Controle de Processos: *Modelagem analítica de sistemas mecânicos*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti
& David Fiorillo

Laboratório de Automação e Robótica (LARA)
Dept. Engenharia Elétrica - UnB

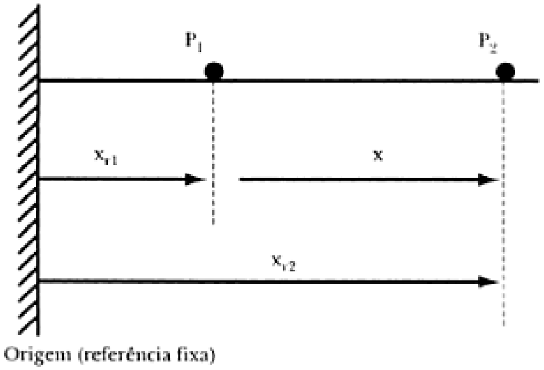
Conteúdo

Introdução

- Os sistemas mecânicos são construídos a partir de blocos básicos que são idealizações de fenômenos físicos que ocorrem nos sistemas reais;
- Pode ser classificadores em:
  - Sistemas translacionais;
  - Sistemas rotacionais; e
  - Transformadores mecânicos.

Sistemas mecânicos translacionais

- Movimento
- Força
- Potência
- Trabalho
- Energia



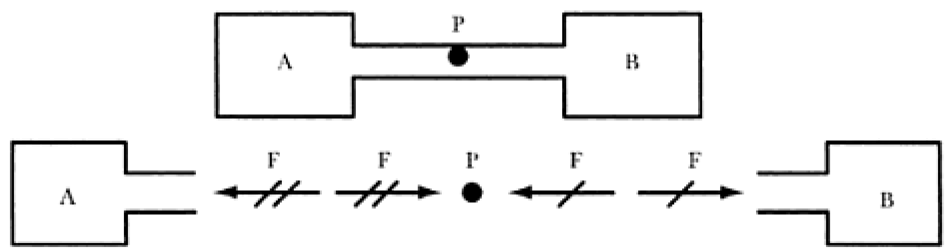
x_{r1} = posição de referência (fixa)

x = deslocamento do ponto = $x_{r2} - x_{r1}$

v_2 = velocidade em $P_2 = dx_{r2}/dt$ ou

$v_2 = dx_{r1}/dt + dx/dt = dx/dt$

a_2 = aceleração em $P_2 = dv_{r2}/dt = d^2x/dt^2$



1ª Lei de Newton ($\Sigma F = 0$): + = 0 (senão ponto P se moveria)

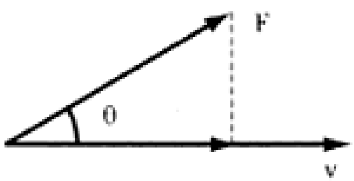
3ª Lei de Newton (ação e reação): +

A força F no elemento B aparece com direção oposta em P.

A força se desloca, se transmite.

p = potência mecânica = $F_m \cdot v$

(= força na direção do movimento x velocidade)



$F_m = F \cdot \cos \theta$

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} p \, dt = \int_{t_a}^{t_b} F_m \cdot v \, dt$$

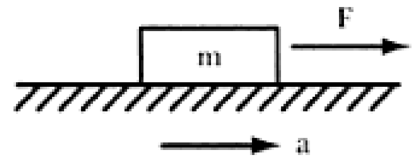
(trabalho realizado entre instantes t_a e t_b)

E_{ab} = energia mecânica = Σ (trabalho feito por todas as forças atuantes)= ΣW_{ab}

A lei de conservação da energia (ou 1ª Lei da Termodinâmica) diz que a energia (sob todas as formas) fornecida ao sistema deve ser ou conservada no sistema ou ser transferida para fora.

Elementos de sistemas dinâmicos

- Massa;
- Mola;
- Amortecedor.



$$F = m \cdot a = m \cdot dv/dt$$

$$p = \int_0^t m\frac{dv}{dt}\,dt + p_0 = m \cdot v + p_0$$

$$\therefore\ p - p_0 = m \cdot v$$

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Definição de quantidade de movimento p (*momentum*):

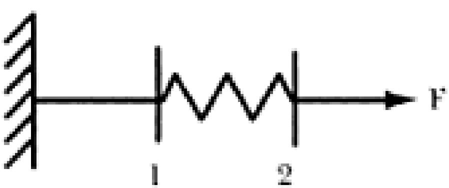
$$F = \frac{dp}{dt} \quad \text{ou} \quad p = \int_0^t F\,dt + p_0$$

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F \cdot v\,dt = \int_{t_a}^{t_b} m\frac{dv}{dt}v\,dt$$

$$W_{ab} = \int_0^{p_b} v\,dp, \quad \text{onde } p_b = p(t_b)$$

$$E_{ab} = W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F \cdot v\,dt = \int_{t_a}^{t_b} m\frac{dv}{dt}v\,dt = \frac{1}{2}m \cdot \left[v^2(t_b) - v^2(t_a)\right]$$

$$E_{ab} = m\frac{v^2}{2}$$



$$x_{21} = f(F) \quad \text{(forma geral)}$$

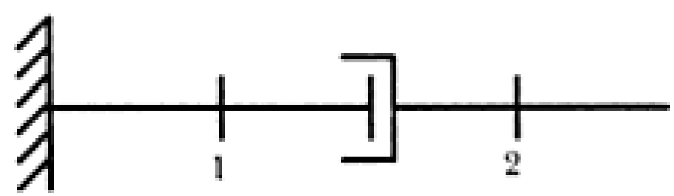
Lei de Hooke

$$x_{21} = F/k \quad \text{ou} \quad F = k \cdot x_{21}$$

$$v_{21} = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt} \quad \therefore \quad F = k \cdot \int_0^t v_{21}(t)\,dt + F_0$$

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F \cdot v_{21}\,dt = \frac{1}{2}k \cdot (x_{21})^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot (x_{21})^2 \quad \text{(energia potencial)}$$



$$F = b \cdot v_{21} = b \cdot (v_2 - v_1)$$

$$p = b \cdot (v_{21})^2 = F \cdot v_{21}$$

Equações de Lagrange

- Em engenharia mecânica é comum realizar a modelagem de sistemas mecânicos empregando-se as equações de Lagrange ao invés de usar as equações de Newton.
- Os mesmos resultados são obtidos, mas ao invés de se trabalhar com forças e deslocamentos, como nas equações de Newton, utilizam-se expressões envolvendo a energia (cinética e potencial) e o trabalho.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1 \ldots n$$

onde:

