107484 – Controle de Processos

Aula: Sistemas dinâmicos de ordem superior

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

1^o Semestre 2021

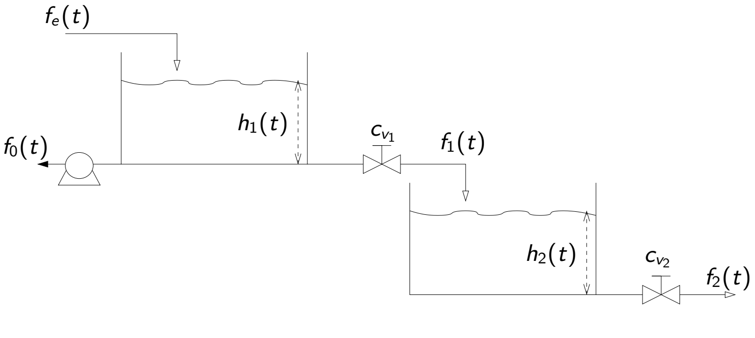
Sumário

Sistemas não-interativos

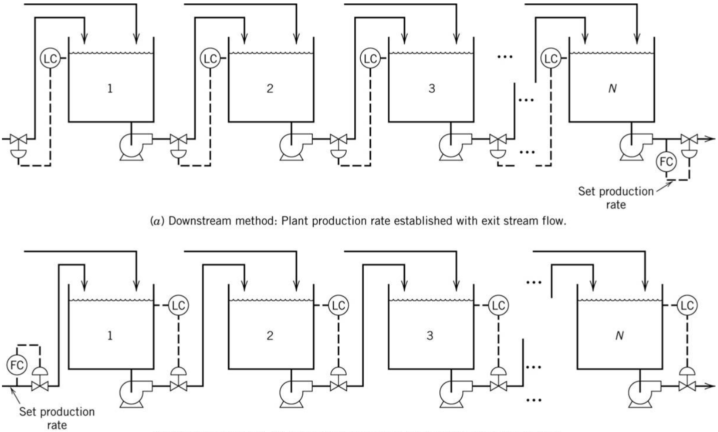
- Em processos não-interativos mudanças em unidades *downstream* não influenciam unidades *upstream*, ou seja, há influência ocorre apenas em um sentido.

- Pode-se estabelecer uma associação em cascata no diagrama de blocos das funções de transferências dos processos pois não há efeito de carga

- Exemplo de processo não-interativo:



Plantwide Control



(*a*) Downstream method: Plant production rate established with exit stream flow.

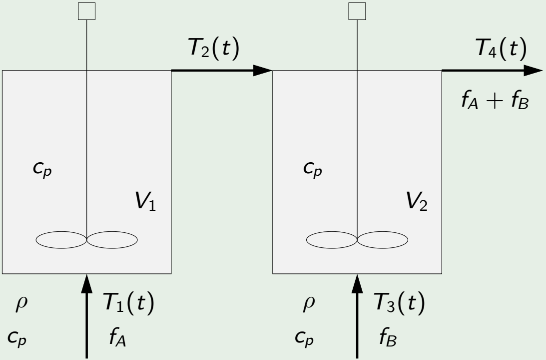
(*b*) Upstream method: Plant production rate established with inlet stream flow.

Figura: Fonte: Dale E. Seborg, Thomas F. Edgar, Duncan A. Mellichamp, Francis J. Doyle III. Process Dynamics and Control, 3rd Edition.

Sistemas não-interativos

Exemplo: Reservatório térmico em série

Considere o sistema



- f_A, f_B constantes $\Rightarrow$ V_1, V_2 constantes
- ρ, c_p constantes

- Como $T_4(t)$ é afetado por $T_1(t)$ e $T_3(t)$?

Sistemas não-interativos

- Balanço de energia VC1:

$$m_1 \frac{d\hat{H}_2}{dt} = \dot{m}_A \hat{H}_1 - \dot{m}_A \hat{H}_2$$

$$\rho V_1 \frac{d}{dt}(c_p T_2(t)) = \rho f_A c_p T_1(t) - \rho f_A c_p T_2(t)$$

- Balanço de energia VC2:

$$\rho V_2 \frac{d}{dt}(c_p T_4(t)) = \rho f_A c_p T_2(t) + \rho f_B c_p T_3(t) - \rho(f_A + f_B) c_p T_4(t)$$

Sistemas não-interativos

- Em estado estacionário:

$$\begin{cases} \bar{T}_1 - \bar{T}_2 = 0 \\ f_A \bar{T}_2 + f_B \bar{T}_3 - (f_A + f_B) \bar{T}_4 = 0 \end{cases}$$

