Universidade de Brasília
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

107484 – Controle de Processos

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Seja o sistema não-linear

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)). \tag{1}$$

Deseja-se linearizar (1) em torno do ponto de operação em regime permanente $s = (x(0), y(0), z(0)) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Em estado estacionário

$$f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0. \tag{2}$$

Linearizando em torno de s, ou seja, expandindo (1) em série de Taylor e desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois, tem-se

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) \simeq f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_s (x(t) - \overline{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_s (y(t) - \overline{y}) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_s (z(t) - \overline{z}). \tag{3}$$

Definindo as variáveis de desvio

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \overline{x}, \qquad \tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \overline{y}, \qquad \tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \overline{z} \tag{4}$$

e subtraindo (3) por (2), obtém-se

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = c_x \tilde{x}(t) + c_y \tilde{y}(t) + c_z \tilde{z}(t), \tag{5}$$

em que

$$c_x \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_s, \qquad c_y \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_s, \qquad c_z \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_s \qquad \text{e} \qquad \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{d(x(t) - \overline{x})}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Portanto aplicando a Transformada de Laplace em (5)

$$s\tilde{X}(s) - c_x \tilde{X}(s) = c_y \tilde{Y}(s) + c_z \tilde{Z}(s), \tag{6}$$

pode-se obter as funções de transferência relacionando a variável $x(t)$ com $y(t)$ e $z(t)$,

$$\tilde{X}(s) = \frac{c_y/c_x}{\frac{1}{c_x}s - 1}\tilde{Y}(s) + \frac{c_z/c_x}{\frac{1}{c_x}s - 1}\tilde{Z}(s). \tag{7}$$

1 Observação

A partir de (1), pode-se escrever

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), \tag{8}$$

e portanto

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\overline{x}}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}). \tag{9}$$

Definindo

$$\tilde{f}(x(t), y(t), z(t)) \triangleq f(x(t), y(t), z(t)) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), \tag{10}$$

e $s = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, de Taylor tem-se

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{f}(x(t), y(t), z(t)) \simeq \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right|_s \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right|_s \tilde{y}(t) + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right|_s \tilde{z}(t). \tag{11}$$

2 Observação

É possível fazer a subtração da equação em regime transiente pela de regime permanente antes de linearização. Defina $g(x, y, z)$ como o sistema após a subtração

$$g(x, y, z) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \tag{12}$$

e aplicando a expansão em série de Taylor em $g(x(t), y(t), z(t))$, tem-se

$$\begin{aligned} g(x(t), y(t), z(t)) &\simeq g(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_s (x(t) - \overline{x}) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_s (y(t) - \overline{y}) + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_s (z(t) - \overline{z}) \\ &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_s \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_s \tilde{y}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_s \tilde{z}(t) \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_s \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_s \tilde{y}(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_s \tilde{z}(t), \end{aligned}$$

e portanto (5) é obtido.

3 Observação

Um ponto importante é que linearizar um produto de funções que esta sendo derivado poderá fornecer resultados diferentes em relação à aplicação da regra da cadeia.

Como exemplo, seja $g(h(t), T(t)) = h(t)T(t)$. Linearizando g em torno de $\overline{h}$ e $\overline{T}$ tem-se

$$g(h(t), T(t)) \triangleq \overline{h}\ \overline{T} + \overline{T}\tilde{h}(t) + \overline{h}\tilde{T}(t)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} g(h(t), T(t)) = \overline{T}\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + \overline{h}\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} \tag{13}$$

difere do resultado aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt} h(t)T(t) = T(t)\frac{dh(t)}{dt} + h(t)\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + h(t)\frac{d\tilde{T}(t)}{dt}. \tag{14}$$

4 Regra geral para o procedimento de linearização

1. Se houver a derivada do produto de funções aplique a regra da cadeia e verifique se é possível substituir um dos termos por outra equação proveniente de um balanço de massa ou energia;
2. Manipule a equação diferencial de forma a deixá-la como em (1), isolando no lado esquerdo somente a derivada;
3. Aplique a expansão em série de Taylor, derivando as variáveis dependentes do tempo e desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2;
4. Subtraía da equação em regime permanente, resultando em (5);
5. Defina as variáveis de desvio;
6. Aplique a transformada de Laplace e obtenha as funções de transferência do sistema em termos das variáveis de desvio.