T = energia cinética do sistema

U = energia potencial do sistema

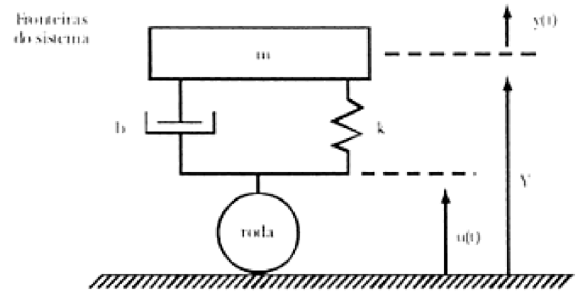
q_i = coordenadas independentes do sistema

Q_i = "forças generalizadas" dadas por: $Q_i = \dfrac{\delta W_i}{\delta q_i}$

sendo:

δW_i = trabalho feito no sistema pelas forças externas durante o deslocamento δq_i

δq_i = deslocamento virtual (infinitesimal)



$T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{y}^2 \qquad U = \frac{1}{2} k \cdot (u - y)^2$ caso, $i = 1$ e $q_1 = y$.

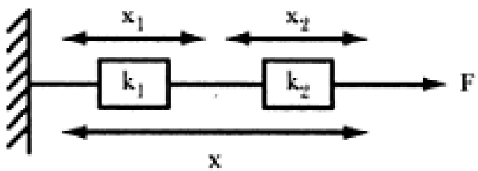
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \cdot \dot{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m \cdot \ddot{y} \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = k \cdot (u - y) \cdot (-1)$$

$Q_y = \dfrac{\delta W_y}{\delta y} = F_b$ onde $F_b = b \cdot (\dot{u} - \dot{y})$

$$m \cdot \ddot{y} - k \cdot (u - y) = b \cdot (\dot{u} - \dot{y}) \quad \therefore \quad m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = b \cdot \dot{u} + k \cdot u$$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b \cdot s + k}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$ (sistema de 2ª ordem)

Exemplos de modelagem e sistemas mecânicos translacionais



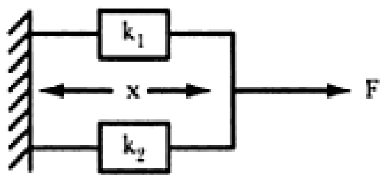
- MOLAS EM SÉRIE

$F = k_1 \cdot x_1 = k_2 \cdot x_2 = k_{EQ} \cdot x$

onde $x = x_1 + x_2$

$x_1 = \dfrac{F}{k_1} \qquad x_2 = \dfrac{F}{k_2}$

$\dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2} = \dfrac{F}{k_{EQ}} \quad \therefore \quad \dfrac{1}{k_{EQ}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$

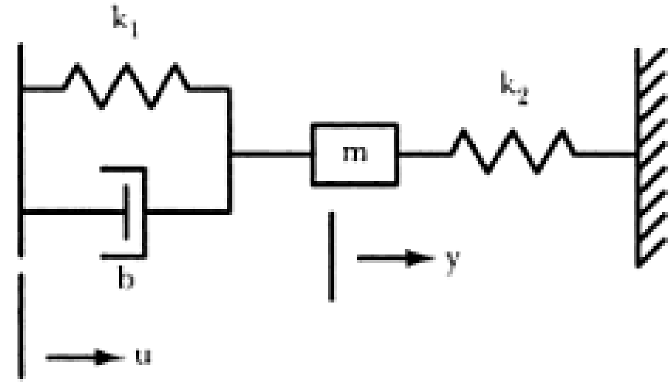


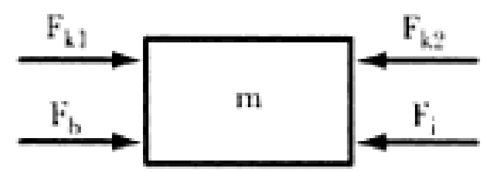
- MOLAS EM PARALELO

$F = F_1 + F_2 \qquad F_1 = k_1 \cdot x \qquad F_2 = k_2 \cdot x$

$F = k_{EQ} \cdot x$

$k_{EQ} \cdot x = k_1 \cdot x + k_2 \cdot x \quad \therefore k_{EQ} = k_1 + k_2$





$F_i = F_{k1} + F_b - F_{k2}$

$F_{k1} = k_1 \cdot (u - y) \qquad F_{k2} = k_2 \cdot y$

$F_b = b \cdot (\dot{u} - \dot{y}) \qquad F_i = m \cdot \ddot{y}$

$m \cdot \ddot{y} = k_1 \cdot (u - y) + b \cdot (\dot{u} - \dot{y}) - k_2 \cdot y$

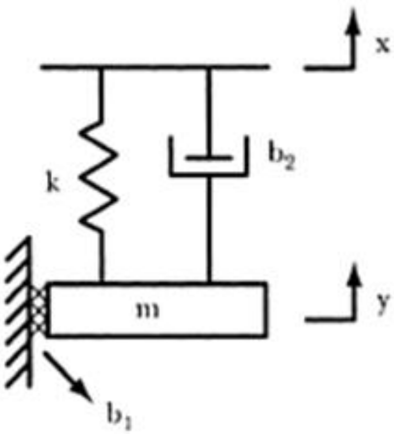
Na forma padronizada:

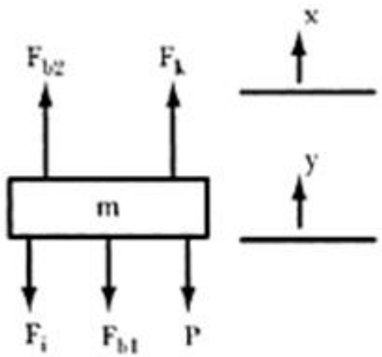
$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + (k_1 + k_2) \cdot y = b \cdot \dot{u} + k_1 \cdot u$

