Controle de Processos: *Modelagem analítica de sistemas elétricos*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti
& David Fiorillo

Laboratório de Automação e Robótica (LARA)
Dept. Engenharia Elétrica - UnB

Conteúdo

Introdução

- Serão apresentados princípios básicos para gerar modelos de sistemas elétricos, as analogias com sistemas mecânicos, elementos elétricos e transformadores elétricos.

Sistemas elétricos

- Características:
  - Tensão e corrente;
  - Trabalho;
  - Potência elétrica;
  - Energia elétrica;

Tensão = ddp $= V_1 - V_2 = V_{21}$

Corrente = $(i = dq/dt)$

Assim como a força, a corrente também pode ser transmitida $(F \leftrightarrow i)$.

$$dW_{21} = dq \cdot V_{21} \quad \text{ou} \quad \frac{dW_{21}}{dq} = V_{21}$$

$$p = \frac{dW_{21}}{dt} = \frac{dq}{dt}\,\frac{dW_{21}}{dq} = i \cdot V_{21} \qquad p = V \cdot i$$

$$E(t) = \int_0^t p(\tau)\, d\tau = \int_0^t V(\tau) \cdot i(\tau)\, d\tau = W(t)$$

Elementos elétricos

- Os elementos ideais responsáveis pelo armazenamento e dissipação de energia são:
- Capacitor;
- Indutor; e
- Resistor.

$$q = C \cdot V_C$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{dV_C}{dt} \qquad \text{ou} \qquad V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + V_C(0)$$

$$E = \int_0^{t_0} V_C(t)\cdot i(t)\,dt = \int_0^{t_0} V_C(t)\cdot C\,\frac{dV_C}{dt}\,dt = \frac{1}{2}C\cdot V_C{}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$\lambda = L\cdot i \qquad \text{e} \qquad V_L = \frac{d\lambda}{dt} = L\,\frac{di}{dt}$$

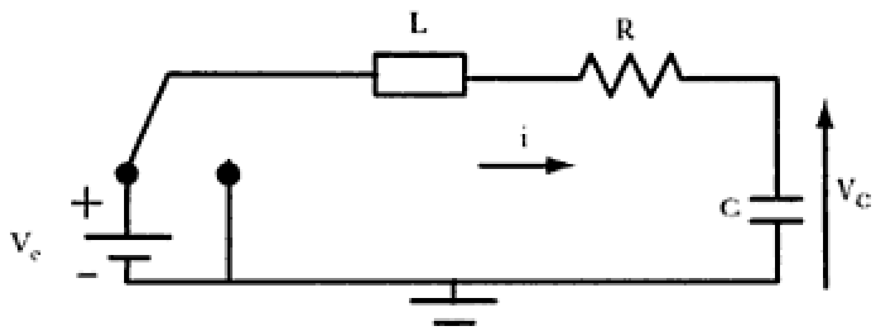
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t)\,dt + i(0)$$

$$E = \int_0^{t_0} V_L(t)\cdot i(t)\,dt = L\cdot\int_0^{t_0}\frac{di}{dt}\,i(t)\,dt = \frac{L\cdot i^2}{2}$$

