \frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2 \cdot m}\right)^2$$

$$\sigma = \frac{b}{2 \cdot m}$$ (fator de atenuação)

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ (freqüência natural não-amortecida – oscilação observada se $\xi = 0$)

$$w_d = \sqrt{w_n^2 - \sigma^2} = w_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$ (freqüência natural amortecida)

$$\xi = \frac{\sigma}{w_n}$$ (coeficiente de amortecimento)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \sigma \frac{dx}{dt} + w_n^2 \cdot x = 0$$

$$s = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - w_n^2} \quad \text{para} \quad w_n^2 \leq \sigma^2$$

ou $s = -\sigma \pm j \cdot w$ para $w_n^2 > \sigma^2$

Resposta natural dos sistemas de 2ª ordem

- Sob o ponto de vista dos autovalores da equação característica.

- CASO SUPERAMORTECIDO $(\xi > 1)$

  $s = -\sigma_1, -\sigma_2$ (pólos distintos, reais e negativos)

  onde $\sigma_1 = \sigma \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}\right)$ e $\sigma_2 = \sigma \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}\right)$

- CASO COM AMORTECIMENTO CRÍTICO $(\xi = 1)$

  $s = -\sigma, -\sigma$ (pólos iguais, reais e negativos)

- CASO SUBAMORTECIDO $(0 \leq \xi < 1)$

  $s = -\sigma \pm j \cdot w$ (pólos complexos conjugados com parte real negativa)

- CASO SEM AMORTECIMENTO $(\xi = 0)$

  $s = \pm j \cdot w$ (pólos complexos conjugados sobre o eixo imaginário)

- CASO SUPERAMORTECIDO

  $$x_n = C_1 \cdot e^{-\sigma_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\sigma_2 \cdot t}$$

  onde $C_1 = \dfrac{\sigma_2 \cdot x(0) + \dfrac{dx(0)}{dt}}{\sigma_2 - \sigma_1}$ e $C_2 = -\dfrac{\sigma_1 \cdot x(0) + \dfrac{dx(0)}{dt}}{\sigma_2 - \sigma_1}$

Resposta natural dos sistemas de 2ª ordem

- CASO COM AMORTECIMENTO CRÍTICO

$$x_n = x(0)\cdot(1+\sigma\cdot t)\cdot e^{-\sigma\cdot t} + \frac{dx(0)}{dt}\, t\cdot e^{-\sigma\cdot t}$$

- CASO SUBAMORTECIDO

$$x_n = e^{-\sigma\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot e^{j\cdot w_d\cdot t} + C_2\cdot e^{-j\cdot w_d\cdot t}\right) = C_3\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot\cos(w_d\cdot t-\theta)$$

onde:

$$C_1 = x(0)\,\frac{\sigma + j\cdot w_d}{2\cdot j\cdot w_d} + \frac{dx(0)}{dt}\,\frac{1}{2\cdot j\cdot w_d} \qquad C_2 = x(0)\,\frac{-\sigma + j\cdot w_d}{2\cdot j\cdot w_d} + \frac{dx(0)}{dt}\,\frac{1}{2\cdot j\cdot w_d}$$

$$C_3 = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{w_d}x(0) + \frac{\frac{dx(0)}{dt}}{w_d}\right)^2 + x(0)^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{w_d} + \frac{dx(0)/dt}{w_d\cdot x(0)}\right)$$

$$\cos(w\cdot t-\theta) = \frac{\exp[j\cdot(w\cdot t-\theta)] + \exp[-j\cdot(w\cdot t-\theta)]}{2}$$

$$X(s) = \frac{K_1}{1+s\cdot\tau_1}\,\frac{K_2}{1+s\cdot\tau_2} = \frac{K}{(1+s\cdot\tau_1)\cdot(1+s\cdot\tau_2)} \quad \text{(caso superamortecido)}$$

$$K = K_1\cdot K_2 \qquad \tau = \sqrt{\tau_1\cdot\tau_2} \;\rightarrow\; 2\cdot\xi\cdot\tau = \tau_1+\tau_2$$

$$X(s) = \frac{K\cdot w_n^2}{s^2 + 2\cdot\xi\cdot w_n\cdot s + w_n^2} \quad \text{(caso subamortecido)}$$

onde $w_n = \dfrac{1}{\tau}$ e K = ganho estático

ξ	*Resposta*	*Raízes da equação característica*
>1	Superamortecida	Reais distintas
$=1$	Criticamente amortecida	Reais iguais
$0<\xi<1$	Subamortecida	Complexas conjugadas com parte real negativa
$=0$	Sem amortecimento	Complexas conjugadas com parte real nula

Resposta forçada dos sistemas de 2ª ordem

- As funções de excitação possuem um forma f(t), onde F é uma constante complexa.

$$f(t) = F \cdot e^{s \cdot t}$$

$$x_f = X_f \cdot e^{s \cdot t}$$

$$X_f = \frac{F}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

- ENTRADA CONSTANTE $(f = F = f_0,\ s = 0)$

$$X_f = \frac{f_0}{k} = x_f$$

- ENTRADA EXPONENCIAL $\left(f = f_0 \cdot e^{-\sigma_f \cdot t},\ s = -\sigma_f,\ F = f_0\right)$

$$X_f = \frac{f_0}{\left(m \cdot \sigma_f^{\,2} - b \cdot \sigma_f + k\right)} \quad \text{e} \quad x_f = X_f \cdot e^{-\sigma_f \cdot t}$$