Entrada fornecida: $u(t)$

Saída a ser calculada: $y(t)$

Exemplos de modelagem e sistemas mecânicos translacionais





$$F_{b2} + F_k = F_i + F_{b1} + P$$

$$F_{b2} = b_2 \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \qquad F_k = k \cdot (x - y)$$

$$F_i = m \cdot \ddot{y} \qquad F_{b1} = b_1 \cdot \dot{y} \qquad P = m \cdot g$$

Supondo-se que $P = m \cdot g = k \cdot \delta$

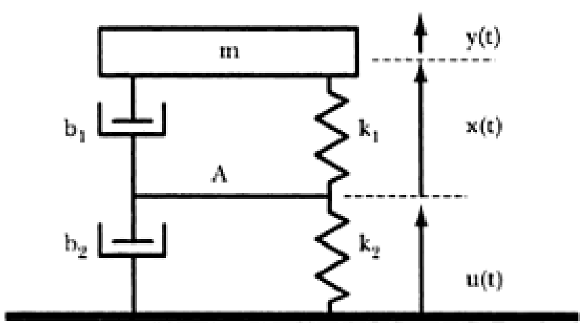
$$b_2 \cdot (\dot{x} - \dot{y}) + k \cdot (x + \delta - y) = m \cdot \ddot{y} + b_1 \cdot \dot{y} + m \cdot g$$

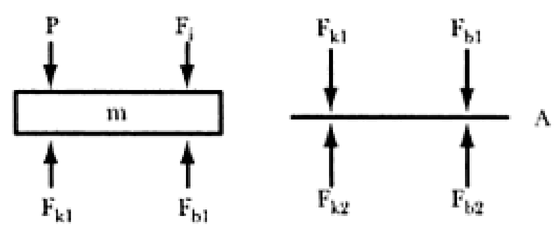
$$\Rightarrow b_2 \cdot (\dot{x} - \dot{y}) + k \cdot (x - y) = m \cdot \ddot{y} + b_1 \cdot \dot{y}$$

$$\therefore m \cdot \ddot{y} + (b_1 + b_2) \cdot \dot{y} + k \cdot y = b_2 \cdot \dot{x} + k \cdot x$$

Entrada fornecida: $x(t)$

Saída a ser calculada: $y(t)$





Na massa m: $F_i = F_{k1} + F_{b1} - P$

Na barra A: $F_{k2} + F_{b2} = F_{k1} + F_{b1}$

$F_i = m \cdot \ddot{y} \qquad F_{k1} = k_1 \cdot (x - y) \qquad F_{b1} = b_1 \cdot (\dot{x} - \dot{y})$

$P = m \cdot g \qquad F_{k2} = k_2 \cdot (u - x) \qquad F_{b2} = b_2 \cdot (\dot{u} - \dot{x})$

$$m \cdot \ddot{y} = k_1 \cdot (x - y) + b_1 \cdot (\dot{x} - \dot{y})$$

$$k_2 \cdot (u - x) + b_2 \cdot (\dot{u} - \dot{x}) = k_1 \cdot (x - y) + b_1 \cdot (\dot{x} - \dot{y})$$

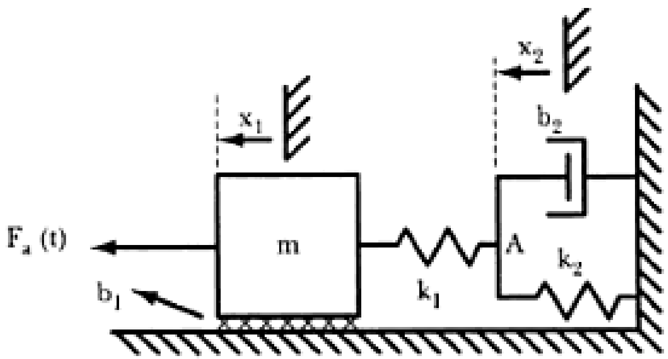
$$m \cdot \ddot{y} + b_1 \cdot \dot{y} + k_1 \cdot y = b_1 \cdot \dot{x} + k_1 \cdot x$$

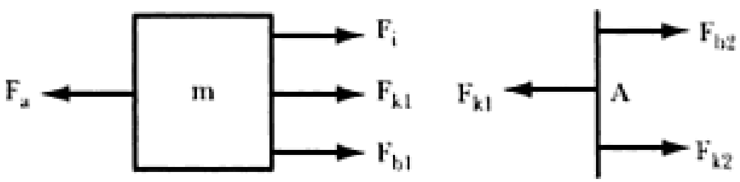
$$b_1 \cdot \dot{y} + k_1 \cdot y - (b_1 + b_2) \cdot \dot{x} - (k_1 + k_2) \cdot x = -b_2 \cdot \dot{u} - k_2 \cdot u$$

Entrada fornecida: $u(t)$

Saídas a serem calculadas: $x(t)$ e $y(t)$

Exemplos de modelagem e sistemas mecânicos translacionais





Na massa m: $F_i = F_a - F_{k1} - F_{b1}$

Na barra A: $F_{k1} = F_{b2} + F_{k2}$

$F_i = m \cdot \ddot{x}_1 \qquad F_{k1} = k_1 \cdot (x_1 - x_2) \qquad F_{b1} = b_1 \cdot \dot{x}_1$

$F_{b2} = b_2 \cdot \dot{x}_2 \qquad F_{k2} = k_2 \cdot x_2$

$m \cdot \ddot{x}_1 = F_a - k_1 \cdot (x_1 - x_2) - b_1 \cdot \dot{x}_1 \qquad k_1 \cdot (x_1 - x_2) = b_2 \cdot \dot{x}_2 + k_2 \cdot x_2$

Na forma padronizada:

$m \cdot \ddot{x}_1 + b_1 \cdot \dot{x}_1 + k_1 \cdot (x_1 - x_2) = F_a \qquad b_2 \cdot \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) \cdot x_2 - k_1 \cdot x_1 = 0$

