107484 – Controle de Processos

Aula: graus de liberdade, variáveis de desvio e linearização

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

1^o Semestre 2015

Sumário

Análise de graus de liberdade

- Os graus de liberdade de um processo são as variáveis independentes que devem ser especificadas para definir o processo completamente (resposta do conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema).

- O controle do processo nos pontos fixos especificados só é obtido se, e somente se, todos os graus de liberdade tiverem sido especificados.

Graus de liberdade

$$\boxed{\text{graus de liberdade}} = \boxed{\text{no. vars. independentes}} - \boxed{\text{no. eqs. independentes}}$$

$$f = V - E$$

Casos

1. $f = 0$: processo exatamente especificado
2. $f > 0$: processo sub-especificado (infinitas soluções)
3. $f < 0$: processo super-especificado (sem solução)

Análise de graus de liberdade

Observações:

- Determinação incorreta se informações relevantes forem desprezadas ou equações redundantes incluída.
- Lei de controle introduz equação adicional entre as variáveis medidas e manipuladas e reduz por 1 os graus de liberdade do processo.

Manipulação dos graus de liberdade

Em geral $f > 0$. Há duas formas de se diminuir f (aumentar E):

1. Ambiente externo (variáveis de distúrbio): $d(t) = f(t)$

$$f = f_0 - N_d$$

2. Objetivos (leis) de controle (variáveis manipuladas): $mv(t) = f(y_i)$

$$f = f_0 - N_{mv}$$

- Graus de liberdade de controle (f_c): variáveis que podem ser controladas de forma independente $\rightsquigarrow$ $f_c = f - N_d$.
- Usualmente, mas não sempre, $f_c = N_{mv}$

Sumário

Variáveis de desvio

- Interesse no estudo da resposta de processos e seus sistemas às variáveis de entrada (distúrbios e variáveis manipuladas) $\rightsquigarrow$ eliminação do efeito das condições iniciais sobre as respostas

Procedimento para definir as variáveis de desvio

1. Dadas as variáveis de entrada, supor que as condições iniciais $y(0)$ estão em estado estacionário
$$\frac{dy(0)}{dt} = 0$$
2. Substituir a variável de saída y por seu desvio do valor inicial
$$\tilde{y}(t) = y(t) - y(0)$$

   Portanto,
$$\frac{d^n\tilde{y}(t)}{dt^n} = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Variáveis de desvio

- Considere a equação linear diferencial de n-ésima ordem:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_n u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_0 u + c \qquad (1)$$

em que $n > m$, $y(t)$ é a variável de saída, $u(t)$ é a variável de entrada e c uma constante.

- Em estado estacionário

$$a_0 y(0) = b_0 u(0) + c \qquad (2)$$

- Subtraindo (2) de (1),

$$a_n \tilde{y}^{(n)} + a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \ldots + a_0 \tilde{y} = b_n \tilde{u}^{(m)} + b_{m-1} \tilde{u}^{(m-1)} + \ldots + b_0 \tilde{u} \qquad (3)$$

em que $\tilde{y}(t) = y(t) - y(0)$ e $\tilde{u}(t) = u(t) - u(0)$.

- Portanto, é possível reescrever (3) na forma de função de transferência (condição inicial nula),

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \, U(s) \qquad (4)$$

Sumário

Linearização de sistemas multivariáveis

- Seja o sistema não-linear

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)). \tag{5}$$

- Deseja-se linearizar (5) em torno do ponto de operação em regime permanente $s = (x(0), y(0), z(0)) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Em estado estacionário

$$f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0. \tag{6}$$

- Linearizando em torno de s, ou seja, expandindo (5) em série de Taylor e desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) \simeq f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \; &+ \\ + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_s (x(t) - \overline{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_s (y(t) - \overline{y}) &+ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_s (z(t) - \overline{z}).\end{aligned} \tag{7}$$

Linearização de sistemas multivariáveis

- Definindo as variáveis de desvio

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \overline{x}, \qquad \tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \overline{y}, \qquad \tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \overline{z} \tag{8}$$

e subtraindo (7) por (6), obtém-se

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = c_x\tilde{x}(t) + c_y\tilde{y}(t) + c_z\tilde{z}(t), \tag{9}$$

em que

$$c_x \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_s, \qquad c_y \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_s, \qquad c_z \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_s \qquad \text{e}$$

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{d(x(t) - \overline{x})}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}.$$

- Portanto aplicando a Transformada de Laplace em (9)

$$s\tilde{X}(s) - c_x\tilde{X}(s) = c_y\tilde{Y}(s) + c_z\tilde{Z}(s), \tag{10}$$

pode-se obter as funções de transferência relacionando a variável $x(t)$ com $y(t)$ e $z(t)$,

$$\tilde{X}(s) = \frac{c_y/c_x}{\frac{1}{c_x}s - 1}\tilde{Y}(s) + \frac{c_z/c_x}{\frac{1}{c_x}s - 1}\tilde{Z}(s). \tag{11}$$

Observação I

- A partir de (5), pode-se escrever

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), \tag{12}$$

e portanto

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\overline{x}}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}). \tag{13}$$

- Definindo

$$\tilde{f}(x(t), y(t), z(t)) \triangleq f(x(t), y(t), z(t)) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), \tag{14}$$

e $s = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, de Taylor tem-se

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{f}(x(t), y(t), z(t)) \simeq \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right|_s \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right|_s \tilde{y}(t) + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right|_s \tilde{z}(t). \tag{15}$$

Observação II

- É possível fazer a subtração da equação em regime transiente pela de regime permanente antes de linearização.
- Defina $g(x, y, z)$ como o sistema após a subtração

$$g(x, y, z) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \qquad (16)$$

e aplicando a expansão em série de Taylor em $g(x(t), y(t), z(t))$, tem-se

$$\begin{aligned} g(x(t), y(t), z(t)) &\simeq g(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_s (x(t) - \overline{x}) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_s (y(t) - \overline{y}) + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_s (z(t) - \overline{z}) \\ &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_s \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_s \tilde{y}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_s \tilde{z}(t) \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_s \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_s \tilde{y}(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_s \tilde{z}(t), \end{aligned}$$

e portanto (9) é obtido.

Observação III

- Um ponto importante é que linearizar um produto de funções que esta sendo derivado poderá fornecer resultados diferentes em relação à aplicação da regra da cadeia.

- Como exemplo, seja $g(h(t), T(t)) = h(t)T(t)$. Linearizando g em torno de $\overline{h}$ e $\overline{T}$ tem-se

$$g(h(t), T(t)) \triangleq \overline{h}\ \overline{T} + \overline{T}\tilde{h}(t) + \overline{h}\tilde{T}(t)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}g(h(t), T(t)) = \overline{T}\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + \overline{h}\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} \tag{17}$$

difere do resultado aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}h(t)T(t) = T(t)\frac{dh(t)}{dt} + h(t)\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + h(t)\frac{d\tilde{T}(t)}{dt}. \tag{18}$$

Regra geral para o procedimento de linearização

1. Se houver a derivada do produto de funções aplique a regra da cadeia e verifique se é possível substituir um dos termos por outra equação proveniente de um balanço de massa ou energia;
2. Manipule a equação diferencial de forma a deixá-la como em (5), isolando no lado esquerdo somente a derivada;
3. Faça a análise de estado estacionário para determinar ponto de operação;
4. Aplique a expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação, derivando as variáveis dependentes do tempo e desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2;
5. Subtraía da equação em regime permanente, resultando em (9);
6. Defina as variáveis de desvio;
7. Aplique a transformada de Laplace e obtenha as funções de transferência do sistema em termos das variáveis de desvio.