- ENTRADA SENOIDAL $\left(f = f_0 \cdot \cos(w_f \cdot t) = \mathrm{Re}\left(f_0 \cdot e^{j \cdot w_f \cdot t}\right),\ s = j \cdot w_f,\ F = f_0\right)$

$$X_f = \frac{f_0}{\left(-m \cdot w_f^{\,2} + j \cdot b \cdot w_f + k\right)}$$

$$x_f = \mathrm{Re}\left(X_f \cdot e^{j \cdot w_f \cdot t}\right) \quad \text{ou} \quad x_f = x_0 \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f)$$

$$x_0 = \left|\frac{f_0}{-m \cdot w_f^{\,2} + j \cdot b \cdot w_f + k}\right| \quad \text{e} \quad \theta_f = \left\lfloor\frac{f_0}{-m \cdot w_f^{\,2} + j \cdot b \cdot w_f + k}\right.$$

Resposta forçada dos sistemas de 2ª ordem

- Com a entrada senoidal e senoidal amortecida, a frequência e a constante de tempo de decaimento (atenuação) da resposta são as mesmas da função de excitação;
- A magnitude da resposta é proporcional à da função de excitação e há uma defasagem entre a excitação e a resposta.

- ENTRADA SENOIDAL AMORTECIDA

$$\left(f = f_0 \cdot e^{-\sigma_f \cdot t} \cdot \cos(w_f \cdot t) = \mathrm{Re}\left[f_0 \cdot e^{(-\sigma_f + j \cdot w_f) \cdot t} \right] \qquad s = -\sigma_f + j \cdot w_f \qquad F = f_0 \right)$$

$$X_f = \left(\frac{f_0}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k} \right)_{s = -\sigma_f + j \cdot \omega_f}$$

$$x_f = \mathrm{Re}\left[X_f \cdot \exp(-\sigma_f + j \cdot \omega_f) \cdot t \right] \qquad \text{ou} \qquad x_f = x_0 \cdot e^{-\sigma_f \cdot t} \cdot \cos(w_f \cdot t + \theta_f)$$

$$x_0 = \left| \frac{f_0}{m \cdot (-\sigma_f + j \cdot w_f)^2 + b \cdot (-\sigma_f + j \cdot w_f) + k} \right|$$

$$\theta_f = \left\lfloor \frac{f_0}{m \cdot (-\sigma_f + j \cdot w_f)^2 + b \cdot (-\sigma_f + j \cdot w_f) + k} \right.$$

Resposta total de sistemas de 2ª ordem

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t)$$

- RESPOSTA TOTAL AO DEGRAU

$$f(t) = F \cdot H(t) = \left(F \cdot e^{s \cdot t}\right)_{s=0} \cdot H(t)$$

$$x = x_f + x_n$$

$$x_f = \left(X_f \cdot e^{s \cdot t}\right)_{s=0} \qquad x_n = X_n \cdot e^{s \cdot t} \text{ (ambas para } t > 0\text{)}$$

- movimento forçado:

$$\left(m \cdot s^2 + b \cdot s + k\right)_{s=0} \cdot X_f = F \qquad \text{(para } t > 0\text{)}$$

$$\therefore \; X_f = \frac{F}{k} = x_f$$

- movimento natural:

A resposta depende de ξ. Suponha, por exemplo, que $0 \le \xi < 1$

$$x_n = \left[C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(w_d \cdot t - \theta)\right] \cdot H(t)$$

onde $C_3 = X_n$

- movimento total:

$$x = \frac{F}{K} + C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(w_d \cdot t - \theta) \qquad \text{(para } t > 0\text{)}$$

$$x(0_+) = 0 = \frac{F}{k} + C_3 \cdot \cos(-\theta)$$

$$\frac{dx(0_+)}{dt} = 0 = C_3 \cdot \left[-\sigma \cdot \cos(-\theta) - w_d \cdot \operatorname{sen}(-\theta)\right]$$

$$C_3 = \frac{-F}{K \cdot \cos\theta} \qquad [\text{pois } \cos(-\theta) = \cos\theta] \quad \text{e} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{w_d}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(\xi)$$

$$0 \le \xi < 1$$

$$x = \frac{F}{k}\left[1 - \frac{1}{\cos(\theta)} e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta)\right] \qquad \text{(para } t > 0\text{)}$$

onde $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\xi)$

Resposta total de sistemas de 2ª ordem

- Caso se assuma função de transferência, tem-se:
- A oscilação e sobressinal ocorrem somente para 0<ξ<1;
- ξ alto uma resposta lenta;
- ξ = 1 fornece a resposta mais rápida sem sobressinal.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + 1}$$

$$F(s) = \frac{A}{s} \quad \therefore X(s) = \frac{K \cdot A}{s \cdot \left(\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + 1\right)}$$

$$\text{Para } \xi > 1: \quad x(t) = K \cdot A \cdot \left(1 - \frac{\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2}\right)$$

$$\text{Para } \xi = 1: \quad x(t) = K \cdot A \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-t/\tau}\right]$$

$$\text{Para } 0 \le \xi < 1: \quad x(t) = K \cdot A \cdot \left[1 - e^{-\xi \cdot t/\tau}\left(\cos(w_d \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}(w_d \cdot t)\right)\right]$$

Resposta total de sistemas de 2ª ordem

- Resposta ao impulso δ(t) unitário.

