107484 – Controle de Processos

Aula: Função de transferência, diagrama de blocos, polos e zeros

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

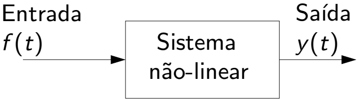
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

UnB

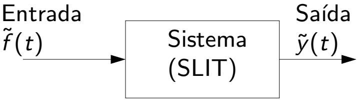
2021

Sumário

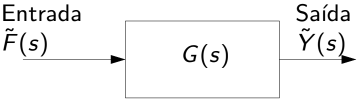
- Seja um sistema não-linear contínuo e invariante no tempo



- Um correspondente SLIT em torno de um ponto de operação (equilíbrio) pode ser expresso em termos de suas variáveis de desvio[1]



- O sistema pode ser analisado pela sua função de transferência se as condições iniciais são nulas



[1] Análise de estabilidade válida se a matriz Jacobiana não tem nenhum autovalor no eixo imaginário [Khalil, 2002].

Função de Transferência

Considere o sistema de equação diferencial linear com uma entrada $f(t)$, uma saída $y(t)$ e parâmetros constantes a_i, $i = 0, \ldots, n$, e b_i, $i = 0, \ldots, m$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t), \qquad n \geq m$$

Suponha condições iniciais nulas, ou seja

$$y^{(n-1)}(0) = \ldots = y(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m-1)}(0) = \ldots = f(0) = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação, tem-se:

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

Função de Transferência

Considere o sistema de equação diferencial linear com uma entrada $f(t)$, uma saída $y(t)$ e parâmetros constantes a_i, $i = 0, \ldots, n$, e b_i, $i = 0, \ldots, m$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t), \qquad n \geq m$$

Suponha condições iniciais nulas, ou seja

$$y^{(n-1)}(0) = \ldots = y(0) = 0 \ \text{ e } \ f^{(m-1)}(0) = \ldots = f(0) = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação, tem-se:

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

Função de Transferência

Considere o sistema de equação diferencial linear com uma entrada $f(t)$, uma saída $y(t)$ e parâmetros constantes a_i, $i = 0, \ldots, n$, e b_i, $i = 0, \ldots, m$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t), \qquad n \geq m$$

Suponha condições iniciais nulas, ou seja

$$y^{(n-1)}(0) = \ldots = y(0) = 0 \ \text{ e } \ f^{(m-1)}(0) = \ldots = f(0) = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação, tem-se:

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

Função de Transferência

Exemplo

- Suponha condições iniciais nulas $y^{(n-1)}(0) = \ldots = y(0) = 0$ e $f_1(0) = f_2(0) = 0$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 f_1 + b_2 f_2$$

$$Y(s) = \frac{b_1}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} F_1(s) + \frac{b_2}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} F_2(s)$$

$$Y(s) = G_1(s) F_1(s) + G_2(s) F_2(s)$$

Função de Transferência

Condições iniciais

Observe que para o sistema linear expresso em termos de variáveis de desvio

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y} \quad \text{e} \quad \tilde{f}(t) = f(t) - \bar{f}$$

a condição inicial nula é atendida considerando que o sistema encontra-se no ponto de operação $(\bar{y}, \bar{f})$ de regime permanente no instante $t = 0$, ou seja

$$y(0) = \bar{y} \implies \tilde{y}(0) = y(0) - \bar{y} = 0$$

e

$$f(0) = \bar{f} \implies \tilde{f}(0) = f(0) - \bar{f} = 0$$

Ganho estático

O ganho estático de uma função de transferência (relação de estado estacionário) pode ser obtida por

$$K = \lim_{s \to 0} G(s)$$

pois

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)F(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} G(s)\left(\lim_{s \to 0} sF(s)\right)$$

$$\frac{\lim_{t \to \infty} y(t)}{\lim_{t \to \infty} f(t)} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Equivalência função de transferência e espaço de estados

- Pode-se representar a função de transferência (FT) em espaço de estados (EE) e vice-versa

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Obs.: Se $D = 0$ a FT é estritamente própria, caso contrário é própria (ordem do numerador = ordem do denominador)

Comandos de conversão no Matlab

- EE $\Rightarrow$ FT (no Matlab, '[n, d] = ss2tf(A, B, C, D)')

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \qquad Y(s) = G(s)U(s)$$

- FT $\Rightarrow$ EE (no Matlab, '[A, B, C, D] = tf2ss(num,den)') $\rightsquigarrow$ a representação não é única

Seja

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m < n$$

Equivalência função de transferência e espaço de estados

- Pode-se representar a função de transferência (FT) em espaço de estados (EE) e vice-versa

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Obs.: Se $D = 0$ a FT é estritamente própria, caso contrário é própria (ordem do numerador = ordem do denominador)

Comandos de conversão no Matlab

- EE $\Rightarrow$ FT (no Matlab, '[n, d] = ss2tf(A, B, C, D)')

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \qquad Y(s) = G(s)U(s)$$

- FT $\Rightarrow$ EE (no Matlab, '[A, B, C, D] = tf2ss(num,den)') $\rightsquigarrow$ a representação não é única

Seja

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m < n$$

Equivalência função de transferência e espaço de estados

- Pode-se representar a função de transferência (FT) em espaço de estados (EE) e vice-versa

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Obs.: Se $D = 0$ a FT é estritamente própria, caso contrário é própria (ordem do numerador = ordem do denominador)

Comandos de conversão no Matlab

- EE $\Rightarrow$ FT (no Matlab, '[n, d] = ss2tf(A, B, C, D)')

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \qquad Y(s) = G(s)U(s)$$

- FT $\Rightarrow$ EE (no Matlab, '[A, B, C, D] = tf2ss(num,den)') $\rightsquigarrow$ a representação não é única

Seja

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m < n$$

Equivalência função de transferência e espaço de estados

- Em espaço de estados (forma canônica controlável)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{caso } m<n-2} \end{bmatrix} x + [0]u$$

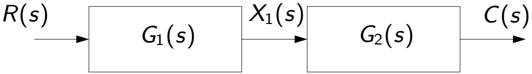
- Caso $m = n$ (função própria mas não estritamente própria), reescrever função transferência $G(s) = n(s)/d(s)$ como

$$G(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + D$$

em que $r(s)/d(s)$ é estritamente própria ($m = n$) e tem realização $(A, B, C, 0)$. Logo $G(s)$ tem tem realização (A, B, C, D).

