107484 – Controle de Processos

Aula: Função de Transferência

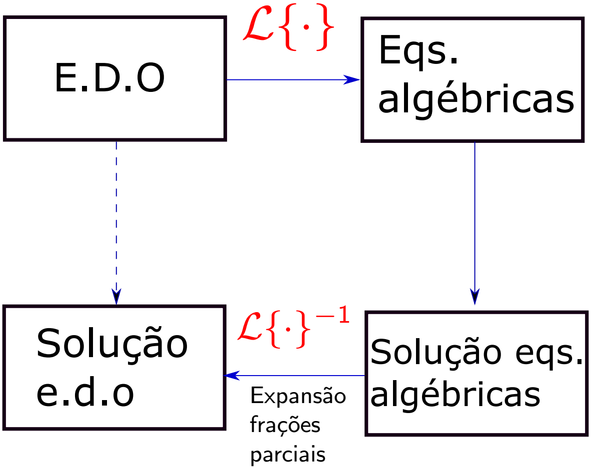
Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

1^o Semestre 2020

Sumário

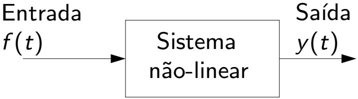
Motivação



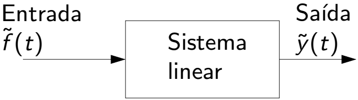
$\mathcal{L}\{\cdot\}$ $\rightsquigarrow$ operador da Transformada de Laplace.

Função de Transferência

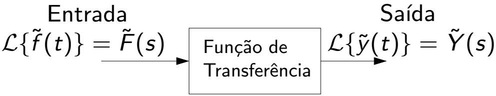
- Seja um sistema não-linear contínuo e invariante no tempo



- Um correspondente sistema linear invariante no tempo (SLIT) em torno de um ponto de operação (equilíbrio) pode ser expresso em termos de suas variáveis de desvio[1]



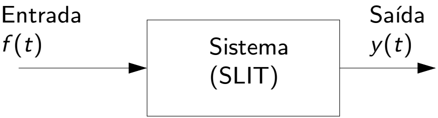
- O sistema pode ser analisado pela sua função de transferência (FT) se as condições iniciais são nulas $\rightsquigarrow$ relação algébrica entre a transf. de Laplace (operador $\mathcal{L}\{\cdot\}$) da entrada e da saída



[1] Análise de estabilidade válida se a matriz Jacobiana não tem nenhum autovalor no eixo imaginário [Khalil, 2002].

Função de Transferência

Seja um sistema linear invariante no tempo (SLIT)



- Se o sistema linear é obtido a partir da linearização de dinâmica não linear então entrada $f(t)$ e saída $y(t)$ são expressas em termos de variáveis de desvio.

Função de transferência do sistema

Relação da transformada de Laplace da saída $y(t)$ pela transformada de Laplace da entrada $f(t)$, para condições iniciais nulas, ou seja,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

em que s é uma variável no plano complexo, $s = \sigma + j\omega$.

Função de Transferência

Relembrando

Transformada de Laplace unilateral $F(s)$ de uma função $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$\rightarrow$ Classe de funções: $f(t) = 0,\ t < 0$

Observações:

1. $\mathcal{L}\{f(t)\}$ definida quando a integral é limitada
   Ex.: $f(t) = e^{at} \rightarrow$ raio de convergência $a - s < 0$ ou $s > a$
2. $\mathcal{L}\{\cdot\}$ é um operador linear $\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s)$

Degrau unitário

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1/\Delta)t, & 0 < t \leq \Delta \\ 1, & t > \Delta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad u(t) = \lim_{\Delta \to 0^+} u_\Delta(t) = \begin{cases} u(t) = 0, & t \leq 0 \\ u(t) = 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$u(0) = 0, \qquad u(0^+) = \lim_{t \to 0^+} u(t) = 1$$

- Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Para uma dada contante A, tem-se

$$\mathcal{L}\{Au(t)\} = A\,\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{A}{s}$$

Impulso unitário (Delta de Dirac)

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1/\Delta, & 0 < t \leq \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0^+} \delta_\Delta(t) \qquad \Rightarrow \qquad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Como consequência

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta) d\beta$$

O impulso ocorre em 0^+ e $\delta(0) = 0$

- Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad \text{pois} \quad \delta(t) f(t) = \delta(t) f(0) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Função exponencial

$$f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0$$

ou

$$f(t) = e^{-at}u(t), \quad \forall t, \quad u(t) \text{ sinal degrau unitário}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

pois

$$\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Obs.: Para $f(t) = e^{at}u(t)$, $\mathcal{L}\{e^{at}\}$ existe somente se $a - s < 0$ ou $s > a$ (indefinida para $s < a$).