Para $\xi > 1$: $$x(t) = \frac{dx(0)}{dt}\,\frac{e^{-\sigma_1 \cdot t} - e^{-\sigma_2 \cdot t}}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

onde: $\sigma_1 = \sigma \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}\right)$ e $\sigma_2 = \sigma \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}\right)$

Para $\xi = 1$: $$x(t) = \frac{dx(0)}{dt}\, t \cdot e^{-\sigma \cdot t}$$

Para $\xi < 1$: $$x(t) = \frac{dx(0)}{dt}\,\frac{1}{w}\, e^{-\sigma \cdot t} \cdot \mathrm{sen}(w \cdot t)$$

$x(0_+) = 0$ e $\frac{dx(0_+)}{dt} = f_0\,\frac{\Delta t}{m}$

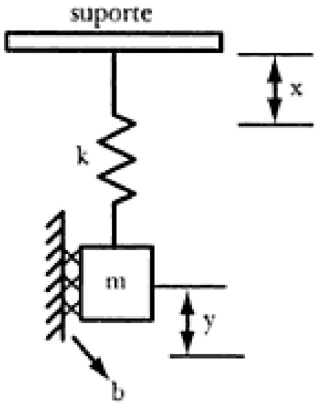
onde Δt = largura do impulso.

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

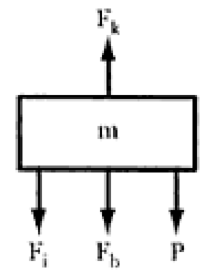
- Sistema massa-mola com amortecedor;
- O sistema está inicialmente em equilíbrio estático e, repentinamente, o suporte é submetido ao movimento.

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(w_f \cdot t) \cdot H(t)$$

- Deseja-se conhecer y(t)



- DIAGRAMA DE CORPO LIVRE



- RELAÇÕES DO SISTEMA
  - Balanço de forças:

$$F_k = F_i + F_b + P$$

$$F_i = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F_b = b \frac{dy}{dt}$$

$$P = m \cdot g$$

- RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

$$F_k = k \cdot (x - y) + k \cdot \delta$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+m\cdot g=k\cdot(x-y)+k\cdot\delta$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+k\cdot y=k\cdot x$$

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[x_0\cdot e^{j\cdot w_f\cdot t}\cdot H(t)\right]$$

$$x(t)=X\cdot e^{s\cdot t}$$

$$X=x_0 \qquad s=j\cdot w_f \qquad t>0$$

- COMPONENTE FORÇADA DA RESPOSTA

$$y_f=\mathrm{Re}\left[Y_f\cdot\left(e^{s\cdot t}\right)_{s=j\cdot w_f}\right] \quad (\text{para } t>0)$$

$$y_f=Y_f\cdot e^{s\cdot t}$$

$$\left(m\cdot s^2+b\cdot s+k\right)\cdot Y_f\cdot e^{s\cdot t}=k\cdot X\cdot e^{s\cdot t} \quad (\text{para } t>0)$$

com $s=j\cdot w_f$

$$\frac{Y_f}{X}=\frac{k}{m\cdot s^2+b\cdot s+k}$$

$$Y_f=\left(\frac{k}{m\cdot s^2+b\cdot s+k}\right)_{s=j\cdot\omega_f}\cdot x_0$$

$$\vec{Y}_f=\left|\vec{Y}_f\right|\cdot\exp\left(j\cdot\lfloor\vec{Y}_f\rfloor\right)$$

- COMPONENTE NATURAL

$$y_n=Y_n\cdot e^{s\cdot t}$$

$$m\cdot s^2+b\cdot s+k=0$$

$$s=\frac{-b}{2\cdot m}\pm j\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{(2\cdot m)^2}}=-\sigma\pm j\cdot w$$

$$y_n=C_3\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot\cos(w\cdot t-\theta) \qquad \text{ou}$$

$$y_n=\mathrm{Re}\left[C_3\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot e^{j\cdot(w\cdot t-\theta)}\right]$$

- RESPOSTA TOTAL

$$y=y_f+y_n$$

$$y=\mathrm{Re}\left[\left|\vec{Y}_f\right|\cdot e^{j\cdot\lfloor\vec{Y}_f\rfloor}\cdot e^{j\cdot\omega_f\cdot t}+C_3\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t-\theta)}\right] \quad \text{ou}$$

$$y(t)=\left|\vec{Y}_f\right|\cdot\cos\left(\omega_f\cdot t+\lfloor\vec{Y}_f\rfloor\right)+C_3\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t-\theta)$$

$$y(0_+)=y(0_-)=0 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}(0_+)=\dot{y}(0_-)=0$$