Entrada fornecida: $F_a(t)$

Saídas a serem calculadas: $x_1(t)$ e $x_2(t)$

Na massa m: $F_i = F_a - F_{k1} - F_{b1}$

Na barra A: $F_{k1} = F_{k2}$

$F_{k2} = k_2 \cdot x_2 \qquad \therefore \; k_1 \cdot (x_1 - x_2) = k_2 \cdot x_2$

$$x_2 = \frac{k_1 \cdot x_1}{k_1 + k_2}$$

$$F_{k1} = k_1 \cdot (x_1 - x_2) = k_1 \cdot \left(x_1 - \frac{k_1 \cdot x_1}{k_1 + k_2} \right) = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} x_1$$

$$k_{EQ} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} x_1$$

$$m \cdot \ddot{x}_1 = F_a - \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} x_1 - b_1 \cdot \dot{x}_1$$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + b_1 \cdot \dot{x}_1 + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} x_1 = F_a$$

Entrada fornecida: $F_a(t)$

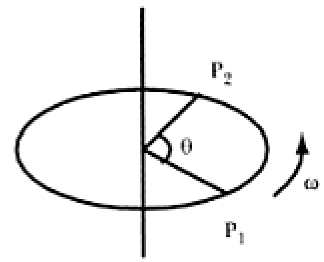
Saída a ser calculada: $x_1(t)$

Sistemas rotacionais

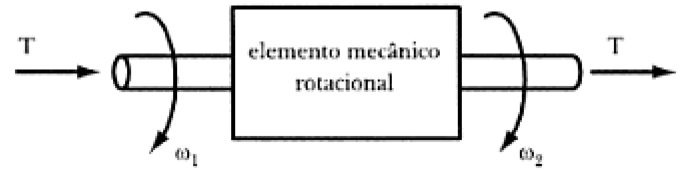
São analisados aqui sistemas em rotação em torno de um eixo fixo.

- Movimento angular;
- Torque;
- Potência;
- Trabalho;
- Energia;

$\omega = \dot{\theta}$



$T = F \cdot d$



$$p = T \cdot \omega$$

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} T(t) \cdot \omega(t)\, dt$$

$$E = \sum W_{ab}$$

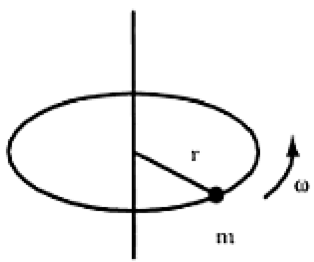
Elementos mecânicos rotacionais

- Massa rotacional;
- Mola torcional;
- Amortecedor rotacional.

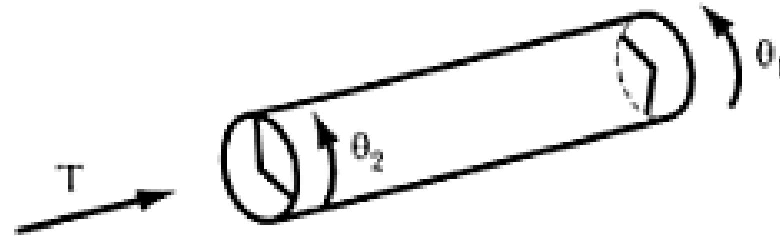
$J = m \cdot r^2$ (para massa puntual) ou $J = \int r^2 dm$ (para massa distribuída)

$h = J \cdot \omega$ e

$T = \dot{h} = J \cdot \dot{\omega}$



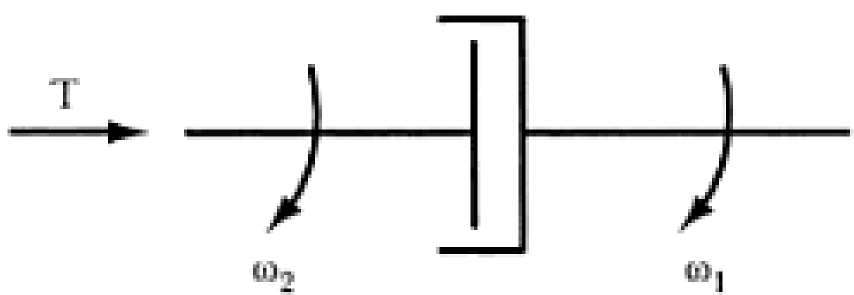
$$E_c = \int_0^{t_b} \omega \, dh = J \cdot \int_0^{t_b} \omega \, d\omega = J \frac{w^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{J}$$



$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$ e $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$

$$T = K \cdot \theta_{21} \quad \text{ou} \quad T = K \cdot \int_0^t \omega_{21}(t) \, dt + T(0)$$

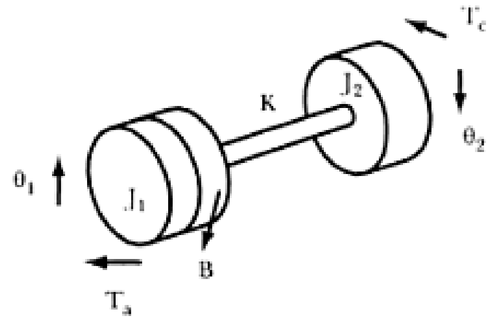
$$E_p = \int_0^{\theta(t_b)} T \, d\theta = K \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{T^2}{K}$$



$T = B \cdot \omega_{21}$

$p = T \cdot \omega_{21} = B \cdot (\omega_{21})^2$

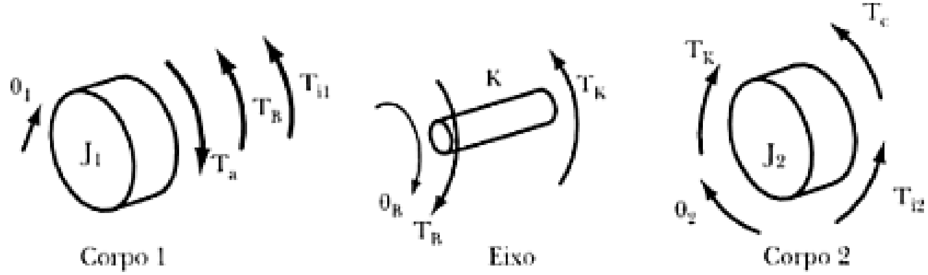
Exemplos de modelagem de sistemas mecânicos rotacionais



No corpo 1: $T_a = T_B + T_{i1}$

No eixo: $T_B = T_K$

No corpo 2: $T_K = T_c + T_{i2}$



$T_B = B \cdot \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_B\right)$ $\quad T_{i1} = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1$

$T_K = K \cdot \left(\theta_B - \theta_2\right)$ $\quad T_{i2} = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2$