Sumário

Associação em série (cascata)



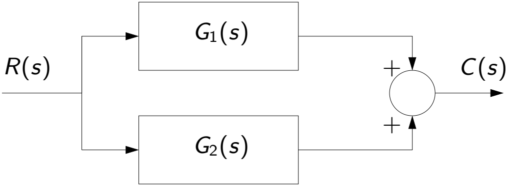
$$X_1(s) = G_1(s)R(s)$$

$$C(s) = G_2(s)X_1(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

logo,

$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

Associação em paralelo

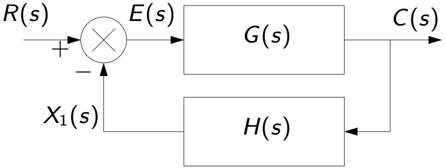


$$X_1(s) = G_1(s)R(s), \qquad X_2(s) = G_2(s)R(s)$$

$$C(s) = X_1(s) + X_2(s) = \Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)R(s)$$

$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

Associação com realimentação negativa



$$E(s) = R(s) - X_1(s), \qquad X_1(s) = H(s)C(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \tag{1}$$

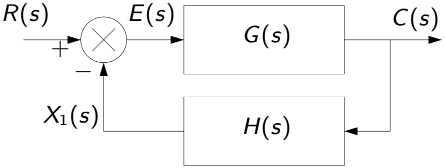
$$C(s) = G(s)E(s) \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2),

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s), \qquad \Big(1 + G(s)H(s)\Big)C(s) = G(s)R(s)$$

Logo, $$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Associação com realimentação negativa



$$E(s) = R(s) - X_1(s), \qquad X_1(s) = H(s)C(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \tag{1}$$

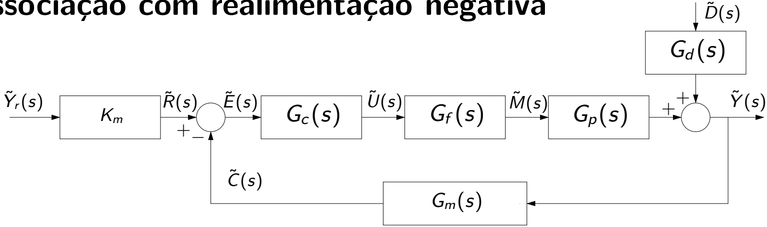
$$C(s) = G(s)E(s) \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2),

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s), \qquad \Big(1 + G(s)H(s)\Big)C(s) = G(s)R(s)$$

Logo, $$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Associação com realimentação negativa



Regra de como achar a função de transferência no caso de malha simples:

- **Numerador**: produto FT's no ramo direto ($\tilde{Y}_r \to \tilde{Y}$, $\tilde{D} \to \tilde{Y}$)
- **Denominador**: $1 +$ produto FT's no laço

- Funções de transferência em malha fechada

$$\tilde{M} = G_f G_c (K_m \tilde{Y}_r - G_m \tilde{Y})$$

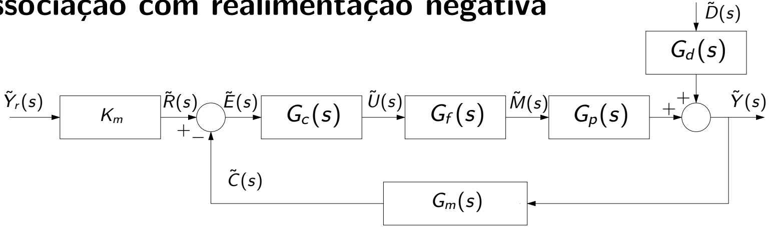
$$\tilde{Y} = G_p \tilde{M} + G_d \tilde{D}$$

$$G := G_p G_f G_c$$

$$\tilde{Y} = \frac{K_m G_p G_f G_c}{1 + G_p G_f G_c G_m} \tilde{Y}_r + \frac{G_d}{1 + G_p G_f G_c G_m} \tilde{D}$$

$$\tilde{Y} = \underbrace{\frac{K_m G}{1 + G G_m}}_{G_r} \tilde{Y}_r + \underbrace{\frac{G_d}{1 + G G_m}}_{G_{dist}} \tilde{D}$$

Associação com realimentação negativa



Regra de como achar a função de transferência no caso de malha simples:

- **Numerador**: produto FT's no ramo direto ($\tilde{Y}_r \to \tilde{Y}$, $\tilde{D} \to \tilde{Y}$)
- **Denominador**: 1 + produto FT's no laço