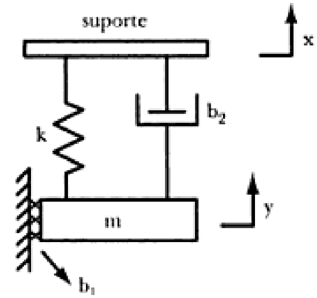
$$y(0_+)=0=\left|\vec{Y}_f\right|\cdot\cos\left(\lfloor\vec{Y}_f\rfloor\right)+C_3\cdot\cos(-\theta)$$

$$\dot{y}(0_+)=0=-\omega_f\cdot\left|\vec{Y}_f\right|\cdot\mathrm{sen}\left(\lfloor\vec{Y}_f\rfloor\right)+C_3\cdot\left[-\sigma\cdot\cos(-\theta)-\omega\cdot sen(-\theta)\right]$$

$$C_3=-\frac{\left|\vec{Y}_f\right|\cdot\cos\left(\lfloor\vec{Y}_f\rfloor\right)}{\cos(\theta)} \qquad \text{e} \qquad \theta=\tan^{-1}\left[\frac{\sigma}{\omega}-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)\cdot\tan\left(\lfloor\vec{Y}_f\rfloor\right)\right]$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- Sistema massa-mola e dois efeitos de amortecimento;
- Considera-se que o sistema esteja inicialmente em equilíbrio implicando que os valores de y e dy/dt sejam nulos.



$$x(t) = x_0 \cdot \exp(-\sigma_f \cdot t) \cdot H(t)$$

$$m \cdot \ddot{y} + (b_1 + b_2) \cdot \dot{y} + k \cdot y = b_2 \cdot \dot{x} + k \cdot x$$

- MOVIMENTO NATURAL

$$m \cdot Y_N \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t} + (b_1 + b_2) \cdot Y_N \cdot s \cdot e^{s \cdot t} + k \cdot Y_N \cdot e^{s \cdot t} = 0$$

$$\therefore \; m \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + k = 0 \qquad (\text{para } t > 0)$$

$$y_n = C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta)$$

- MOVIMENTO FORÇADO

$$x_f = X_f \cdot e^{s \cdot t} = x_0 \cdot e^{-\sigma_f \cdot t}$$

$$y_f = Y_f \cdot e^{-\sigma_f \cdot t}$$

$$Y_f = \frac{x_0 \cdot (k - b_2 \cdot \sigma_f)}{m \cdot \sigma_f^2 - (b_1 + b_2) \cdot \sigma_f + k}$$

- RESPOSTA TOTAL

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t)$$

$$\therefore \; y(t) = C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta) + Y_f \cdot e^{-\sigma_f \cdot t}$$

$$y(0) = C_3 \cdot \cos(\theta) + Y_f = 0$$

$$\dot{y}(0) = C_3 \cdot [-\sigma \cdot \cos(\theta) + \omega \cdot \mathrm{sen}(\theta)] - Y_f \cdot \sigma_f = 0$$

$$C_3 = \frac{-Y_f}{\cos(\theta)}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sigma - \sigma_f}{\omega}\right) \qquad \sigma = \frac{b_1 + b_2}{2 \cdot m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{b_1 + b_2}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$$

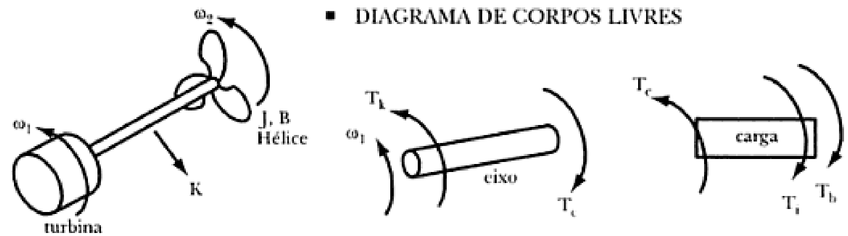
$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{(b_1 + b_2)^2}{4 \cdot m^2}}$$

$$\left[m \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + k\right] \cdot Y(s) = \left[b_2 \cdot (s - e^0) + k\right] \cdot X(s) \qquad \left[d\left(e^{-\sigma_f \cdot t}\right)/dt\right] = e^0 = 1$$

$$Y(s) = \frac{x_0 \cdot [b_2 \cdot (s - 1) + k]}{\left[m \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + k\right] \cdot (s + \sigma_f)}$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- Modelo de sistema de propulsão naval;
- A velocidade $\omega_1(t)$ da turbina é dado;
- Encontrar a função de transferência ω_2/ω_1.
- O hélice tem momento de inércia J, amortecimento B e longo eixo flexível com coeficiente torcional K.
- Gerar as equações de movimento.
- Quando a turbina está parando seu movimento é dado por $\omega_1=\omega_{10}.e^{-\sigma.t}$;
- Encontrar o movimento forçado resultante em ω2(t).