$$V_R = R\cdot i$$

$$p = V_R\cdot i = R\cdot i^2 = \frac{V_R{}^2}{R}$$

Exemplos de modelagem de sistemas elétricos



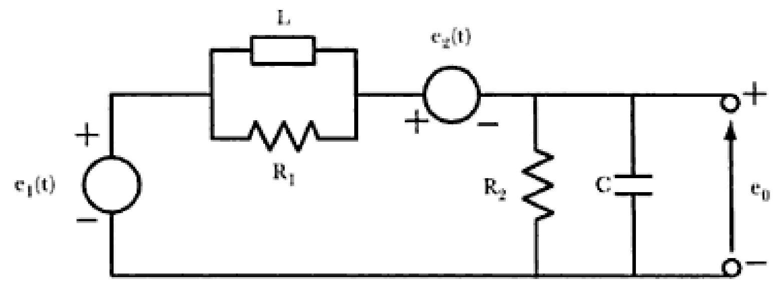
$$V_L + V_R + V_C = 0$$

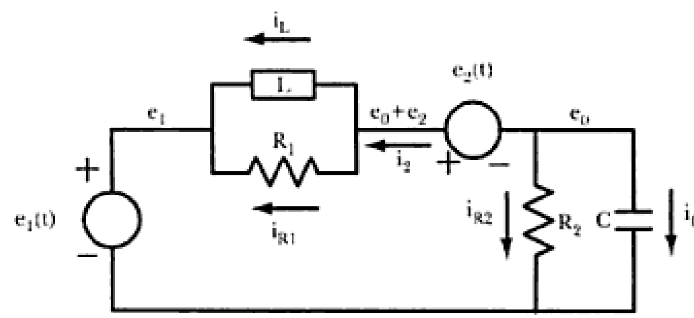
$$V_L = L\,\frac{di}{dt} \qquad V_R = R\cdot i \qquad V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + V_C(0)$$

$$L\,\frac{di}{dt} + R\cdot i + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + V_C(0) = 0$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{C}i \quad \Rightarrow \quad i = C\cdot\dot{V}_C$$

$$L\cdot C\cdot\ddot{V}_C + R\cdot\dot{V}_C + V_C = 0$$





$$i_C + i_{R2} + i_2 = 0 \qquad i_{R1} = \frac{1}{R_1}\cdot(e_0 + e_2 - e_1) \qquad i_{R2} = \frac{e_0}{R_2}$$

$$i_2 = i_{R1} + i_L$$

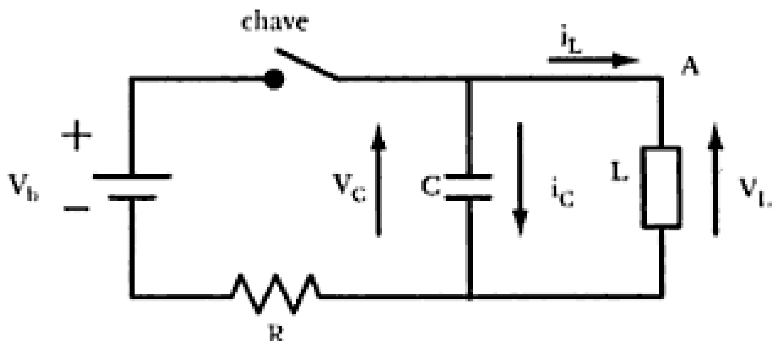
$$i_C + i_{R2} + i_{R1} + i_L = 0$$

$$i_C = C\,\frac{de_0}{dt} \qquad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t (e_0 + e_2 - e_1)dt$$

$$C\,\frac{de_0}{dt} + \frac{e_0}{R_2} + \frac{1}{R_1}(e_0 + e_2 - e_1) + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t (e_0 + e_2 - e_1)\,dt = 0$$

$$C\,\frac{de_0}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cdot e_0 + \frac{1}{L}\int_0^t e_0\,dt = \frac{1}{R_1}(e_1 - e_2) + \frac{1}{L}\int_0^t (e_1 - e_2)\,dt - i_L(0)$$

Exemplos de modelagem de sistemas elétricos



$i_C + i_L = 0$ (equação válida para $t > 0 \rightarrow$ chave aberta)

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_L \, dt + i_{L0} \qquad i_C = C\,\frac{dV_C}{dt}$$

Mas como $V_L = V_C$, resulta:

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_C \, dt + i_{L0}$$

$$C\,\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t V_C \, dt + i_{L0} = 0$$

$$L \cdot C\,\frac{d^2V_C}{dt} + V_C = 0$$

$V_C - V_L = 0$ (equação válida para $t > 0 \rightarrow$ chave aberta)

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C \, dt + V_C(0) \qquad V_L = L\,\frac{di_L}{dt}$$

Mas como $i_C = -i_L$, resulta:

$$V_C = -\frac{1}{C}\int_0^t i_L \, dt + V_C(0)$$

$$L\,\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_L \, dt + V_C(0) = 0$$

$$C \cdot L\,\frac{d^2(i_L)}{dt^2} + i_L = 0$$

Analogias entre sistemas mecânicos e elétricos

- PRIMEIRA ANALOGIA

$\lambda \leftrightarrow x$ (fluxo e deslocamento)