- Funções de transferência em malha fechada

$$\tilde{M} = G_f G_c (K_m \tilde{Y}_r - G_m \tilde{Y})$$

$$\tilde{Y} = G_p \tilde{M} + G_d \tilde{D}$$

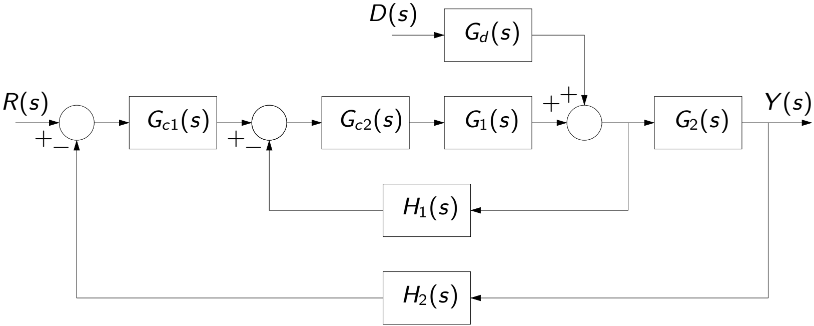
$$G := G_p G_f G_c$$

$$\tilde{Y} = \frac{K_m G_p G_f G_c}{1 + G_p G_f G_c G_m} \tilde{Y}_r + \frac{G_d}{1 + G_p G_f G_c G_m} \tilde{D}$$

$$\tilde{Y} = \underbrace{\frac{K_m G}{1 + G G_m}}_{G_r} \tilde{Y}_r + \underbrace{\frac{G_d}{1 + G G_m}}_{G_{dist}} \tilde{D}$$

Associação com realimentação negativa

- Controle em cascata: exemplo de realimentação negativa

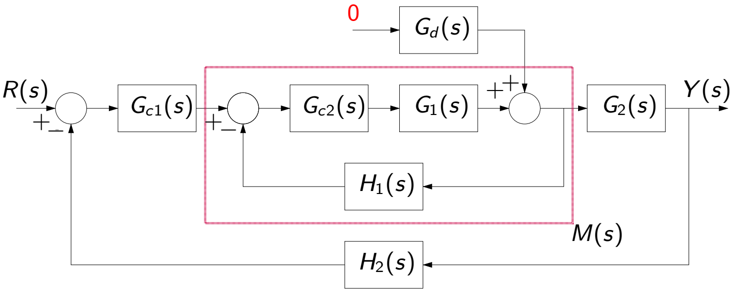


- Ache a funções de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \quad \text{e} \quad \frac{Y(s)}{D(s)}$$

Exemplo (solução)

- Considerando apenas a entrada $R(s)$ ($D(s) = 0$):

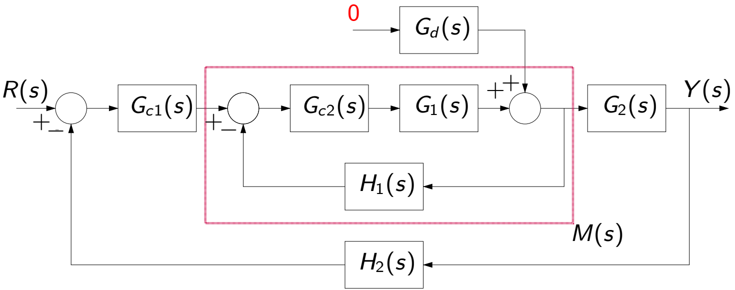


$$M(s) = \frac{G_1(s)G_{c2}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}{1 + H_2(s)G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s) + H_2(s)G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}$$

- Para encontrar $Y(s)/D(s)$ pode-se considerar o mesmo denominador de $Y(s)/R(s)$ e o caminho direto $D(s) \rightarrow Y(s)$ no numerador ($G_2(s)G_d(s)$)

- Considerando apenas a entrada $R(s)$ $(D(s) = 0)$:



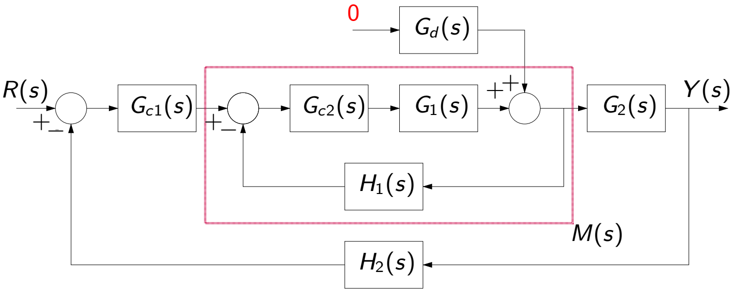
$$M(s) = \frac{G_1(s)G_{c2}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}{1 + H_2(s)G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s) + H_2(s)G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}$$

- Para encontrar $Y(s)/D(s)$ pode-se considerar o mesmo denominador de $Y(s)/R(s)$ e o caminho direto $D(s) \rightarrow Y(s)$ no numerador $(G_2(s)G_d(s))$

Exemplo (solução)

- Considerando apenas a entrada $R(s)$ $(D(s) = 0)$:



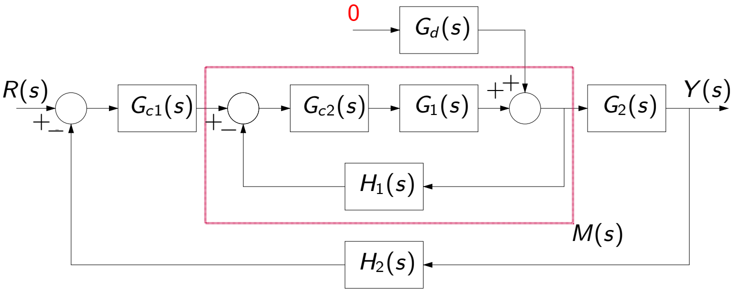
$$M(s) = \frac{G_1(s)G_{c2}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}{1 + H_2(s)G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s) + H_2(s)G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}$$

- Para encontrar $Y(s)/D(s)$ pode-se considerar o mesmo denominador de $Y(s)/R(s)$ e o caminho direto $D(s) \rightarrow Y(s)$ no numerador $(G_2(s)G_d(s))$

Exemplo (solução)

- Considerando apenas a entrada $R(s)$ $(D(s)=0)$:

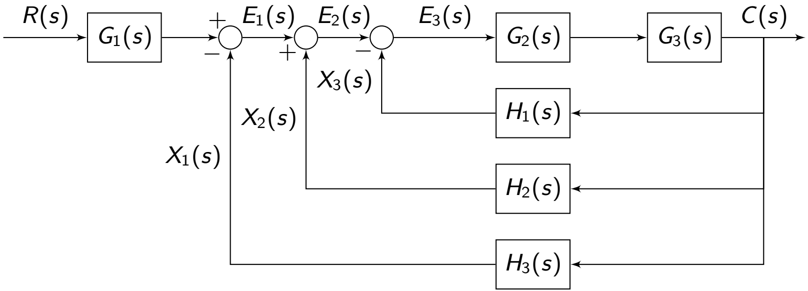


$$M(s) = \frac{G_1(s)G_{c2}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}{1 + H_2(s)G_2(s)M(s)G_{c1}(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_{c2}(s) + H_2(s)G_2(s)G_1(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}$$

- Para encontrar $Y(s)/D(s)$ pode-se considerar o mesmo denominador de $Y(s)/R(s)$ e o caminho direto $D(s) \rightarrow Y(s)$ no numerador $(G_2(s)G_d(s))$

Exemplo



⇝ Obter a função de transferência equivalente $C(s)/R(s)$

Exemplo

$$E_1(s) = G_1(s)R(s) - X_1(s), \qquad X_1(s) = H_3(s)C(s)$$

$$E_1(s) = G_1(s)R(s) - H_3(s)C(s)$$

$$E_2(s) = E_1(s) + X_2(s), \qquad X_2(s) = H_2(s)C(s)$$

$$\begin{aligned} E_2(s) &= E_1(s) + H_2(s)C(s) \\ &= G_1(s)R(s) - H_3(s)C(s) + H_2(s)C(s) \\ &= G_1(s)R(s) - \Big(H_3(s) - H_2(s)\Big)C(s) \end{aligned}$$

$$E_3(s) = E_2(s) - X_3(s), \qquad X_3(s) = H_1(s)C(s)$$

$$\begin{aligned} E_3(s) &= E_2(s) - H_1(s)C(s) \\ &= G_1(s)R(s) - \Big(H_1(s) - H_2(s) + H_3(s)\Big)C(s) \end{aligned}$$

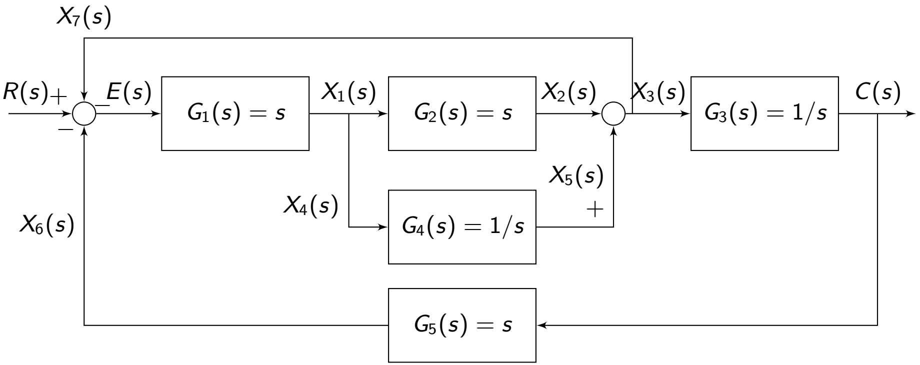
Exemplo

$$\begin{aligned} C(s) &= G_2(s)G_3(s)E_3(s) \\ &= G_2(s)G_3(s)\Big[G_1(s)R(s) - \Big(H_1(s) - H_2(s) + H_3(s)\Big)C(s)\Big] \end{aligned}$$

$$\Big[1 + G_3(s)G_2(s)\Big(H_1(s) - H_2(s) + H_3(s)\Big)\Big]C(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_3(s)G_2(s)G_1(s)}{1 + G_3(s)G_2(s)\Big(H_1(s) - H_2(s) + H_3(s)\Big)}$$

Exercício



⇝ Obter a função de transferência equivalente $C(s)/R(s)$

Sumário

Processos com múltiplas saídas

- Considere o processo com entradas $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 \end{cases}$$

e condições iniciais $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

- Aplicando a transformada de Laplace no sistema de E.D.O.,

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)F_1(s) + G_{12}(s)F_2(s) \\ \\ Y_2(s) = G_{21}(s)F_1(s) + G_{22}(s)F_2(s) \end{cases}$$

ou em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix}$$

Processos com múltiplas saídas

- Considere o processo com entradas $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 \end{cases}$$

e condições iniciais $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

- Aplicando a transformada de Laplace no sistema de E.D.O.,

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)F_1(s) + G_{12}(s)F_2(s) \\ \\ Y_2(s) = G_{21}(s)F_1(s) + G_{22}(s)F_2(s) \end{cases}$$

ou em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix}$$

Exercício

Encontre as expressões de $G_{ij}(s)$ e desenhe o diagrama de blocos do sistema de 2 entradas e 2 saídas.

Solução:

$$G_{11}(s) = \frac{b_{11}s + (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})}{P(s)}, \qquad G_{12}(s) = \frac{b_{12}s + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})}{P(s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{b_{21}s + (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})}{P(s)}, \qquad G_{22}(s) = \frac{b_{22}s + (a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22})}{P(s)}$$

$$P(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})$$

Sumário

Resposta temporal da saída a partir da FT

- Em geral, uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

- Reescrevendo

$$Y(s) = \frac{\text{termos do numerador}}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)[\text{termos devidos a entrada } F(s)]}$$

- Expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} + [\text{termos devidos a entrada } F(s)]$$

- Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{[\text{termos devidos a entrada } f]}_{\text{resposta forçada}}$$

Resposta temporal da saída a partir da FT

- Em geral, uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

- Reescrevendo

$$Y(s) = \frac{\text{termos do numerador}}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)[\text{termos devidos a entrada } F(s)]}$$

- Expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} + [\text{termos devidos a entrada } F(s)]$$

- Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{[\text{termos devidos a entrada } f]}_{\text{resposta forçada}}$$

Resposta temporal da saída a partir da FT

- Em geral, uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

- Reescrevendo

$$Y(s) = \frac{\text{termos do numerador}}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)[\text{termos devidos a entrada } F(s)]}$$

- Expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} + [\text{termos devidos a entrada } F(s)]$$

- Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{[\text{termos devidos a entrada } f]}_{\text{resposta forçada}}$$

Resposta temporal da saída a partir da FT

- Em geral, uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad n \geq m$$

- Reescrevendo

$$Y(s) = \frac{\text{termos do numerador}}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)[\text{termos devidos a entrada } F(s)]}$$

- Expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} + [\text{termos devidos a entrada } F(s)]$$

- Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{[\text{termos devidos a entrada } f]}_{\text{resposta forçada}}$$

Características da resposta temporal a partir da FT

- Os termos p_i, $i = 1, \ldots, n$ são as raízes da equação característica do sistema (raízes do denominador da função de transferência) e são chamados polos do sistema
- A velocidade e o comportamento (oscilatório, assintótico, convergente, divergente) da resposta não-forçada é determinada pelas raízes da equação característica (polos do sistema)
- O valor dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$, dependem do numerador da função de transferência (zeros do sistema) e do sinal de entrada $f(t)$
- O termo $e^{\lambda_j t}$ da solução de uma edo homogênea é chamado de modo próprio e é linearmente independente se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Se as raízes λ da eq. característica tem multiplicidade r então os modos próprios são $e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$,
- A velocidade e o comportamento da resposta forçada é dada pelo modos próprios da edo que tem como solução $f(t)$ (também chamado de modos forçados). Por exemplo: $f(t) = au(t)$ (degrau de amplitude a) tem modo próprio e^{0t}; $f(t) = 10\cos(2t)$ tem modos próprios e^{2jt} e e^{-2jt}
- Se os modos forçados da entrada são iguais aos modos próprios do sistema então a solução forçada tem modos de multiplicidade aumentada

Características da resposta temporal a partir da FT

- Os termos p_i, $i = 1, \ldots, n$ são as raízes da equação característica do sistema (raízes do denominador da função de transferência) e são chamados polos do sistema
- A velocidade e o comportamento (oscilatório, assintótico, convergente, divergente) da resposta não-forçada é determinada pelas raízes da equação característica (polos do sistema)
- O valor dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$, dependem do numerador da função de transferência (zeros do sistema) e do sinal de entrada $f(t)$
- O termo $e^{\lambda_j t}$ da solução de uma edo homogênea é chamado de modo próprio e é linearmente independente se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Se as raízes λ da eq. característica tem multiplicidade r então os modos próprios são $e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$,
- A velocidade e o comportamento da resposta forçada é dada pelo modos próprios da edo que tem como solução $f(t)$ (também chamado de modos forçados). Por exemplo: $f(t) = au(t)$ (degrau de amplitude a) tem modo próprio e^{0t}; $f(t) = 10\cos(2t)$ tem modos próprios e^{2jt} e e^{-2jt}
- Se os modos forçados da entrada são iguais aos modos próprios do sistema então a solução forçada tem modos de multiplicidade aumentada

Características da resposta temporal a partir da FT

- Os termos p_i, $i = 1, \ldots, n$ são as raízes da equação característica do sistema (raízes do denominador da função de transferência) e são chamados polos do sistema
- A velocidade e o comportamento (oscilatório, assintótico, convergente, divergente) da resposta não-forçada é determinada pelas raízes da equação característica (polos do sistema)
- O valor dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$, dependem do numerador da função de transferência (zeros do sistema) e do sinal de entrada $f(t)$
- O termo $e^{\lambda_j t}$ da solução de uma edo homogênea é chamado de modo próprio e é linearmente independente se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Se as raízes λ da eq. característica tem multiplicidade r então os modos próprios são $e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$,
- A velocidade e o comportamento da resposta forçada é dada pelo modos próprios da edo que tem como solução $f(t)$ (também chamado de modos forçados). Por exemplo: $f(t) = au(t)$ (degrau de amplitude a) tem modo próprio e^{0t}; $f(t) = 10\cos(2t)$ tem modos próprios e^{2jt} e e^{-2jt}
- Se os modos forçados da entrada são iguais aos modos próprios do sistema então a solução forçada tem modos de multiplicidade aumentada

Características da resposta temporal a partir da FT

- Os termos p_i, $i = 1, \ldots, n$ são as raízes da equação característica do sistema (raízes do denominador da função de transferência) e são chamados polos do sistema
- A velocidade e o comportamento (oscilatório, assintótico, convergente, divergente) da resposta não-forçada é determinada pelas raízes da equação característica (polos do sistema)
- O valor dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$, dependem do numerador da função de transferência (zeros do sistema) e do sinal de entrada $f(t)$
- O termo $e^{\lambda_j t}$ da solução de uma edo homogênea é chamado de modo próprio e é linearmente independente se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Se as raízes λ da eq. característica tem multiplicidade r então os modos próprios são $e^{\lambda t}, \; te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$,
- A velocidade e o comportamento da resposta forçada é dada pelo modos próprios da edo que tem como solução $f(t)$ (também chamado de modos forçados). Por exemplo: $f(t) = au(t)$ (degrau de amplitude a) tem modo próprio e^{0t}; $f(t) = 10\cos(2t)$ tem modos próprios e^{2jt} e e^{-2jt}
- Se os modos forçados da entrada são iguais aos modos próprios do sistema então a solução forçada tem modos de multiplicidade aumentada