- RELAÇÃO DO SISTEMA
  - Balanço de momentos:

$$T_{eixo} = T_{carga}$$

- RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

$$T_{eixo} = K\cdot(\theta_1-\theta_2) = K\cdot\left(\int_0^t \omega_1\,dt - \int_0^t \omega_2\,dt\right)$$

$$T_{carga} = B\cdot\omega_2 + J\cdot\dot{\omega}_2$$

- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

$$K\cdot(\theta_1-\theta_2) = B\cdot\omega_2 + J\cdot\dot{\omega}_2$$

- MOVIMENTO FORÇADO

$$\omega_2(t) = \omega_{2f}\cdot e^{-\sigma\cdot t}$$

$$J\cdot\ddot{\omega}_2 + B\cdot\dot{\omega}_2 + K\cdot\omega_2 = K\cdot\omega_1$$

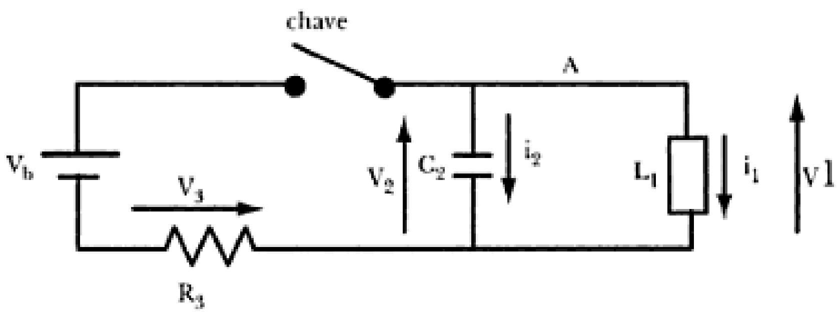
$$J\cdot\omega_{2f}\cdot\sigma^2 - B\cdot\omega_{2f}\cdot\sigma + K\cdot\omega_{2f} = K\cdot\omega_{10}$$

$$\omega_{2f} = \frac{K\cdot\omega_{10}}{J\cdot\sigma^2 - B\cdot\sigma + K}$$

$$\omega_2(t) = \frac{K\cdot\omega_{10}}{J\cdot\sigma^2 - B\cdot\sigma + K}\,e^{-\sigma\cdot t}$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- I1=-i2 indefinidamente. Assim, a corrente flui pelo LC isolado, primeiro no sentido horário e depois anti-horário, carregando o capacitor em um sentido e depois noutro. A energia é armazenada alternadamente no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor.



- RELAÇÕES DO SISTEMA
  - Lei da Corrente de Kirchhoff aplicada ao nó A (equações de equilíbrio):
    $i_1 + i_2 = 0$ (para $t > 0 \rightarrow$ chave aberta)
- RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (V_1 = V_2) \quad i_2 = C_2 \frac{d(V_1)}{dt} = C_2 \cdot L_1 \frac{d\left(\frac{di_1}{dt}\right)}{dt}$$

- EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

$$i_1 + C_2 \cdot L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{i_1}{C_2 \cdot L_1} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_n{}^2 \cdot x = 0 \qquad (\xi = 0)$$

$$i_1 = i_{1m} \cdot \cos(\omega_n \cdot t - \theta) \quad \text{onde} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{C_2 \cdot L_1}}$$

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) \;\; \text{e} \;\; V_2(0_+) = V_2(0_-)$$

$$i_1(0_-) = V_3(0_-)/R_3 \qquad V_1(0_-) = 0$$

$$V_1(0_-) = V_2(0_-) = 0$$

Aplicando-se a lei da Tensão de Kirchhoff para $t < 0$:

$V_b(0_-) = V_3(0_-)$ (toda tensão cai no resistor)

$$i_1(0_+) = \frac{V_b}{R_3} \;\; \text{e} \;\; V_1(0_+) = 0$$

$$i_1(0_+) = i_{1m} \cdot \cos(\omega_n \cdot t - \theta) = i_{1m} \cdot \cos(-\theta) = \frac{V_b}{R_3}$$

$$V_1(0_+) = L_1 \frac{di_1(0_+)}{dt} = -L_1 \cdot i_{1m} \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(-\theta) = 0$$

$$\theta = 0 \qquad i_{1m} = \frac{V_b}{R_3}$$

$$i_1 = \frac{V_b}{R_3} \cos(\omega_n \cdot t) \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{C_2 \cdot L_1}}$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

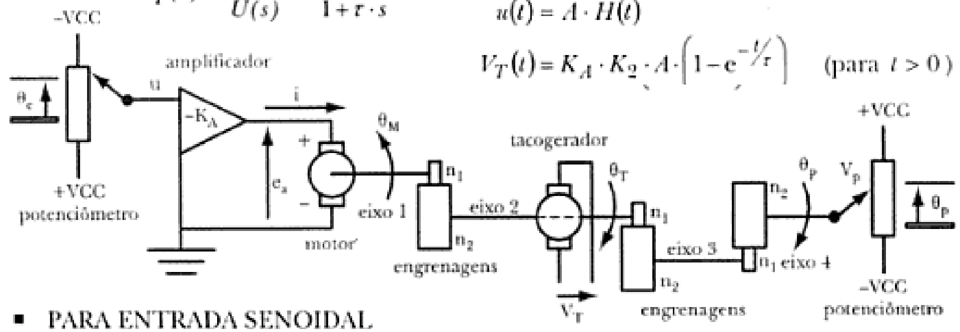
- Gerar as funções de transferência de um servomecanismo, as quais relacionam o sinal de saída Vt de um tacômetro para medir velocidade e de um potenciômetro Vp para medir posição.
- A entrada do sistema é a tensão de armadura de um motor de corrente contínua u.
- Determinar, analiticamente, para cada função de transferência, as saídas Vt(t) e Vp(t) para entrada do tipo degrau e senoidal, supondo condições iniciais nulas.