Convolução

- Para uma função $\Phi(t)$ contínua em $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\delta(t)dt = \Phi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \Phi(0) \qquad \text{pois } \Phi(t)\delta(t) = \Phi(0)\delta(t)$$

- Deslocando $\delta(t)$ em T:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\delta(t-T)dt = \Phi(T) \qquad \text{(Propriedade da Amostragem)}$$

Logo,

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \Phi(t) * \delta(t)$$

$$\Phi(t) * \delta(t) = \Phi(t), \qquad \Phi(t) * \delta(t-T) = \Phi(t-T)$$

Definição de convolução no tempo contínuo

$$f(t) * g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

Sumário

Propriedades da Transformada de Laplace

- $\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$

Ex.: SLIT

$$y(t) = g(t) * f(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = G(s)F(s)$$

- Linearidade:

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s)$$

com a e b constantes.

- Derivadas:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st}) dt \qquad \text{(int. por partes)}\end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Similarmente,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0) - \left.\frac{df}{dt}\right|_0$$

Para condições iniciais nulas, tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s)$$

- Integração:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

- Deslocamento no tempo:

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Obs.: Como consideramos $f(\tau) = 0,\ \tau < 0 \Rightarrow m(t) \triangleq f(t - t_0),\ m(t) = 0,\ t < t_0$

- Translação complexa:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

- Teorema do Valor Inicial

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Teorema do Valor Final

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Obs.: Importante verificar se $s = 0$ está dentro do raio de convergência da transformada de Laplace de $f(t)$, ou seja, todas as raízes do denominador de $F(s)$ devem ter parte real negativa, e no máximo uma raíz na origem.

Prova:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Para $s \to 0$

$$\int_0^{\infty} df(t) = \lim_{s \to 0} (sF(s) - f(0))$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0)$$

Sumário

Exemplo: solução de EDO linear

- Seja a equação do balanço de energia do tanque de aquecimento com agitação com fluxo constante

$$\frac{dT(t)}{dt} + aT(t) = \frac{1}{\tau}T_e(t) + KT_v(t) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{\tau} + K \\[2ex] \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{f_e}{V} \\[2ex] K = \dfrac{UA_t}{V\rho c_p} \end{cases}$$

em que $\dot{Q}(t) = UA_t(T_v(t) - T(t))$.

A_t: área de transferência (contato)
U: coeficiente de transferência de calor

- Problema 1: Ache a função de transferência entre a temperatura do tanque T e as temperaturas T_e e T_v
- Problema 2: Ache a expressão de $T(t)$ para um aumento na temperatura da corrente de entrada $T_e(t)$ em 10°C

Exemplo: solução de EDO linear

- Expressando em termos de variáveis de desvio: $\tilde{T}(t) = T(t) - \bar{T}$, $\tilde{T}_e(t) = T_e(t) - \bar{T}_e$, $\tilde{T}_v(t) = T_v(t) - \bar{T}_v$

$$\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} + a\tilde{T}(t) = \frac{1}{\tau}\tilde{T}_e(t) + K\tilde{T}_v(t)$$

- Assumindo que o aquecedor está inicialmente em estado estacionário $T(0) = \bar{T}$, $T_e(0) = \bar{T}_e$ e $T_v(0) = \bar{T}_v$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{T}(0) = \tilde{T}_e(0) = \tilde{T}_v(0) = 0$.

- Aplicando a transformada de Laplace na edo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d\tilde{T}(t)}{dt}\right\} + a\mathcal{L}\{\tilde{T}(t)\} = \frac{1}{\tau}\mathcal{L}\{\tilde{T}_e(t)\} + K\mathcal{L}\{\tilde{T}_v(t)\}$$

$$(s\tilde{T}(s) - \tilde{T}(0)) + a\tilde{T}(s) = \frac{1}{\tau}\tilde{T}_e(s) + K\tilde{T}_v(s)$$

$$\tilde{T}(s)(s+a) = \frac{1}{\tau}\tilde{T}_e(s) + K\tilde{T}_v(s)$$

$$\tilde{T}(s) = \underbrace{\frac{1/\tau}{s+a}}_{G_1(s)}\tilde{T}_e(s) + \underbrace{\frac{K}{s+a}}_{G_2(s)}\tilde{T}_v(s)$$

$\rightsquigarrow$ $G_1(s)$ e $G_2(s)$ são as funções de transferência $G_1(s) = \dfrac{\tilde{T}(s)}{\tilde{T}_e(s)}$ e $G_2(s) = \dfrac{\tilde{T}(s)}{\tilde{T}_v(s)}$.