$T_a = B \cdot \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_B\right) + J_1 \cdot \ddot{\theta}_1$

$B \cdot \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_B\right) = K \cdot \left(\theta_B - \theta_2\right)$

$K \cdot \left(\theta_B - \theta_2\right) = T_c + J_2 \cdot \ddot{\theta}_2$

Na forma padronizada:

$$J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + B \cdot \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_B\right) = T_a$$

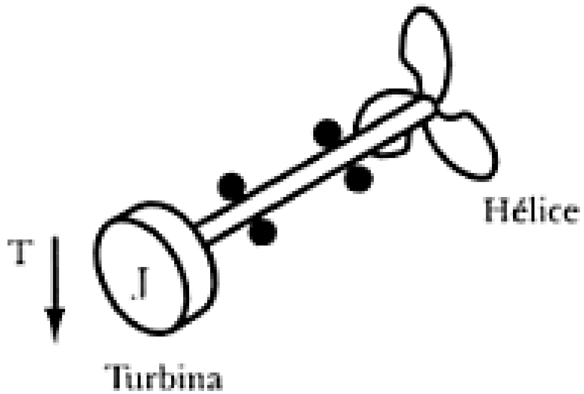
$$B \cdot \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_B\right) + K \cdot \left(\theta_2 - \theta_B\right) = 0$$

$$J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 + K \cdot \left(\theta_2 - \theta_B\right) = -T_c$$

Entradas fornecidas: $T_a(t)$ e $T_c(t)$

Saídas a serem calculadas: $\theta_B(t)$, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$

Exemplos de modelagem de sistemas mecânicos rotacionais



Na turbina: $T = T_J + T_B + T_K$

No eixo: $T_K = T_C$

$T_J = J \cdot \ddot{\theta}_1$ $\quad T_B = B \cdot \dot{\theta}_1$

$T_K = K \cdot (\theta_1 - \theta_2)$ $\quad T_C = C \cdot \dot{\theta}_2^{\,2}$

$$T(t) = J \cdot \ddot{\theta}_1 + B \cdot \dot{\theta}_1 + K \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$

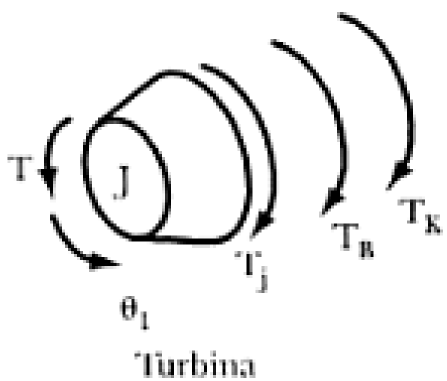
$$K \cdot (\theta_1 - \theta_2) = C \cdot \dot{\theta}_2^{\,2}$$

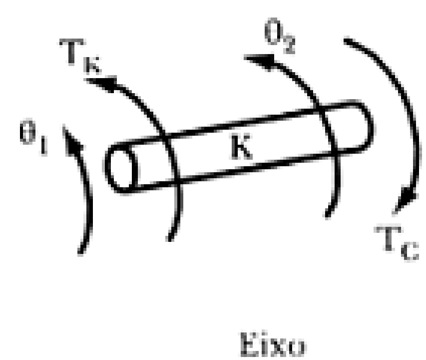
$$J \cdot \ddot{\theta}_1 + B \cdot \dot{\theta}_1 + K \cdot (\theta_1 - \theta_2) = T(t)$$

$$C \cdot \dot{\theta}_2^{\,2} + K \cdot (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

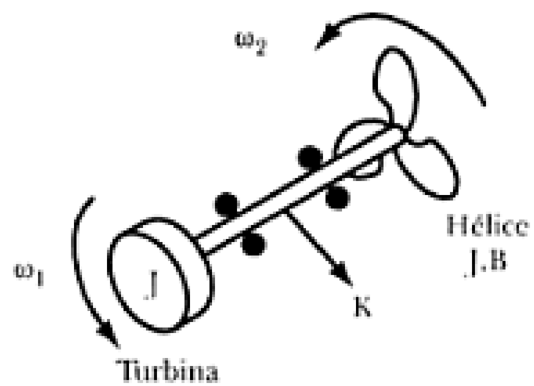
Entrada fornecida: $T(t)$

Saídas a serem calculadas: $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$





Exemplos de modelagem de sistemas mecânicos rotacionais



No eixo: $T_1 = T_C$

Na hélice: $T_C = T_i + T_B$

$$T_1 = K \cdot (\theta_1 - \theta_2) = K \cdot \left(\int_0^t \omega_1 \, dt - \int_0^t \omega_2 \, dt \right)$$

$$T_i = J \cdot \ddot{\theta}_2 \qquad T_B = B \cdot \dot{\theta}_2$$

$$K \cdot (\theta_1 - \theta_2) = T_C$$

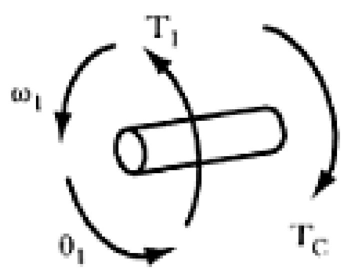
$$T_C = B \cdot \dot{\theta}_2 + J \cdot \ddot{\theta}_2$$

$$K \cdot \theta_2 + T_C = K \cdot \theta_1$$

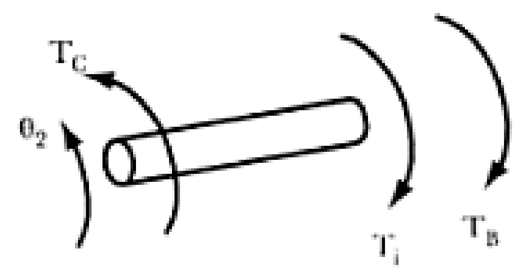
$$J \cdot \ddot{\theta}_2 + B \cdot \dot{\theta}_2 - T_C = 0$$