$V \leftrightarrow v$ (tensão e velocidade)

$C \leftrightarrow m$ $\qquad$ $L \leftrightarrow 1/k$

$q \leftrightarrow p$ (carga e momentum)

$i \leftrightarrow F$ (corrente e força)

$R \leftrightarrow 1/b$

- SEGUNDA ANALOGIA

$\lambda \leftrightarrow p$ (fluxo e momentum)

$V \leftrightarrow F$ (tensão e força)

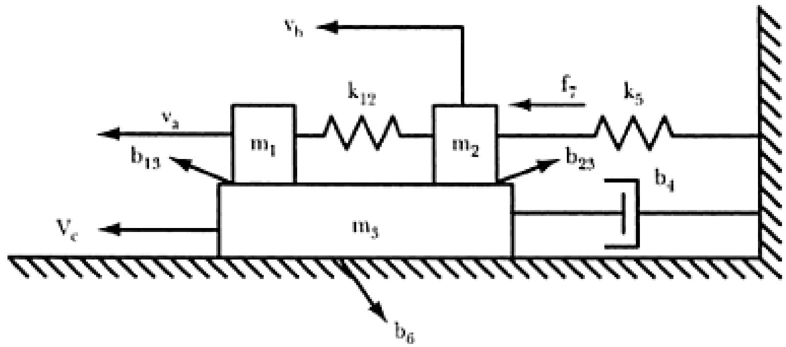
$L \leftrightarrow m$ $\qquad$ $C \leftrightarrow 1/k$

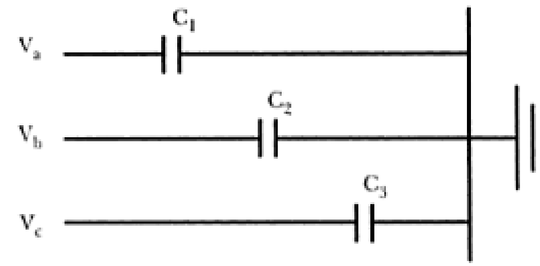
$q \leftrightarrow x$ (carga e deslocamento)

$i \leftrightarrow v$ (corrente e velocidade)

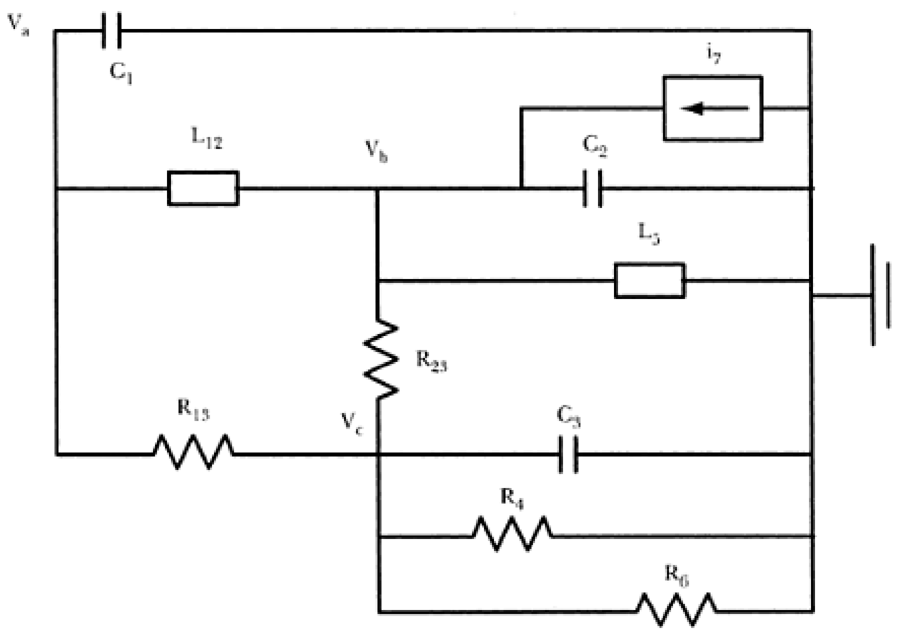
$R \leftrightarrow b$

Procedimento para geração de análogo elétrico mecânico





$(V_a \leftrightarrow v_a\ ;\ V_b \leftrightarrow v_b$ e $V_c \leftrightarrow v_c)$.