$$G_T(s) = \frac{V_T(s)}{U(s)} = \frac{K_A \cdot K_2}{1 + \tau \cdot s}$$

- PARA ENTRADA DEGRAU

$$u(t) = A \cdot H(t)$$

$$V_T(t) = K_A \cdot K_2 \cdot A \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (\text{para } t > 0)$$



- PARA ENTRADA SENOIDAL

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

$$V_T(t) = \left|\vec{V}_{T,f}\right| \cdot \cos\left(\omega_f \cdot t + \angle\vec{V}_{T,f}\right) - \left|\vec{V}_{T,f}\right| \cdot \cos\left(\angle\vec{V}_{T,f}\right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\vec{V}_{T,f} = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{1 + j \cdot \omega_f \cdot \tau}$$

$$\left|\vec{V}_{T,f}\right| = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}} \quad \text{e} \quad \angle\vec{V}_{T,f} = \angle -\omega_f \cdot \tau = \arctan(-\omega_f \cdot \tau)$$

$$V_T(t) = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}} \left[\cos\left(\omega_f \cdot t + \angle -\omega_f \cdot \tau\right) - \cos\left(\angle -\omega_f \cdot \tau\right) \cdot e^{-t/\tau}\right]$$

$$\cos\left(\angle -\omega_f \cdot \tau\right) = \cos\left(\angle \omega_f \cdot \tau\right) = \cos\left[\arctan(\omega_f \cdot \tau)\right] = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}}$$

$$\therefore \; V_T(t) = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}} \left[\cos\left(\omega_f \cdot t - \angle \omega_f \cdot \tau\right) - \frac{e^{-t/\tau}}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}}\right]$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- Aplicando a transformada de Laplace;
- Aplicando a convolução.

$$V_T(s) = \frac{K_A \cdot K_2}{1+\tau \cdot s} \; \frac{A \cdot s}{s^2 + \omega_f^{\,2}} = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{\tau} \; \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \; \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = e^{-t/\tau} \qquad F_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad f_2(t) = \cos(\omega \cdot t)$$

$$F_1(s) \cdot F_2(s) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\theta) \cdot f_2(\theta)\, d\theta = \int_0^t \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\theta}{\tau}\right) \cdot \cos(\omega_f \cdot \theta)\, d\theta =$$

$$= e^{-t/\tau} \cdot \int_0^t e^{\theta/\tau} \cdot \cos(\omega_f \cdot \theta)\, d\theta$$

$$\int e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)\, dx = \frac{e^{a \cdot x} \cdot [a \cdot \cos(b \cdot x) + b \cdot \mathrm{sen}(b \cdot x)]}{a^2 + b^2}$$

$$e^{-t/\tau} \cdot \int_0^t e^{\theta/\tau} \cdot \cos(\omega_f \cdot \theta)\, d\theta = e^{-t/\tau} \left. \frac{e^{\theta/\tau} \cdot \left[\frac{1}{\tau}\cos(\omega_f \cdot \theta) + \omega_f \cdot \mathrm{sen}(\omega_f \cdot \theta)\right]}{\frac{1}{\tau^2} + \omega_f^{\,2}} \right|_0^t$$

$$V_T(t) = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{\tau}\, e^{-t/\tau} \, \frac{e^{t/\tau} \cdot \left[\frac{1}{\tau}\cos(\omega_f \cdot t) + \omega_f \cdot \mathrm{sen}(\omega_f \cdot t)\right] - \frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega_f^{\,2}}$$

$$V_T(t) = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}\left[\cos(\omega_f \cdot t) + \omega_f \cdot \tau \cdot \mathrm{sen}(\omega_f \cdot t) - e^{-t/\tau}\right]$$

$$A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t) = C \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{e} \quad \psi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \left\lfloor \frac{B}{A} \right\rfloor$$

$$\cos(\omega_f \cdot t) + \omega_f \cdot \tau \cdot \mathrm{sen}(\omega_f \cdot t) = \sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2} \cdot \cos(\omega_f \cdot t - \lfloor \omega_f \cdot \tau \rfloor)$$

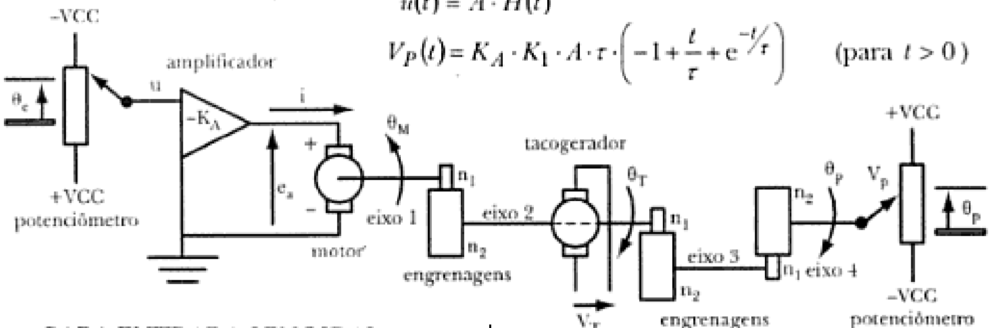
$$V_T(t) = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}\left[\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2} \cdot \cos(\omega_f \cdot t - \lfloor \omega_f \cdot \tau \rfloor) - e^{-t/\tau}\right]$$