Entrada fornecida: $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$

Saídas a serem calculadas: $\theta_2(t)$ e $T_C(t)$

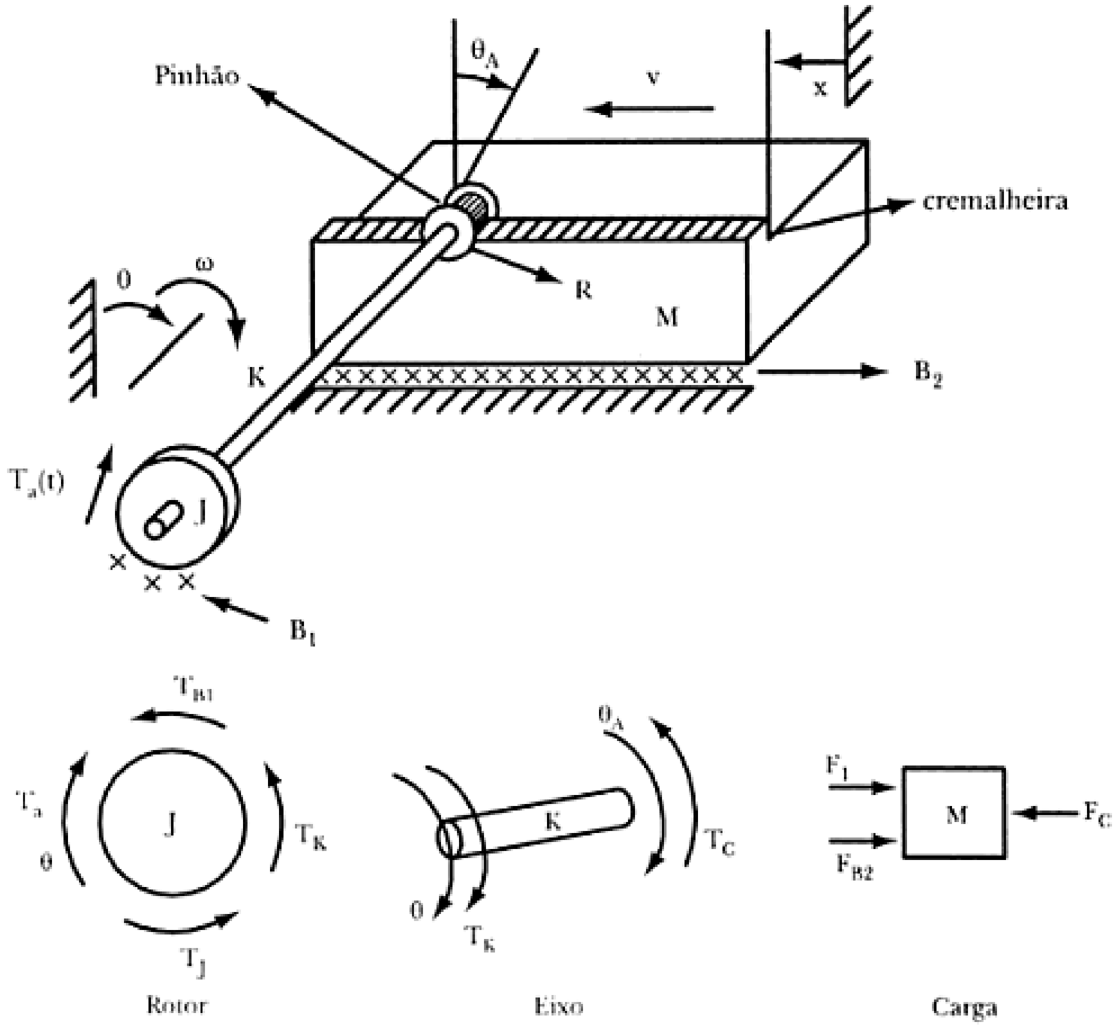


Eixo



Carga (hélice)

Exemplos de modelagem de sistemas mecânicos rotacionais



No rotor: $T_a = T_K + T_{B1} + T_J$

No eixo: $T_K = T_C$

Na carga: $F_C = F_i + F_{B2}$

$T_K = K \cdot (\theta - \theta_A) \qquad T_{B1} = B_1 \cdot \dot{\theta} \qquad T_J = J \cdot \ddot{\theta}$

$T_C = F_C \cdot R \qquad F_i = M \cdot \ddot{x} \qquad F_{B2} = B_2 \cdot \dot{x}$

$\theta_A \cdot R = x \;\rightarrow\; \theta_A = \dfrac{x}{R}$

$T_a = K \cdot \left(\theta - \dfrac{x}{R}\right) + B_1 \cdot \dot{\theta} + J \cdot \ddot{\theta}$

$K \cdot \theta - \dfrac{x}{R} = F_C \cdot R$

$F_C = M \cdot \ddot{x} + B_2 \cdot \dot{x}$

Na forma padronizada:

$$J \cdot \ddot{\theta} + B_1 \cdot \dot{\theta} + K \cdot \left(\theta - \frac{x}{R}\right) = T_a$$

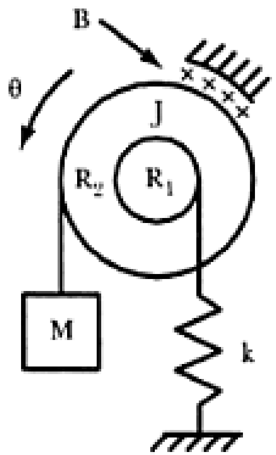
$$K \cdot \theta - \frac{x}{R} - F_C \cdot R = 0$$

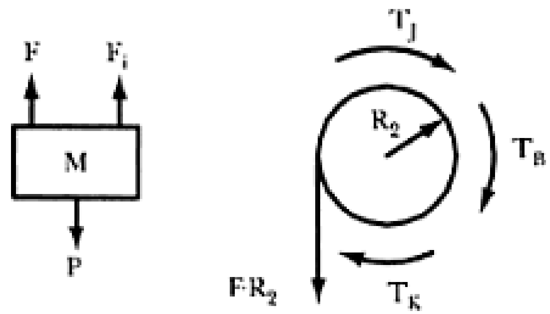
$$M \cdot \ddot{x} + B_2 \cdot \dot{x} - F_C = 0$$

Entrada fornecida: $T_a(t)$

Saídas a serem calculadas: $\theta(t)$, $x(t)$ e $F_C(t)$

Exemplos de modelagem de sistemas mecânicos rotacionais





$F + F_i = P \qquad F \cdot R_2 = T_J + T_B + T_K$

$F_i = M \cdot \ddot{\theta} \cdot R_2 \qquad T_J = J \cdot \ddot{\theta} \qquad T_B = B \cdot \dot{\theta}$