- PRIMEIRA ANALOGIA (mola com indutor, $F \leftrightarrow i$)
  - Indutores em série ↔ molas em série:

    $$L_{EQ} = L_1 + L_2 \quad \therefore \quad \frac{1}{k_{EQ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

  - Indutores em paralelo ↔ molas em paralelo:

    $$\frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \therefore \quad k_{EQ} = k_1 + k_2$$

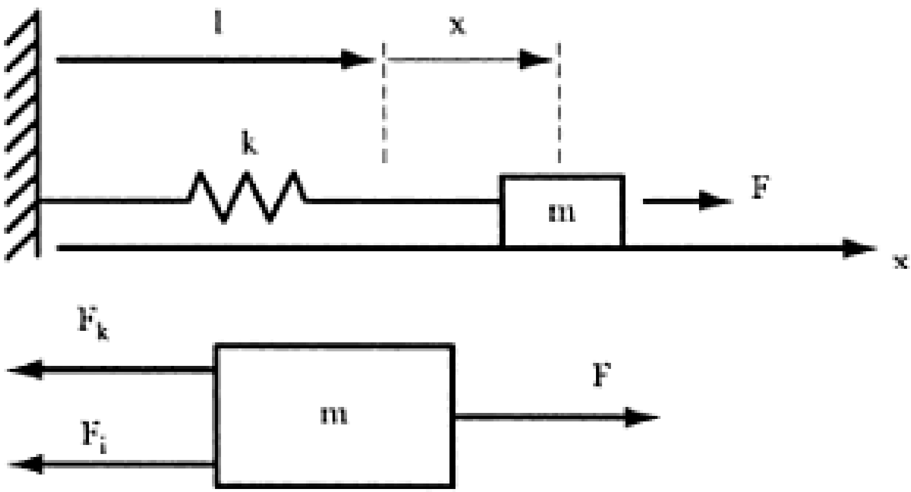
- SEGUNDA ANALOGIA (mola com capacitor, $F \leftrightarrow V$)
  - Molas em série ↔ capacitores em paralelo:

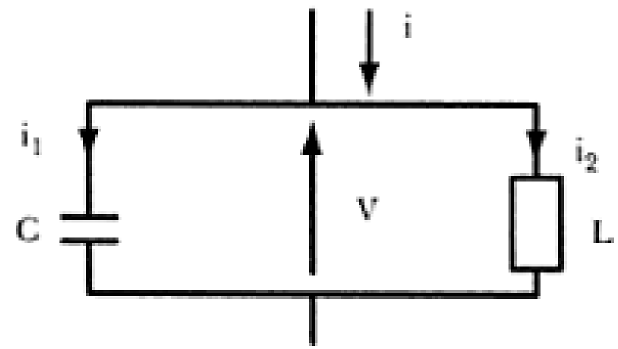
    $$C_{EQ} = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_{EQ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

  - Molas em paralelo (força distribuída) ↔ capacitores em série (tensões distribuí das):

    $$\frac{1}{C_{EQ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad k_{EQ} = k_1 + k_2$$

Procedimento para geração de análogo elétrico mecânico





$$F_i = F - F_k$$

$$F_i = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \qquad F_k = k \cdot x$$

$$m \cdot \ddot{x} = F(t) - k \cdot x$$

Analogias: $C \leftrightarrow m$ $\qquad L \leftrightarrow 1/k$

$i \leftrightarrow F$ $\qquad \lambda \leftrightarrow x$ $\qquad V \leftrightarrow v$