- Definindo variáveis de desvio:

$$\tilde{T}_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i, \qquad i = 1, \ldots, 4$$

- Reescrevendo,

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{f_A} \dfrac{d\tilde{T}_2(t)}{dt} + \tilde{T}_2(t) = \tilde{T}_1(t) \\ \\ \dfrac{V_2}{f_A + f_B} \dfrac{d\tilde{T}_4(t)}{dt} + \tilde{T}_4(t) = \dfrac{f_A}{f_A + F_B} \tilde{T}_2(t) + \dfrac{f_B}{f_A + F_B} \tilde{T}_3(t) \end{cases}$$

Sistemas não-interativos

- Reescrevendo:

$$\begin{cases} \tau_1 \dfrac{d\,\tilde{T}_2(t)}{dt} + \tilde{T}_2(t) = \tilde{T}_1(t), \quad \tau_1 = \dfrac{V_1}{f_A} \\ \\ \tau_2 \dfrac{d\,\tilde{T}_4(t)}{dt} + \tilde{T}_4(t) = K_2\,\tilde{T}_2(t) + K_3\,\tilde{T}_3(t), \end{cases}$$

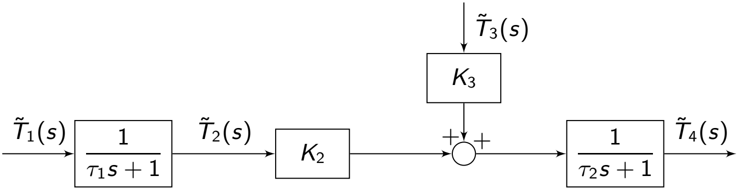
$$\tau_2 = \frac{V_2}{f_A + f_B}, \quad K_2 = \frac{f_A}{f_A + F_B}, \quad K_3 = \frac{f_B}{f_A + F_B}.$$

$$\begin{cases} \tilde{T}_2(s) = \dfrac{1}{\tau_1 s + 1}\,\tilde{T}_1(s) \\ \\ \tilde{T}_4(s) = \dfrac{K_2}{\tau_2 s + 1}\,\tilde{T}_2(s) + \dfrac{K_3}{\tau_2 s + 1}\,\tilde{T}_3(s) \end{cases}$$

$$\tilde{T}_4(s) = \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\,\tilde{T}_1(s) + \frac{K_3}{\tau_2 s + 1}\,\tilde{T}_3(s)$$

Sistemas não-interativos

- Diagrama de blocos



- Como seria o diagrama de blocos se f_A e f_B não fossem constantes?

Sistemas não-interativos

- Representação no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

em que x são os estados do sistema e u o vetor dos sinais de controle, ambos expressos em variáveis de desvio.

- Tem-se

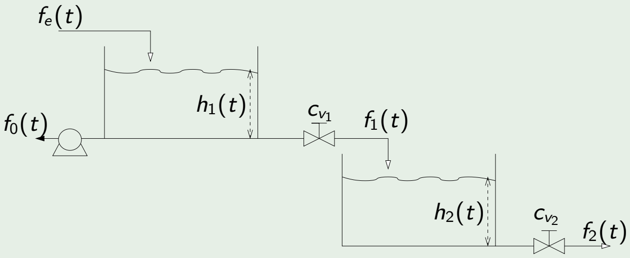
$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{T}}_2(t) \\ \dot{\tilde{T}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ K_2/\tau_2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_2(t) \\ \tilde{T}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\tau_1 & 0 \\ 0 & K_3/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t) \\ \tilde{T}_3(t) \end{bmatrix}$$

e portanto

$$x(t) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2(t) \\ \tilde{T}_4(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t) \\ \tilde{T}_3(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ K_2/\tau_2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\tau_1 & 0 \\ 0 & K_3/\tau_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: processo de nível não-interativo

Seja o processo



- Deseja-se saber como $h_2(t)$ é afetado por $f_e(t)$ e $f_o(t)$?
- O fluxo através das válvulas é dado por $f(t) = C_v\sqrt{\dfrac{\Delta P(t)}{G_f}}$

C_v: coeficiente de vazão da válvula
G_f: densidade relativa [adm]

Sistemas não-interativos

- Considere:

$$\Delta P_i(t) = P_a + \rho g h_i(t) - P_a = \rho g h_i(t)$$

$$f_i(t) = C_{v_i}\sqrt{\frac{\rho g h_i(t)}{G_f}} = C'_{v_i}\sqrt{h_i(t)}, \qquad C'_{v_i} = C_{v_i}\sqrt{\frac{\rho g}{G_f}}$$