$T_K = K \cdot R_1 \cdot \theta \cdot R_1 \qquad P = M \cdot g$

$F = M \cdot g - M \cdot \ddot{\theta} \cdot R_2$

$F \cdot R_2 = J \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} + K \cdot \theta \cdot R_1^2$

Na forma padronizada:

$M \cdot \ddot{\theta} \cdot R_2 + F = M \cdot g$

$J \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} + K \cdot \theta \cdot R_1^2 - F \cdot R_2 = 0$

$M \cdot g \cdot R_2 = \ddot{\theta} \cdot \left(J + M \cdot R_2^2\right) + B \cdot \dot{\theta} + K \cdot R_1^2 \cdot \theta$

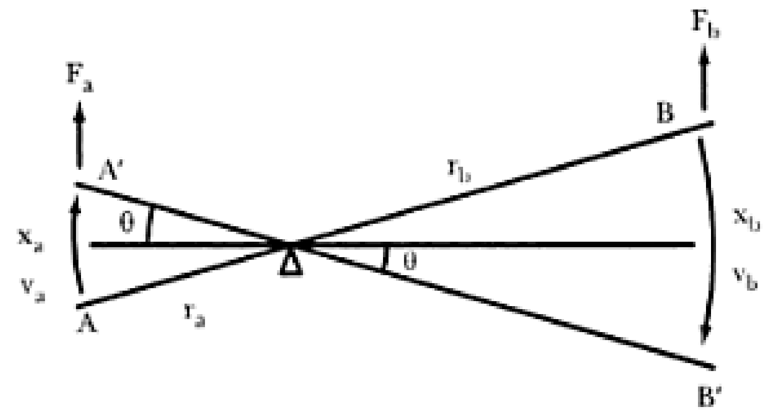
$\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0 \qquad \therefore \qquad \theta = \dfrac{M \cdot g \cdot R_2}{K \cdot R_1^2}$

$\phi = \theta - \dfrac{M \cdot g \cdot R_2}{K \cdot R_1^2} \qquad \ddot{\phi} = \ddot{\theta} \qquad \dot{\phi} = \dot{\theta}$

$\ddot{\phi} \cdot \left(J + M \cdot R_2^2\right) + B \cdot \dot{\phi} + K \cdot R_1^2 \cdot \phi = 0$

Transformadores mecânicos

- São elementos que não dissipam nem armazenam energia (se ideais). São eles:
  - Alavancas; e
  - Engrenagens.



$$\omega = \frac{v_a}{r_a} = -\frac{v_b}{r_b} \qquad \therefore \frac{v_a}{v_b} = -\frac{r_a}{r_b}$$

$$\therefore F_a \cdot r_a \cdot \cos(\theta) - F_b \cdot r_b \cdot \cos(\theta) = F_a \cdot r_a - F_b \cdot r_b = 0$$

$$\therefore \frac{F_a}{F_b} = \frac{r_b}{r_a}$$

$$\frac{F_a}{F_b} = -\frac{v_b}{v_a}$$

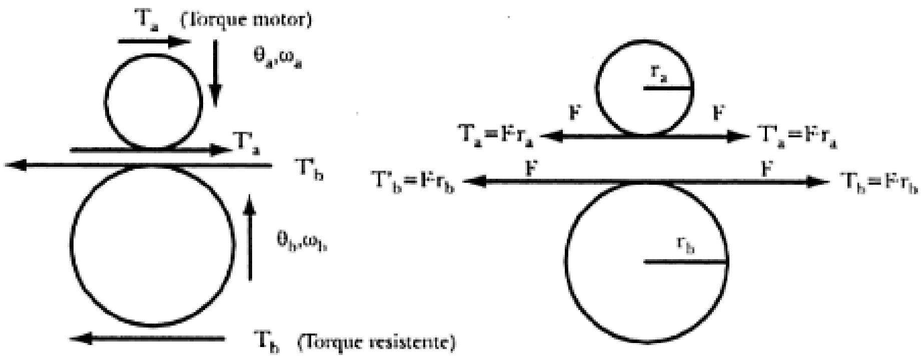
$$p_a = F_a \cdot v_a$$

$$p_b = F_b \cdot v_b$$

$$p_a = -F_b \cdot v_b = -p_b$$

$$p = p_a + p_b = 0$$

Transformadores mecânicos



$\theta_a \cdot r_a = -\theta_b \cdot r_b$ (um dos movimentos é no sentido contrário)

$\frac{\theta_b}{\theta_a} = -\frac{n_a}{n_b} = -\frac{r_a}{r_b} = -\alpha$ = taxa da engrenagem

onde:

n_a = número de dentes da engrenagem A

n_b = número de dentes da engrenagem B

$$\theta_a \cdot r_a = -\theta_b \cdot r_b \rightarrow d\theta_a \cdot r_a = -d\theta_b \cdot r_b \rightarrow \omega_a \cdot r_a = -\omega_b \cdot r_b$$

$$\therefore \frac{\omega_a}{\omega_b} = -\frac{r_b}{r_a} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$T_a = F \cdot r_a \qquad T_b = F \cdot r_b$$

$$F = \frac{T_a}{r_a} = \frac{T_b}{r_b} \rightarrow \frac{T_a}{T_b} = \frac{r_a}{r_b} = \alpha$$