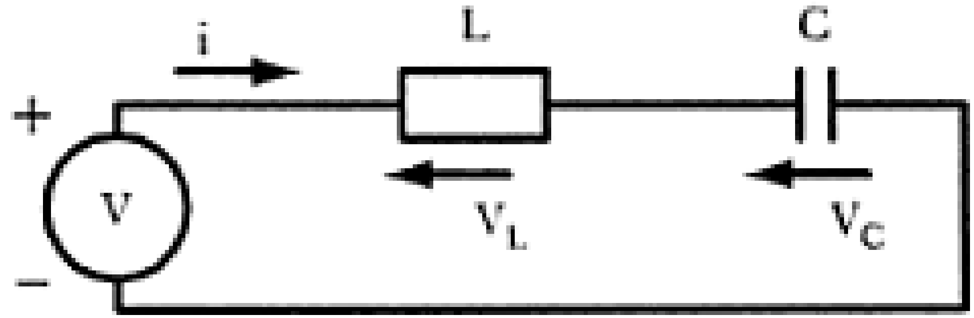
$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = C\,\frac{dV}{dt} \qquad i_2 = \frac{1}{L}\,\lambda$$

$$V = \frac{d\lambda}{dt} \qquad \therefore\ i_1 = C\,\frac{d^2\lambda}{dt^2}$$

$$i(t) = C\,\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{\lambda}{L} \qquad \therefore\ C\,\frac{d^2\lambda}{dt^2} = i(t) - \frac{\lambda}{L}$$

Procedimento para geração de análogo elétrico mecânico



$$V = V_L + V_C \qquad V_L = L\frac{di}{dt} \qquad V_C = \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \therefore \quad V_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

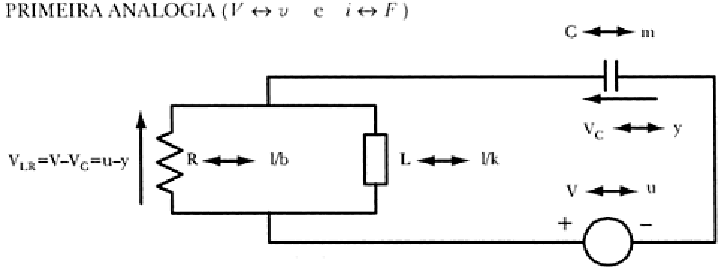
$$V(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \qquad \therefore \quad L\frac{d^2q}{dt^2} = V(t) - \frac{q}{C}$$

Analogias: $L \leftrightarrow m$ $\qquad C \leftrightarrow 1/k$

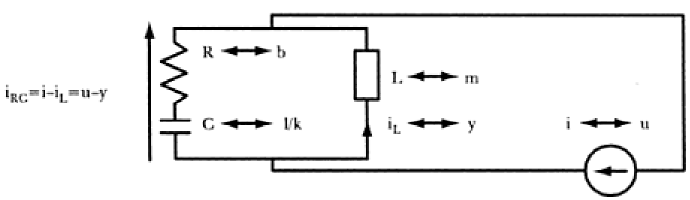
$V \leftrightarrow F$ $\qquad q \leftrightarrow x$ $\qquad i \leftrightarrow v$

Procedimento para geração de análogo elétrico mecânico

- PRIMEIRA ANALOGIA ($V \leftrightarrow v$ e $i \leftrightarrow F$)

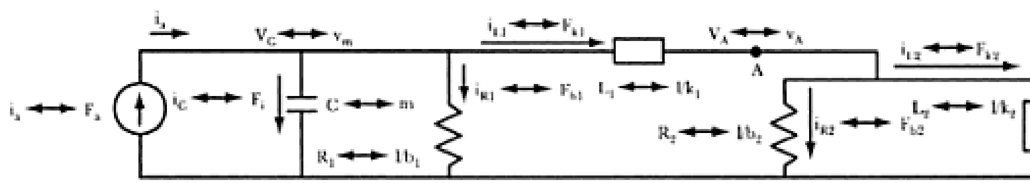


- SEGUNDA ANALOGIA ($V \leftrightarrow F$ e $i \leftrightarrow v$)