Logo,

$$\begin{cases} A_1\dfrac{dh_1(t)}{dt} = f_e(t) - f_o(t) - C'_{v_1}\sqrt{h_1(t)} \\ \\ A_2\dfrac{dh_2(t)}{dt} = C'_{v_1}\sqrt{h_1(t)} - C'_{v_2}\sqrt{h_2(t)} \end{cases}$$

Sistemas não-interativos

Análise de graus de liberdade

- Parâmetros: $A_1, \; A_2, \; C'_{v_1}, \; C'_{v_2}$
- Número de equações: $N_E = 2$
- Número de variáveis: $N_V = 4 \; (h_1, \; h_2, \; f_e, \; f_o)$
- Graus de liberdade: $f = N_V - N_E = 2$
- Classificação das varáveis:
  - Variáveis de saída: h_1 e h_2
  - Variáveis de entrada: f_e e f_o $\rightarrow$ distúrbio ou var. manipulada
    - $f_e \rightarrow$ distúrbio $\rightsquigarrow$ escolha do projetista
    - $f_o \rightarrow$ var. manipulada (MV) $\rightsquigarrow$ escolha do projetista
    - Obs.: Mesmo que f_e e f_o sejam MV, não é possível controlar h_1 e h_2 simultaneamente. Por que?

Opção para controle de h_1 e h_2:

$$\begin{matrix} C'_{v_1} \rightarrow C'_{v_1}(t) \\ C'_{v_2} \rightarrow C'_{v_2}(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} N_E = 2 \\ N_V = 6 \end{matrix} \Rightarrow f = 4 \begin{cases} \text{distúrbio: } f_e, f_o \\ \text{var. manipulada (MV): } C'_{v_1}(t), C'_{v_1}(t) \end{cases}$$

Sistemas não-interativos

- Linearizando em torno de $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$:

$$f_i(t) \approx \bar{f}_i + c_i(h_i(t) - \bar{h}_i), \qquad c_i = \left.\frac{\partial f_i}{\partial h_i}\right|_{\bar{h}_i} = \frac{1}{2} C'_{v_i} (\bar{h}_i)^{-1/2}, \qquad i = 1{,}2$$

Tem-se

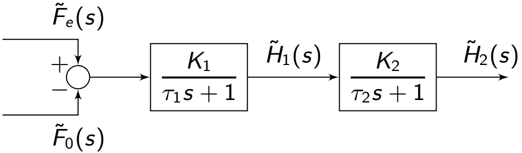
$$\tilde{H}_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \tilde{F}_e(s) - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \tilde{F}_o(s)$$

$$\tilde{H}_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \tilde{H}_1(s) = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} (\tilde{F}_e(s) - \tilde{F}_o(s))$$

em que $\tau_i = \dfrac{A_i}{c_i}$, $K_1 = \dfrac{1}{c_1}$, $K_2 = \dfrac{c_1}{c_2}$, $i = 1{,}2$.

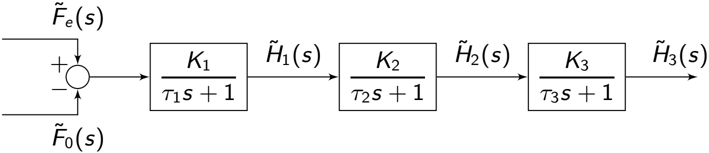
Sistemas não-interativos

- Diagrama de blocos



- Obs.: Sistema pode ser de n-ésima ordem porém os polos serão sempres reais nesse caso (resposta sobreamortecida ou criticamente amortecida)

- Exemplo: 3 tanques não-interativos



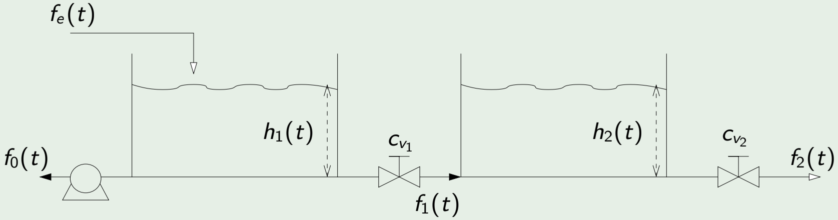
Sumário

Sistemas interativos

- Em processos interativos mudanças em unidades *downstream* influenciam unidades *upstream* e vice-versa.

Exemplo de processo interativo

- Seja o sistema de nível interativo



⇝ Verifique como o nível do segundo reservatório $h_2(t)$ é influenciado pelos fluxos $f_e(t)$ e $f_0(t)$.