Características da resposta temporal a partir da FT

- Os termos p_i, $i = 1, \ldots, n$ são as raízes da equação característica do sistema (raízes do denominador da função de transferência) e são chamados polos do sistema
- A velocidade e o comportamento (oscilatório, assintótico, convergente, divergente) da resposta não-forçada é determinada pelas raízes da equação característica (polos do sistema)
- O valor dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$, dependem do numerador da função de transferência (zeros do sistema) e do sinal de entrada $f(t)$
- O termo $e^{\lambda_j t}$ da solução de uma edo homogênea é chamado de modo próprio e é linearmente independente se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Se as raízes λ da eq. característica tem multiplicidade r então os modos próprios são $e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$,
- A velocidade e o comportamento da resposta forçada é dada pelo modos próprios da edo que tem como solução $f(t)$ (também chamado de modos forçados). Por exemplo: $f(t) = au(t)$ (degrau de amplitude a) tem modo próprio e^{0t}; $f(t) = 10\cos(2t)$ tem modos próprios e^{2jt} e e^{-2jt}
- Se os modos forçados da entrada são iguais aos modos próprios do sistema então a solução forçada tem modos de multiplicidade aumentada

Características da resposta temporal a partir da FT

- Os termos p_i, $i = 1, \ldots, n$ são as raízes da equação característica do sistema (raízes do denominador da função de transferência) e são chamados polos do sistema
- A velocidade e o comportamento (oscilatório, assintótico, convergente, divergente) da resposta não-forçada é determinada pelas raízes da equação característica (polos do sistema)
- O valor dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$, dependem do numerador da função de transferência (zeros do sistema) e do sinal de entrada $f(t)$
- O termo $e^{\lambda_j t}$ da solução de uma edo homogênea é chamado de modo próprio e é linearmente independente se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Se as raízes λ da eq. característica tem multiplicidade r então os modos próprios são $e^{\lambda t}, \; te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$,
- A velocidade e o comportamento da resposta forçada é dada pelo modos próprios da edo que tem como solução $f(t)$ (também chamado de modos forçados). Por exemplo: $f(t) = au(t)$ (degrau de amplitude a) tem modo próprio e^{0t}; $f(t) = 10\cos(2t)$ tem modos próprios e^{2jt} e e^{-2jt}
- Se os modos forçados da entrada são iguais aos modos próprios do sistema então a solução forçada tem modos de multiplicidade aumentada

Exemplo

- Seja a função de transferência de 1ª ordem com polo $-1/\tau$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

e uma entrada degrau de amplitude A

$$F(s) = \frac{A}{s}$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \underbrace{-\frac{AK}{s + 1/\tau}}_{\text{termo 1}} + \underbrace{\frac{AK}{s}}_{\text{termo 2}}$$

- termo 1: modo próprio ($e^{t(-1/\tau)}$) devido ao polo $-1/\tau$ do sistema
- termo 2: modo forçado (e^{t0}) devido a entrada (raiz na origem)

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = \underbrace{-AKe^{-t/\tau}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{AKe^{0t}}_{\text{resposta forçada}}$$

Exemplo

- Seja a função de transferência de 1ª ordem com polo $-1/\tau$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

e uma entrada degrau de amplitude A

$$F(s) = \frac{A}{s}$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \underbrace{-\frac{AK}{s + 1/\tau}}_{\text{termo 1}} + \underbrace{\frac{AK}{s}}_{\text{termo 2}}$$

- termo 1: modo próprio ($e^{t(-1/\tau)}$) devido ao polo $-1/\tau$ do sistema
- termo 2: modo forçado (e^{t0}) devido a entrada (raiz na origem)

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = \underbrace{-AKe^{-t/\tau}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{AKe^{0t}}_{\text{resposta forçada}}$$

Exemplo

- Seja a função de transferência de 1ª ordem com polo $-1/\tau$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

e uma entrada degrau de amplitude A

$$F(s) = \frac{A}{s}$$

Logo,

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \underbrace{-\frac{AK}{s + 1/\tau}}_{\text{termo 1}} + \underbrace{\frac{AK}{s}}_{\text{termo 2}}$$

- termo 1: modo próprio ($e^{t(-1/\tau)}$) devido ao polo $-1/\tau$ do sistema
- termo 2: modo forçado (e^{t0}) devido a entrada (raiz na origem)

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = \underbrace{-AKe^{-t/\tau}}_{\text{resposta não-forçada}} + \underbrace{AKe^{0t}}_{\text{resposta forçada}}$$

Sumário

Polos e Zeros de uma função de transferência

- Seja uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad n \geq m$$

Polos

Os polos de $G(s)$, p_1, p_2, ... p_n, são valores de s tais que $G(s)|_{s=p_i} = \infty$. Em funções racionais os polos são as raízes do denominador.

Zeros (finitos)

Os zeros de $G(s)$, z_1, z_2, ... z_m, são valores de s tais que $G(s)|_{s=z_i} = 0$. Em funções racionais os zeros são as raízes do numerador.

Ganho

K_{ss} é chamado de ganho da função de transferência ou ganho estático e é dado por

$$K_{ss} = \lim_{s\to 0} G(s)$$

Polos e Zeros de uma função de transferência

- Seja uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad n \geq m$$

Polos

Os polos de $G(s)$, p_1, p_2, ... p_n, são valores de s tais que $G(s)|_{s=p_i} = \infty$. Em funções racionais os polos são as raízes do denominador.

Zeros (finitos)

Os zeros de $G(s)$, z_1, z_2, ... z_m, são valores de s tais que $G(s)|_{s=z_i} = 0$. Em funções racionais os zeros são as raízes do numerador.

Ganho

K_{ss} é chamado de ganho da função de transferência ou ganho estático e é dado por

$$K_{ss} = \lim_{s\to 0} G(s)$$

Polos e Zeros de uma função de transferência

- Seja uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) = K\frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}, \quad n \geq m$$

Polos

Os polos de $G(s)$, p_1, p_2, ... p_n, são valores de s tais que $G(s)|_{s=p_i} = \infty$. Em funções racionais os polos são as raízes do denominador.