$$\frac{T_a}{T_b} = -\frac{\omega_b}{\omega_a}$$

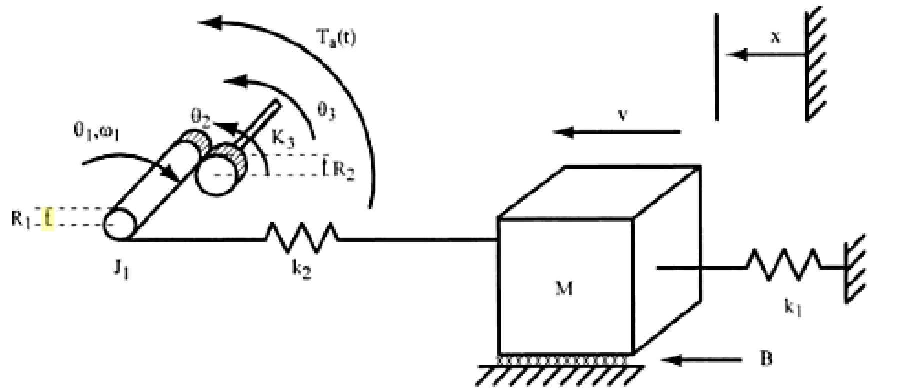
$$p_a = T_a \cdot \omega_a$$

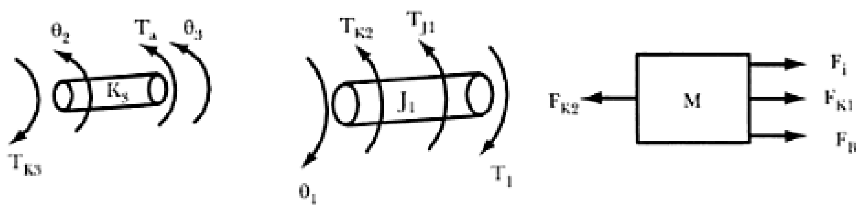
$$p_b = T_b \cdot \omega_b$$

$$p_a = -T_b \cdot \omega_b$$

$$p = p_a + p_b = 0$$

Exemplos de modelagem de sistemas com transformadores mecânicos





Mola torcional   Cilindro de raio R_1 Massa M

$T_a = T_{K3}$ $T_1 = T_{J1} + T_{K2}$ $F_{K2} = F_i + F_{K1} + F_B$

$T_{K3} = K_3 \cdot (\theta_3 - \theta_2)$ $T_{J1} = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1$ $T_{K2} = F_{K2} \cdot R_1$

$F_{K2} = K_2 \cdot (R_1 \cdot \theta_1 - x)$ $F_i = M \cdot \ddot{x}$ $F_{K1} = K_1 \cdot x$ $F_B = B \cdot \dot{x}$

$T_1 = \alpha \cdot T_{K3}$ $\theta_2 = \alpha \cdot \theta_1$ onde $\alpha = R_1 / R_2$

$T_a = K_3 \cdot (\theta_3 - \alpha \cdot \theta_1)$ $\alpha \cdot K_3 (\theta_3 - \alpha \cdot \theta_1) = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + K_2 \cdot (R_1 \cdot \theta_1 - x) \cdot R_1$

$K_2 \cdot (R_1 \cdot \theta_1 - x) = M \cdot \ddot{x} + K_1 \cdot x + B \cdot \dot{x}$

Na forma padronizada:

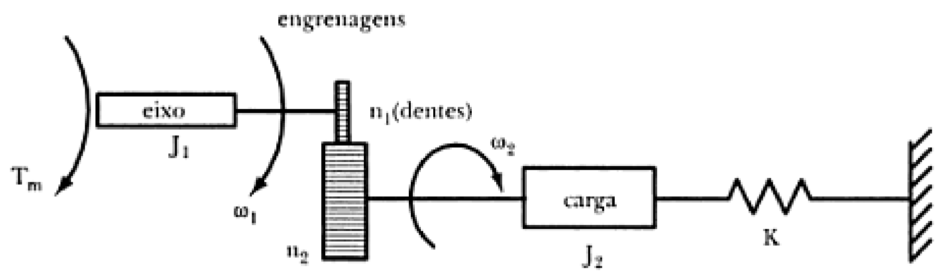
$K_3 \cdot (\theta_3 - \alpha \cdot \theta_1) = T_a$ $J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + (K_2 \cdot R_1^2 + \alpha^2 \cdot K_3) \cdot \theta_1 - \alpha \cdot K_3 \cdot \theta_3 - K_2 \cdot R_1 \cdot x = 0$

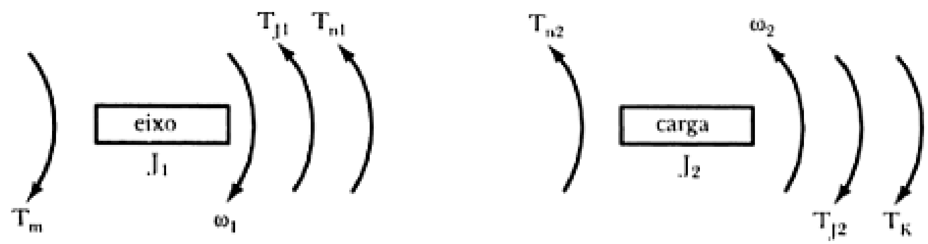
$M \cdot \ddot{x} + B \cdot \dot{x} + (K_1 + K_2) \cdot x - K_2 \cdot R_1 \cdot \theta_1 = 0$

Entrada fornecida: $T_a(t)$

Saídas a serem calculadas: $\theta_3(t)$, $\theta_1(t)$ e $x(t)$

Exemplos de modelagem de sistemas com transformadores mecânicos





No eixo: $T_m = T_{J1} + T_{n1}$

Na carga: $T_{n2} = T_{J2} + T_K$

$T_{J1} = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1$ $\quad T_{J2} = J_2 \cdot \dot{\omega}_2 = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2$ $\quad T_K = K \cdot \theta_2$

$\dfrac{\theta_2}{\theta_1} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_1} = \dfrac{n_1}{n_2} = \alpha$ $\quad T_{n1} = \alpha \cdot T_{n2}$

$T_m(t) = \dfrac{J_1}{\alpha}\ddot{\theta}_2(t) + \alpha \cdot T_{n2}(t)$ $\quad T_{n2}(t) = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2(t) + K \cdot \theta_2(t)$

Na forma padronizada:

$$\frac{J_1}{\alpha}\ddot{\theta}_2(t) + \alpha \cdot T_{n2}(t) = T_m(t)$$

$$J_2 \cdot \ddot{\theta}_2(t) + K \cdot \theta_2(t) - T_{n2}(t) = 0$$

Entrada fornecida: $T_m(t)$

Saídas a serem calculadas: $T_{n2}(t)$ e $\theta_2(t)$

Conclusões

- Com os assuntos estudados nesta aula o engenheiro de controle de processos ou eletricista será capaz de:
  - Conhecer os elementos e propriedades de sistemas mecânicos translacionais, rotacionais e transformadores;
  - Modelar alguns sistemas mecânicos.

Referências

- Claudio Garcia – Modelagem e simulação - 2005 – EDUSP;