Finalmente, colocando-se $\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}$ em evidência:

$$V_T(t) = \frac{K_A \cdot K_2 \cdot A}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}}\left[\cos(\omega_f \cdot t - \lfloor \omega_f \cdot \tau \rfloor) - \frac{e^{-t/\tau}}{\sqrt{1 + (\omega_f \cdot \tau)^2}}\right]$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

$$G_P(s) = \frac{V_P(t)}{U(s)} = \frac{K_A \cdot K_1}{(1+\tau \cdot s)\cdot s}$$



- PARA ENTRADA DEGRAU

$$u(t) = A \cdot H(t)$$

$$V_P(t) = K_A \cdot K_1 \cdot A \cdot \tau \cdot \left(-1 + \frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau}\right) \qquad (\text{para } t > 0)$$

- PARA ENTRADA SENOIDAL

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

- Soma das respostas natural e forçada:

Resposta natural:

Os pólos são:

$$s = 0 \qquad \text{e} \qquad s = -\frac{1}{\tau}$$

$$V_{P,n} = V_{PN} \cdot e^{s \cdot t}$$

$$V_{P,n} = C_1 + C_2 \cdot e^{-t/\tau}$$

Resposta forçada:

A excitação é na forma geral:

$$u(t) = U \cdot e^{s \cdot t}$$

$$V_{P,f} = \vec{V}_{P,f} \cdot \cos(\omega_f \cdot t) = \mathrm{Re}\left[\left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot e^{j \cdot \lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor} \cdot e^{j \cdot \omega_f \cdot t}\right]$$

$$= \left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot \cos\left(\omega_f \cdot t + \lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right)$$

$$\vec{V}_{P,f} = \left(\frac{K_A \cdot K_1 \cdot A}{\tau \cdot s^2 + s}\right)_{s = j \cdot \omega_f} \qquad \therefore \vec{V}_{P,f} = \frac{K_A \cdot K_1 \cdot A}{-\tau \cdot \omega_f^2 + j \cdot \omega_f}$$

$$\left|\vec{V}_{P,f}\right| = \frac{K_A \cdot K_1 \cdot A}{\omega_f \cdot \sqrt{1 + (\tau \cdot \omega_f)^2}} \qquad \text{e} \qquad \lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\tau \cdot \omega_f} + \pi \right\rfloor$$

Resposta total:

$$V_P(t) = V_{P,n}(t) + V_{P,f}(t)$$

$$V_P(t) = \left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot \cos\left(\omega_f \cdot t + \lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right) + C_1 + C_2 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$V_P(0) = 0 = \left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot \cos\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right) + C_1 + C_2$$

$$\dot{V}_P(0) = 0 = -\left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot \omega_f \cdot \mathrm{sen}\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right) - \frac{C_2}{\tau}$$

$$C_2 = -\left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot \tau \cdot \omega_f \cdot \mathrm{sen}\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right)$$

$$C_1 = \left|\vec{V}_{P,f}\right| \cdot \left[\tau \cdot \omega_f \cdot \mathrm{sen}\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right) - \cos\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right)\right]$$

$$\mathrm{sen}\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega_f)^2}} \qquad \cos\left(\lfloor \vec{V}_{P,f} \rfloor\right) = \frac{-\tau \cdot \omega_f}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega_f)^2}}$$

$$C_2 = \frac{K_A \cdot K_1 \cdot A \cdot \tau}{1 + (\tau \cdot \omega_f)^2} \qquad C_1 = 0$$

$$V_P(t) = K_A \cdot K_1 \cdot A \cdot \left[\frac{\cos\left(\omega_f \cdot t + \pi + \left\lfloor \frac{1}{\tau \cdot \omega_f} \right\rfloor\right)}{\omega_f \cdot \sqrt{1 + (\tau \cdot \omega_f)^2}} + \frac{\tau \cdot e^{-t/\tau}}{1 + (\tau \cdot \omega_f)^2}\right]$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- Aplicando Laplace e antitransformada de Laplace.

$$V_P(s) = \frac{K_A \cdot K_1}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)} \frac{A \cdot s}{s^2 + \omega_f^2} = \frac{K_A \cdot K_1 \cdot A}{\tau} \frac{1}{s \cdot \left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \frac{s}{s^2 + \omega_f^2}$$

$$V_P(s) = K_A \cdot K_1 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right) \frac{s}{s^2 + \omega_f^2}$$

$$V_P(s) = K_A \cdot K_1 \cdot A \cdot \left[\left(\frac{1}{s} \; \frac{s}{s^2 + \omega_f^2}\right) - \left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \; \frac{s}{s^2 + \omega_f^2}\right)\right]$$

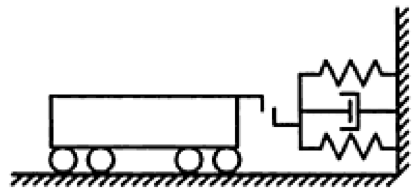
$$\left(\frac{1}{s} \; \frac{s}{s^2 + \omega_f^2}\right) \qquad \frac{\operatorname{sen}(\omega_f \cdot t)}{\omega_f}$$