Exemplo: solução de EDO linear

- Considerando

$\rightsquigarrow$ temperatura da corrente de vapor constante: $\tilde{T}_v(t) = \tilde{T}_v(0) = 0$, $\forall t$ $(T_v(t) = \bar{T}_v)$

$\rightsquigarrow$ degrau na temperatura da corrente entrada em $t = 0$: $\tilde{T}_e(0) = 0^\circ C$ e $\tilde{T}_e(0^+) = 10^\circ C$

- Tem-se

$$\tilde{T}(s) = \frac{1/\tau}{s+a}\tilde{T}_e(s) + \frac{K}{s+a}\tilde{T}_v(s)$$

$$\tilde{T}(s) = \frac{1/\tau}{s+a}\frac{10}{s} + \frac{K}{s+a}0$$

$$\tilde{T}(s) = \frac{10}{\tau s}\frac{1}{s+a} = \frac{10}{\tau a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \qquad \text{(expansão em frações parciais)}$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{10}{\tau a}(1 - e^{-at}), \quad t \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(t) = T(0) + \frac{10}{\tau a}(1 - e^{-at}), \quad t \geq 0$$

- Resposta em regime permanente $\rightsquigarrow$ Teorema do Valor Final

$$\tilde{T}(t=\infty) = \lim_{t\to\infty}\tilde{T}(t) = \lim_{s\to 0} s\tilde{T}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{10}{\tau s}\frac{1}{s+a} = \lim_{s\to 0}\frac{10}{\tau}\frac{1}{s+a} = \frac{10}{\tau a}$$

Sumário

Sistema linear invariante no tempo

- Seja um operador linear $\mathcal{G}(\cdot)$ representando um sistema linear contínuo invariante no tempo (SLIT). Seja $y(t)$ a saída do sistema a uma entrada $f(t)$.

$$y(t) = \mathcal{G}\{f(t)\}$$

Propriedades:

- $\mathcal{G}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1\mathcal{G}\{f_1(t)\} + a_2\mathcal{G}\{f_2(t)\}$
- $\mathcal{G}\{0\} = 0$
- Invariância no tempo: $y(t-a) = \mathcal{G}\{f(t-a)\}$, $a \in \mathbb{R}$

Resposta ao impulso

Seja $g(t)$ a resposta a uma entrada impulso para o sistema em repouso (condições iniciais nulas):

$$g(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$$

Logo,

$$y(t) = \mathcal{G}\{f(t)\} = \mathcal{G}\{f(t) * \delta(t)\} = \mathcal{G}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathcal{G}\{\delta(t-\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(t) * g(t)$$

Sistema linear invariante no tempo

Resposta ao impulso e função de transferência

A função de transferência $G(s)$ entre uma certa entrada e uma certa saída de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) é a resposta do sistema à aplicação de um impulso nesta entrada, ou seja,

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

em que

$$g(t) = \mathcal{G}\{\delta(t)\}$$

Teorema

A saída de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) é a convolução da resposta ao impulso com a entrada,

$$y(t) = \mathcal{G}\{f(t)\} = g(t) * f(t)$$

$$y(t) = g(t) * f(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = G(s)F(s)$$

- Para entrada impulso $f(t) = \delta(t)$

$$y(t) = g(t) * \delta(t) = g(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = G(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s)$$

Sistema linear invariante no tempo

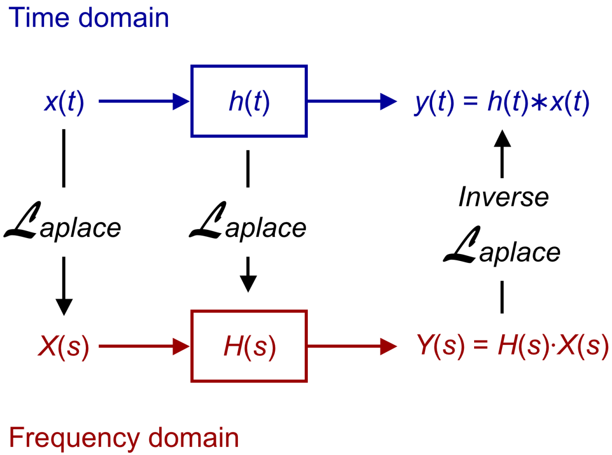
- Exemplo: Seja o sinal de entrada e^{st}, $s \in \Omega_g$, Ω_g (domínio) é o conjunto de valores de s para os quais transformada de Laplace $G(s)$ é definida (integral é finita)

$$
\begin{aligned}
y(t) = e^{st} * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau e^{st} \\
&= G(s) e^{st}
\end{aligned}
$$

- Obs.: e^{st} é chamada de auto-função do sistema. $G(s)$ é chamada função de transferência do sistema,

$$
G(s) = \int_{0}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau
$$

Sistema linear invariante no tempo



Fonte: Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=644043