- Assuma regime de escoamento turbulento, logo

$$\begin{cases} f_1(t) = C'_{v_1}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \\ f_2(t) = C'_{v_2}\sqrt{h_2(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1(t)}{dt} = f_e(t) - f_0(t) - f_1(t) \\ \\ A_2 \dfrac{dh_2(t)}{dt} = f_1(t) - f_2(t) \end{cases}$$

- Linearizando em torno de $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$:

$$f_2(t) \approx \bar{f}_2 + c_2(h_2(t) - \bar{h}_2), \qquad c_2 = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_{\bar{h}_2} = \frac{1}{2} C'_{v_2} (\bar{h}_2)^{-1/2}$$

$$f_1(t) \approx \bar{f}_1 + c_{11}(h_1(t) - \bar{h}_1) + c_{12}(h_2(t) - \bar{h}_2), \qquad c_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_{\bar{h}_1, \bar{h}_2}, \qquad c_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_{\bar{h}_1, \bar{h}_2}$$

Sistemas interativos

$$c_1 = c_{11} = -c_{12} = \frac{1}{2} C'_{v_1} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)^{-1/2}$$

- Logo,

$$\tilde{H}_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} [\tilde{F}_e(s) - \tilde{F}_0(s)] + \frac{1}{\tau_1 s + 1} \tilde{H}_2(s), \tag{1}$$

$$\tau_1 = \frac{A_1}{c_1}, \qquad K_1 = \frac{1}{c_1}$$

e

$$\tilde{H}_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \tilde{H}_1(s), \tag{2}$$

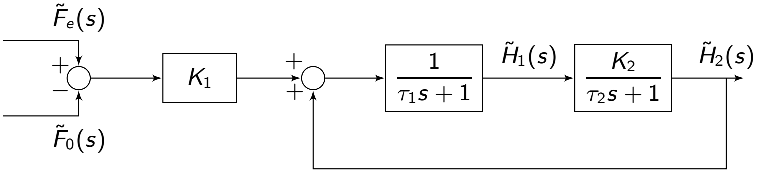
$$\tau_2 = \frac{A_2}{c_1 + c_2}, \qquad K_2 = \frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

- Substituindo (1) em (2),

$$\tilde{H}_2(s) = \frac{K_1K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}[\tilde{F}_e(s) - \tilde{F}_0(s)] + \frac{K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\tilde{H}_2(s)$$

$$\tilde{H}_2(s) = \frac{\dfrac{K_1K_2}{1-K_2}}{\left(\dfrac{\tau_1\tau_2}{1-K_2}\right)s^2 + \left(\dfrac{\tau_1+\tau_2}{1-K_2}\right)s + 1}[\tilde{F}_e(s) - \tilde{F}_0(s)]$$

- Diagrama de blocos:



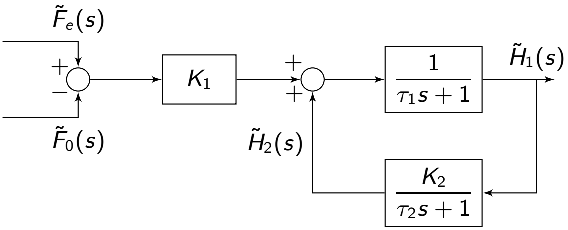
Sistemas interativos

- Observe que

$$\tilde{H}_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}[\tilde{F}_e(s) - \tilde{F}_0(s)] + \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\tilde{H}_1(s)$$

$$\tilde{H}_1(s) = \frac{K_1(\tau_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - K_2}[\tilde{F}_e(s) - \tilde{F}_0(s)] \qquad \text{(sistema de 2}^{\underline{a}}\text{ ordem com zero)}$$

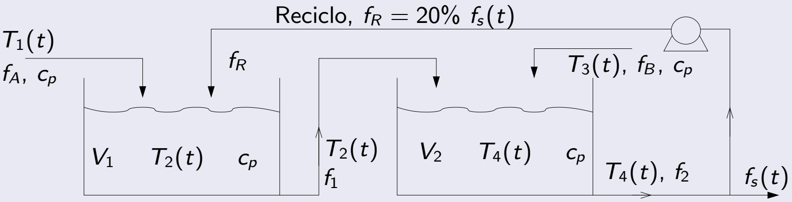
- Diagrama de blocos:



Processos com reciclo

Exercício

Seja o sistema com reciclo de 20% do fluxo total para fora do processo



⇝ Verifique como a temperatura do segundo reservatório $T_4(t)$ é influenciada pelas temperaturas dos fluxos de entrada $T_1(t)$ e $T_3(t)$.