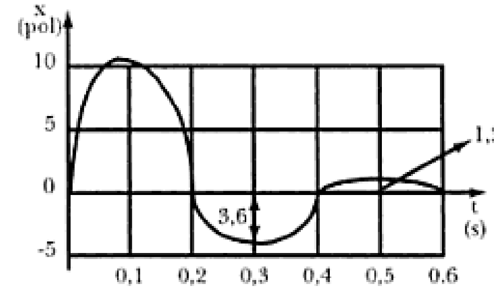
$$\left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \; \frac{s}{s^2 + \omega_f^2}\right) \qquad F_1(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = e^{-t/\tau}$$

$$F_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_f^2} \quad \Rightarrow \quad f_2(t) = \cos(\omega_f \cdot t)$$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

- Um vagão de trem se aproxima, a uma velocidade constante de 260 pol/s, de um amortecedor de massa desprezível e se acopla ao mesmo sem perda de energia;
- Qual será a frequência de oscilação?
- Qual será a máxima excursão do amortecedor?
- Quanto deve incrementar para produzir amortecimento crítico?





a. Cálculo da freqüência de oscilação após o acoplamento

$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \qquad x_n = x_n \cdot e^{s \cdot t}$

$\dot{x}_n = x_n \cdot s \cdot e^{s \cdot t} \qquad \ddot{x}_n = x_n \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t}$

$m \cdot s^2 + b \cdot s + k = 0$

$x_n = C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta)$

$t = 0.08\text{s}$

$11 = C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot 0{,}08}$

$3{,}6 = C_3 \cdot e^{-\sigma \cdot 0{,}3}$

$\sigma \cong 5 \qquad x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 260 \, \frac{\text{pol}}{\text{s}}$

$0 = C_3 \cdot \cos(-\theta) \qquad 260 = C_3 \cdot [-\sigma \cdot \cos(-\theta) + \omega \cdot \text{sen}(\theta)]$

$\theta = 90° \qquad \theta = \arctan\left[\frac{\sigma}{\omega} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega \cdot x(0)}\right]$

Como $x(0) = 0$, resulta $\theta = \arctan(\infty) = 90°$

$260 = C_3 \cdot \omega \qquad f = 2{,}5 \, \frac{\text{ciclo}}{\text{s}} \qquad \therefore \; \omega = 2{,}5 \cdot 2 \cdot \pi \, \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 5 \cdot \pi \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\omega = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} \qquad \omega = 5 \cdot \pi \text{ e } \sigma = 5. \qquad \omega_n = 16{,}51 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$C_3 = 16{,}6 \text{ pol} \qquad x_n = 16{,}6 \cdot e^{-5 \cdot t} \cdot \cos(5 \cdot \pi \cdot t - 90) \qquad \omega = \omega_n = 16{,}51 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Exemplos de resposta temporal de sistemas de 2ª ordem

b. Cálculo da máxima excursão do amortecedor

$$x_n = C_3 \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta)$$

Para $t = 0$:

$$0 = C_3 \cdot \cos(\theta) \qquad \therefore \theta = 90°$$

$$\dot{x}(0) = 260$$

$$260 = C_3 \cdot \omega$$

$$C_3 = \frac{260}{16{,}51} = 15{,}75 \text{ pol}$$

c. Incremento no valor do amortecimento para produzir amortecimento crítico

$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0{,}307$$

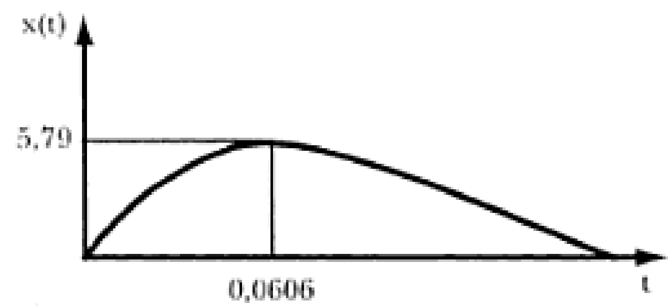
Para se atingir o amortecimento crítico $(\xi = 1)$, deve-se multiplicar ξ por $1/0{,}307$; portanto deve-se aumentá-lo de 3,26 vezes.

d. Cálculo da freqüência de oscilação após o acoplamento e da máxima excursão do amortecedor com amortecimento crítico no sistema

$$\sigma = \xi \cdot \omega_n \qquad \therefore \ \sigma = \omega_n$$

$$\omega = \sqrt{\omega_n^{\,2} - \sigma^2} \qquad \omega = 0$$

$$x_n = x(0) \cdot (1 + \sigma \cdot t) \cdot e^{-\sigma \cdot t} + \frac{dx(0)}{dt} t \cdot e^{-\sigma \cdot t}$$



$$\frac{dx_n}{dt} = x(0) \cdot \left[(1 + \sigma \cdot t) - \sigma \cdot e^{-\sigma \cdot t} + \sigma \cdot e^{-\sigma \cdot t}\right] + \frac{dx(0)}{dt}\left[e^{-\sigma \cdot t} + t \cdot (-\sigma) \cdot e^{-\sigma \cdot t}\right] = 0$$

$$t = 0{,}0606 \text{ s} \qquad x_n(0{,}0606) = x_{n,\text{MÁXIMO}} = 5{,}79 \text{ pol}$$

Referências

- Claudio Garcia – Modelagem e simulação - 2005 – EDUSP