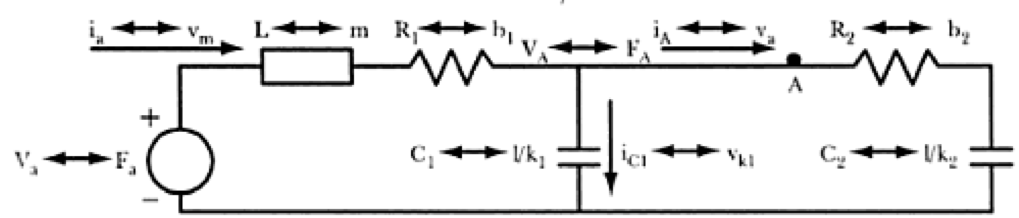
- PRIMEIRA ANALOGIA

$V \leftrightarrow v$ $\quad i \leftrightarrow F$ $\quad C \leftrightarrow m$ $\quad L \leftrightarrow 1/k$ $\quad R \leftrightarrow 1/b$

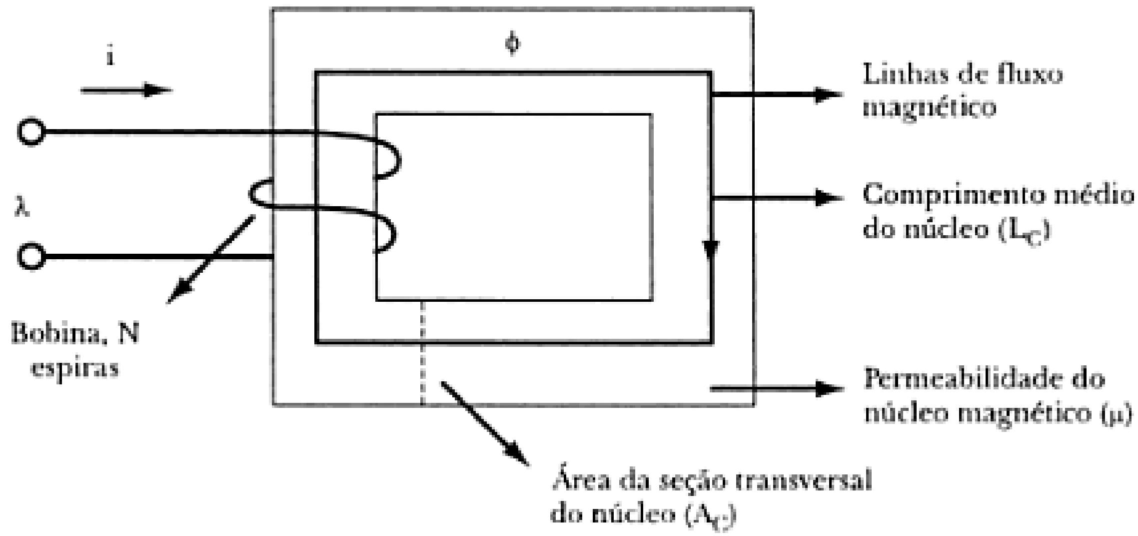


- SEGUNDA ANALOGIA

$V \leftrightarrow F$ $\quad i \leftrightarrow v$ $\quad L \leftrightarrow m$ $\quad C \leftrightarrow 1/k$ $\quad R \leftrightarrow b$



Introdução a circuitos magnéticos



$\Im = N \cdot i = H_C \cdot L_C$

$B = \mu \cdot H$

onde:

B é dado em $\mathrm{Wb/m^2}$ ou Tesla (T)

μ é a permeabilidade dada em Wb/(Ampère-espira·m) ou Henry/m

H é dado em Ampère-espira/m

$\phi_C = B_C \cdot A_C$

onde:

ϕ_C = fluxo magnético no núcleo (Wb)

B_C = densidade de fluxo no núcleo $\left(\mathrm{Wb/m^2}\right)$

A_C = área da seção transversal ao núcleo $\left(\mathrm{m^2}\right)$

$$e = -N\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt}$$

onde:

e = tensão induzida ou f.e.m. (V)