Observe que

$$f_s = f_A + f_B, \qquad f_1 = f_A + f_R$$
$$f_R = 0,2f_s, \qquad f_2 = f_B + f_1 = f_s + 0,2f_s$$

Exercício

- Equações diferenciais do processo

$$
\begin{aligned}
V_1\rho cp\frac{dT2(t)}{dt} &= f_A\rho cpT_1(t) + [0.2(f_A+f_B)]\rho cpT_4(t) - [f_A + 0.2(f_A+f_B)]\rho cpT_2(t) \\
V_2\rho cp\frac{dT4(t)}{dt} &= [f_A + 0.2(f_A+f_B)]\rho cpT_2(t) + f_B\rho cpT_3(t) - [1.2(f_A+f_B)]\rho cpT_4(t)
\end{aligned}
$$

- Dinâmica no domínio s

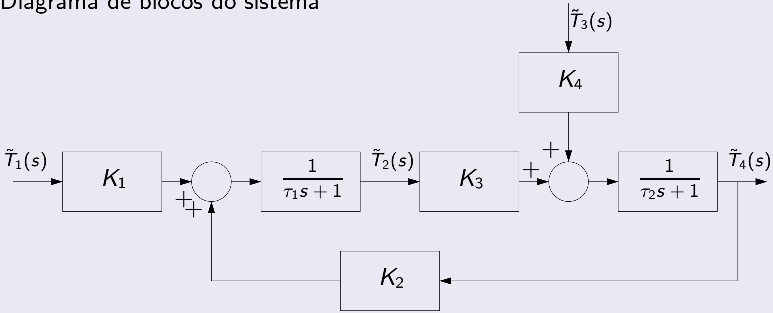
$$
\begin{aligned}
\tilde{T}_2(s) &= \frac{K_1}{\tau_1 s+1}\tilde{T}_1(s) + \frac{K_2}{\tau_1 s+1}\tilde{T}_4(s) \\
\tilde{T}_4(s) &= \frac{K_3}{\tau_2 s+1}\tilde{T}_2(s) + \frac{K_4}{\tau_2 s+1}\tilde{T}_3(s)
\end{aligned}
$$

- Funções de transferência

$$
\frac{\tilde{T}_4(s)}{\tilde{T}_1(s)} = \frac{K_1K_3}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)-K_2K_3}, \qquad \frac{\tilde{T}_4(s)}{\tilde{T}_3(s)} = \frac{K_4(\tau_1 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)-K_2K_3}
$$

Exercício

- Diagrama de blocos do sistema



$$K_1 = \frac{f_A}{f_A + 0,2(f_A + f_B)}, \qquad K_2 = \frac{0,2(f_A + f_B)}{f_A + 0,2(f_A + f_B)}$$

$$K_3 = \frac{f_A + 0,2(f_A + f_B)}{1,2(f_A + f_B)}, \qquad K_4 = \frac{f_B}{1,2(f_A + f_B)}$$

$$\tau_1 = \frac{V_1}{f_A + 0,2(f_A + f_B)}, \qquad \tau_2 = \frac{V_2}{1,2(f_A + f_B)}$$

Sistemas interativos

- Representação no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

em que x são os estados do sistema e u o vetor dos sinais de controle, ambos expressos em variáveis de desvio.

- Tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{T}}_2(t) \\ \dot{\tilde{T}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & K_2/\tau_1 \\ K_3/\tau_2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_2(t) \\ \tilde{T}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1/\tau_1 & 0 \\ 0 & K_4/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t) \\ \tilde{T}_3(t) \end{bmatrix}$$

e portanto

$$x(t) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2(t) \\ \tilde{T}_4(t) \end{bmatrix}, \;\; u(t) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t) \\ \tilde{T}_3(t) \end{bmatrix}, \;\; A = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & K_2/\tau_1 \\ K_3/\tau_2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix}, \;\; B = \begin{bmatrix} K_1/\tau_1 & 0 \\ 0 & K_4/\tau_2 \end{bmatrix}$$

Representação no espaço de estados

- Seja um sistema linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Conversão de espaço de estados para função de transferência

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- No exemplo anterior temos

$$y(t) = x(t), \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad Y(s) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2(s) \\ \tilde{T}_4(s) \end{bmatrix}, \quad U(s) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t) \\ \tilde{T}_3(t) \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_2(s) \\ \tilde{T}_4(s) \end{bmatrix} = (sI - A)^{-1}B \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(t) \\ \tilde{T}_3(t) \end{bmatrix}$$

- Obs.: o termo $(sI - A)^{-1}$ pode ser calculado por meio do uso da matriz adjunta,m ou seja, $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\text{adj}(M)$, $M = sI - A$.