Zeros (finitos)

Os zeros de $G(s)$, z_1, z_2, ... z_m, são valores de s tais que $G(s)|_{s=z_i} = 0$. Em funções racionais os zeros são as raízes do numerador.

Ganho

K_{ss} é chamado de ganho da função de transferência ou ganho estático e é dado por

$$K_{ss} = \lim_{s\to 0} G(s)$$

Polos e Zeros de uma função de transferência

- Seja uma função de transferência (FT) é representada por

$$G(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad n \geq m$$

Polos

Os polos de $G(s)$, p_1, p_2, ... p_n, são valores de s tais que $G(s)|_{s=p_i} = \infty$. Em funções racionais os polos são as raízes do denominador.

Zeros (finitos)

Os zeros de $G(s)$, z_1, z_2, ... z_m, são valores de s tais que $G(s)|_{s=z_i} = 0$. Em funções racionais os zeros são as raízes do numerador.

Ganho

K_{ss} é chamado de ganho da função de transferência ou ganho estático e é dado por

$$K_{ss} = \lim_{s\to 0} G(s)$$

Polos de uma função de transferência

- Em geral, uma função de transferência (FT) $G(s)$ é uma razão de dois polinômios (função racional) $Q(s)$ e $P(s)$:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

com exceção de sistemas com atraso no tempo θ: $e^{-\theta s}$.

  - Zeros da FT: raízes de $Q(s) \rightarrow G(s_z) = 0$
  - Polos da FT: raízes de $P(s) \rightarrow G(s_p) \rightarrow \infty$

- Localização dos polos $\rightarrow$ característica qualitativa da resposta para uma entrada particular.

Polos de uma função de transferência

- Em geral, uma função de transferência (FT) $G(s)$ é uma razão de dois polinômios (função racional) $Q(s)$ e $P(s)$:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

com exceção de sistemas com atraso no tempo θ: $e^{-\theta s}$.

  - Zeros da FT: raízes de $Q(s) \rightarrow G(s_z) = 0$
  - Polos da FT: raízes de $P(s) \rightarrow G(s_p) \rightarrow \infty$

- Localização dos polos $\rightarrow$ característica qualitativa da resposta para uma entrada particular.

Polos de uma função de transferência

Exemplo

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$G(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \left\{ \frac{c_{31}}{s-p_3} + \frac{c_{32}}{(s-p_3)^2} + \cdots + \frac{c_{3m}}{(s-p_3)^m} \right\} + \frac{c_4}{s-p_4} + \frac{c_4^*}{s-p_4^*} + \frac{c_5}{s-p_5}$$

- Considere p_1, p_2, p_3 reais, $p_5 = 0$ e p_4 complexo, ou seja,

$$p_4 = a + jb$$
$$p_4^* = a - jb$$

Polos de uma função de transferência

Exemplo

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$G(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \left\{ \frac{c_{31}}{s-p_3} + \frac{c_{32}}{(s-p_3)^2} + \cdots + \frac{c_{3m}}{(s-p_3)^m} \right\} + \frac{c_4}{s-p_4} + \frac{c_4^*}{s-p_4^*} + \frac{c_5}{s-p_5}$$

- Considere p_1, p_2, p_3 reais, $p_5 = 0$ e p_4 complexo, ou seja,

$$p_4 = a + jb$$
$$p_4^* = a - jb$$

Exemplo

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$G(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \left\{ \frac{c_{31}}{s-p_3} + \frac{c_{32}}{(s-p_3)^2} + \cdots + \frac{c_{3m}}{(s-p_3)^m} \right\}$$
$$+ \frac{c_4}{s-p_4} + \frac{c_4^*}{s-p_4^*} + \frac{c_5}{s-p_5}$$

- Considere p_1, p_2, p_3 reais, $p_5 = 0$ e p_4 complexo, ou seja,

$$p_4 = a + jb$$
$$p_4^* = a - jb$$

Polos de uma função de transferência

- Considere que a função de transferência $G(s)$ tem uma entrada $f(t)$ e uma saída $y(t)$ com respectivas transformadas de Laplace $F(s) = \dfrac{r(s)}{q(s)}$ e $Y(s)$,

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}\frac{r(s)}{q(s)}$$

Importante

O comportamento qualitativo da saída $y(t)$ depende da localização no plano-s ($s = \sigma + j\omega$) das raízes de $P(s)$ (pólos do sistema) e das raízes do denominador da entrada $q(s)$.

Polos de uma função de transferência

- Considere que a função de transferência $G(s)$ tem uma entrada $f(t)$ e uma saída $y(t)$ com respectivas transformadas de Laplace $F(s) = \dfrac{r(s)}{q(s)}$ e $Y(s)$,

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}\frac{r(s)}{q(s)}$$

Importante

O comportamento qualitativo da saída $y(t)$ depende da localização no plano-s ($s = \sigma + j\omega$) das raízes de $P(s)$ (pólos do sistema) e das raízes do denominador da entrada $q(s)$.