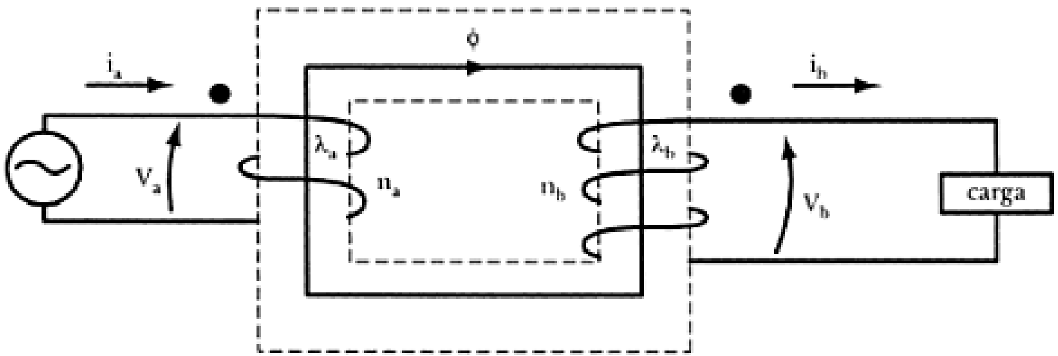
N = número de espiras na bobina

ϕ = valor instantâneo do fluxo magnético no núcleo (Wb)

λ = fluxo magnético concatenado ($\lambda = N \cdot \phi$) (Wb-espiras)

$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N \cdot \phi}{i}$ (Henry ou Wb-espira/Ampère)

Transformadores elétricos



para $\alpha = n_a / n_b$:

- elétrico: $V_a / V_b = \alpha \quad i_a / i_b = 1/\alpha$

$Z_a / Z_b = \alpha^2 \qquad P_a = P_b$

onde $Z(s) = f[R, s \cdot L, 1/(s \cdot C)]$

- mecânico: $T_a / T_b = \alpha \quad \omega_a / \omega_b = 1/\alpha$

$Z_a / Z_b = \alpha^2 \qquad P_a = P_b$

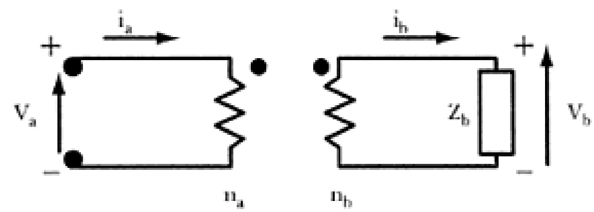
onde $Z(s) = f[b, s \cdot m, 1/(s \cdot k)]$

onde:

n_a = número de espiras do primário

n_b = número de espiras do secundário

ϕ = fluxo magnético no núcleo de ferro



$V_a = E_a = -n_a \dfrac{d\phi}{dt} = -\dfrac{d\lambda_a}{dt}$

onde $\lambda_a = n_a \cdot \phi$

$V_b = E_b = -n_b \dfrac{d\phi}{dt} = -\dfrac{d\lambda_b}{dt}$

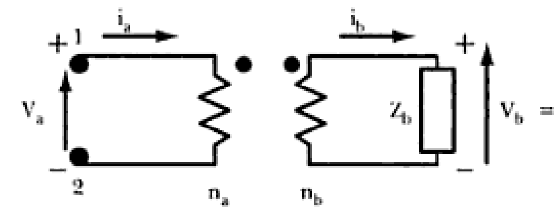
onde $\lambda_b = n_b \cdot \phi$

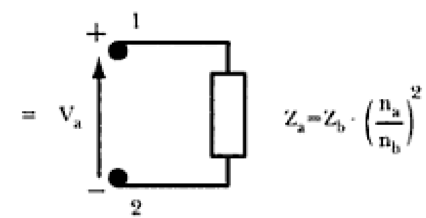
$\therefore \dfrac{V_a}{V_b} = -\dfrac{n_a}{n_b}$ (pois as tensões se opõem)

$n_a \cdot i_a = -n_b \cdot i_b \quad \therefore \dfrac{i_a}{i_b} = -\dfrac{n_b}{n_a}$