Polos de uma função de transferência

- Considerando apenas a contribuição das raízes do sistema na resposta qualitativa de $y(t)$, temos os seguintes casos:

1. Polos distintos reais: $p_1 > 0$ e $p_2 < 0$

$$c_1 e^{p_1 t} \qquad \text{e} \qquad c_2 e^{p_2 t}$$

2. Polos reais múltiplos: p_3

$$\left(c_{31} + \frac{c_{32}}{1!} t + \frac{c_{33}}{2!} t^2 + \cdots + \frac{c_{3m}}{(m-1)!} t^{m-1} \right) e^{p_3 t}$$

Obs.: $p_3 > 0 \Rightarrow e^{p_3 t} \to \infty$ quando $t \to \infty$

Polos de uma função de transferência

3. Polos complexos conjugados: p_4 e p_4^*

$$p_4 = \alpha + j\beta$$

$$p_4^* = \alpha - j\beta$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$\frac{c_4}{s - p_4} + \frac{c_4^*}{s - p_4^*} \Rightarrow ce^{\alpha t} sen(\beta t + \phi)$$

Observações

- Relação de Euler: $e^{(a+jb)} = e^a e^{jb} = e^a(cos(b) + jsen(b))$
- Caso $\Re\{p_4\} > 0 \Rightarrow e^{\alpha t} \to \infty$ quando $t \to \infty$
- Caso $\Re\{p_4\} = 0 \Rightarrow$ oscilação não amortecida

Polos de uma função de transferência

4. Polos complexos conjugados: p_4 e p_4^*

$$p_4 = \alpha + j\beta$$

$$p_4^* = \alpha - j\beta$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$\frac{c_4}{s - p_4} + \frac{c_4^*}{s - p_4^*} \Rightarrow ce^{\alpha t} sen(\beta t + \phi)$$

Observações

- Relação de Euler: $e^{(a+jb)} = e^a e^{jb} = e^a(cos(b) + jsen(b))$
- Caso $\Re\{p_4\} > 0 \Rightarrow e^{\alpha t} \to \infty$ quando $t \to \infty$
- Caso $\Re\{p_4\} = 0 \Rightarrow$ oscilação não amortecida

Polos de uma função de transferência

5. Polos na origem: $p_5 = 0$

   Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$\frac{c_5}{s - p_5} = \frac{c_5}{s} \Rightarrow c_5 u(t)$$

Obs.: Sistema integrador

$$Y(s) = G(s)F(s)$$
$$y(t) = g(t) * f(t)$$
$$y(t) = c_5 u(t) * f(t)$$
$$y(t) = c_5 \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

pois

$$u(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} u(t-\tau) f(\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

Polos de uma função de transferência

5. Polos na origem: $p_5 = 0$
   Aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$\frac{c_5}{s - p_5} = \frac{c_5}{s} \Rightarrow c_5 u(t)$$

Obs.: Sistema integrador

$$Y(s) = G(s)F(s)$$
$$y(t) = g(t) * f(t)$$
$$y(t) = c_5 u(t) * f(t)$$
$$y(t) = c_5 \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

pois

$$u(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} u(t-\tau)f(\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

Polos de uma função de transferência

Observações

1. Para uma entrada particular $f(t)$ deve-se considerar as raízes adicionais introduzidas pelo denominador de $F(s)$ na resposta total de $y(t)$.
2. Polos p com parte real positiva produzem saídas ilimitadas, ou seja,
   - Sistemas instáveis: $\Re\{p\} > 0$
   - Sistemas estáveis: $\Re\{p\} < 0$

Respostas associadas a localização dos pólos

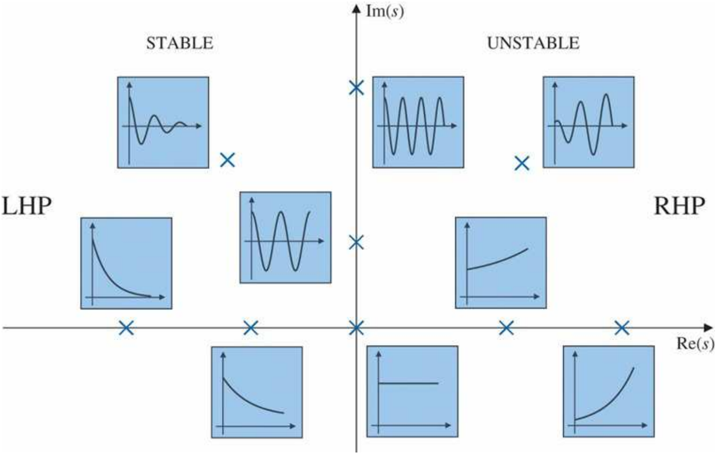


Figura: Respostas ao impulso associadas a localização dos pólos no plano-s [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

Sumário

Efeito da adição de um zero

- Seja duas funções de transferência com os mesmos pólos e mesmo ganho estático

$$H_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)}$$

e

$$H_2(s) = \frac{2(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+2)} = \frac{0,18}{(s+1)} + \frac{1,64}{(s+2)}$$

$\rightsquigarrow$ Zero próximo do pólo -1 reduziu o efeito deste pólo na resposta do sistema

- Observe outros casos

$$H_3(s) = \frac{2(s+0.9)}{0.9(s+1)(s+2)} = \frac{-0.22}{(s+1)} + \frac{2.44}{(s+2)}$$

$\rightsquigarrow$ Zero à direita do pólo -1

$$H_4(s) = \frac{2(s-1)}{-1(s+1)(s+2)} = \frac{4}{(s+1)} + \frac{-6}{(s+2)}$$

$\rightsquigarrow$ Zero no semiplano direito causa resposta inversa do sistema

Efeito da adição de um zero

- Seja duas funções de transferência com os mesmos pólos e mesmo ganho estático

$$H_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)}$$

e

$$H_2(s) = \frac{2(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+2)} = \frac{0,18}{(s+1)} + \frac{1,64}{(s+2)}$$

$\rightsquigarrow$ Zero próximo do pólo -1 reduziu o efeito deste pólo na resposta do sistema

- Observe outros casos

$$H_3(s) = \frac{2(s+0.9)}{0.9(s+1)(s+2)} = \frac{-0.22}{(s+1)} + \frac{2.44}{(s+2)}$$

$\rightsquigarrow$ Zero à direita do pólo -1

$$H_4(s) = \frac{2(s-1)}{-1(s+1)(s+2)} = \frac{4}{(s+1)} + \frac{-6}{(s+2)}$$

$\rightsquigarrow$ Zero no semiplano direito causa resposta inversa do sistema

Respostas associadas a localização dos zeros