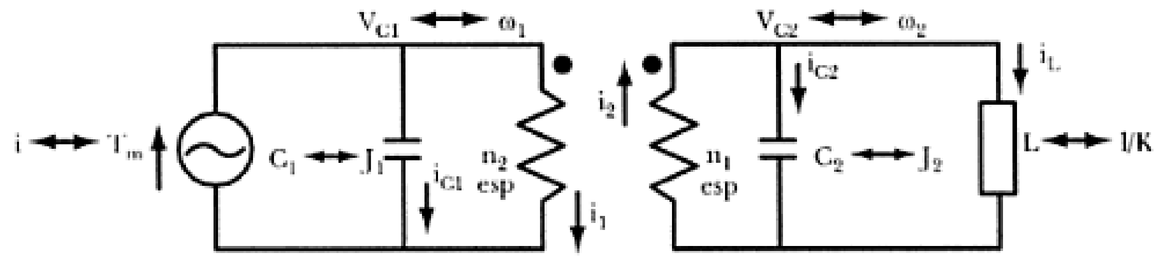
$\dfrac{V_a}{V_b} = \dfrac{i_b}{i_a} = -\dfrac{n_a}{n_b} \quad \therefore V_a \cdot i_a = V_b \cdot i_b \quad \Rightarrow \quad p_a = p_b$

$\dfrac{V_a}{i_a} = \left(\dfrac{n_a}{n_b}\right)^2 \dfrac{V_b}{i_b} = \left(\dfrac{n_a}{n_b}\right)^2 \cdot Z_b \qquad Z_a = \left(\dfrac{n_a}{n_b}\right)^2 \cdot Z_b$





Exemplo de modelagem de sistema com transformador elétrico



$i = i_{C1} + i_1$ $\quad$ $i_{C1} = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}$

$i_2 = i_{C2} + i_L$ $\quad$ $i_{C2} = C_2 \frac{dV_{C2}}{dt}$

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_{C2}(\tau)\, d\tau + i_{L,0}$$

Supondo-se $i_{L,0} = 0$, tem-se:

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_{C2}(\tau)\, d\tau$$

$$\frac{V_{C1}}{V_{C2}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\alpha} \quad \therefore \quad \alpha \cdot V_{C1} = V_{C2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} = \alpha \quad \therefore \quad i_1 = \alpha \cdot i_2$$

$$i = C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} + i_1$$

$$i_2 = C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t V_{C2}(\tau)\, d\tau$$

$$i = \frac{C_1}{\alpha}\frac{dV_{C2}}{dt} + \alpha \cdot i_2$$

$i \leftrightarrow T_m$ $\quad$ $V_{C2} \leftrightarrow \omega_2$ $\quad$ $C_1 \leftrightarrow J_1$

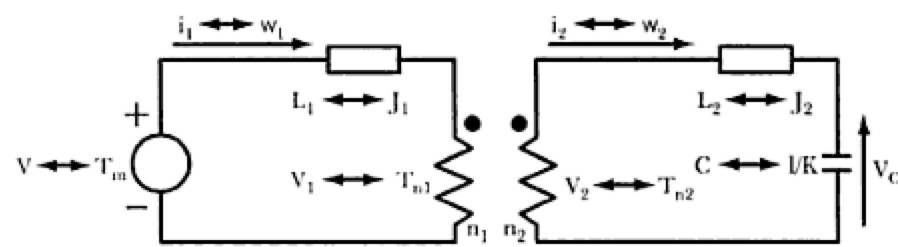
$C_2 \leftrightarrow J_2$ $\quad$ $L \leftrightarrow 1/K$ $\quad$ $i_2 \leftrightarrow T_{n2}$

$$T_m(t) = \frac{J_1}{\alpha}\,\dot{\omega}_2 + \alpha \cdot T_{n2}(t) = \frac{J_1}{\alpha}\,\ddot{\theta}_2(t) + \alpha \cdot T_{n2}(t)$$

$$T_{n2}(t) = J_2 \cdot \dot{\omega}_2(t) + K \cdot \int_0^t \omega_2(\tau)\, d\tau$$

$$\int_0^t \omega_2(t)\, dt = \theta_2(t)$$

$$T_{n2}(t) = J_2 \cdot \dot{\omega}_2(t) + K \cdot \theta_2(t) = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2(t) + K \cdot \theta_2(t)$$



Conclusões

- Com os assuntos estudados nesta aula o engenheiro de controle de processos ou eletricista será capaz de:
  - Conhecer os elementos e propriedades de sistemas elétricos, Analogias entre sistemas mecânicos e elétricos, e transformadores;
  - Modelar alguns sistemas elétricos.

Referências

- Claudio Garcia – Modelagem e simulação - 2005 – EDUSP;