

107484 – Controle de Processos

Aula: Lugar das Raízes

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB

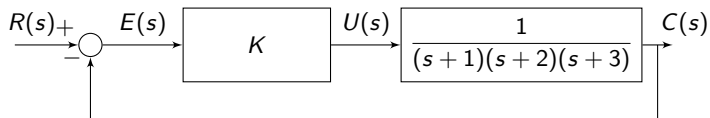


1º Semestre 2021

- 1 Lugar Geométrico das Raízes (LGR)
- 2 Procedimento
- 3 Especificações para LGR
- 4 Adição de polos e zeros no LGR
- 5 Controlador PID na forma polos e zeros

Motivação

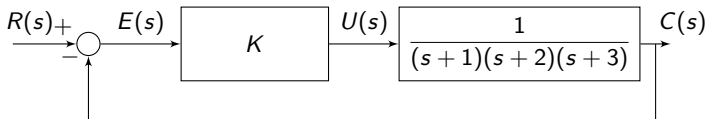
- Considere



↪ Há 3 polos da função de transferência de malha aberta: -1 , -2 e -3 .

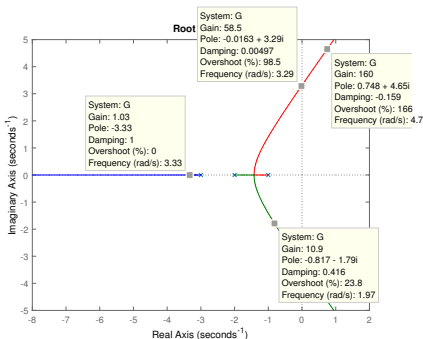
- Como evolui os polos da função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ à medida que se aumenta o ganho K de 0 a ∞ ?

- Considere



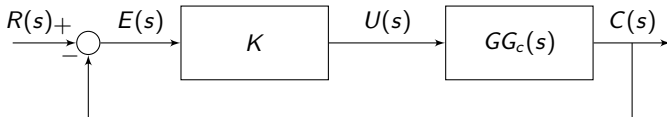
↪ Há 3 polos da função de transferência de malha aberta: -1 , -2 e -3 .

- Como evolui os polos da função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ à medida que se aumenta o ganho K de 0 a ∞ ?



Lugar Geométrico das Raízes (LGR)

- Determinar o lugar geométrico das raízes do polinômio característico (root loci) no plano s para valores diferentes de ganho de malha aberta (K).
- Faixa de valores de K estabilizantes e LGR adequado para desempenho em MF.
- $G_c(s)$: controlador (normalmente uma inversão da dinâmica da planta $G(s)$)
- $GG_c(s)$: função de transferência $G(s)G_c(s)$ com exceção do ganho estático



$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{KGG_c(s)}{1 + KGG_c(s)}, & GG_c(s) &= \frac{Num(s)}{Den(s)} \\ &= \frac{K \frac{Num(s)}{Den(s)}}{1 + K \frac{Num(s)}{Den(s)}} = \frac{K \cdot Num(s)}{Den(s) + K \cdot Num(s)} = \frac{q(s)}{p(s)}\end{aligned}$$

- Equação característica: $p(s) = Den(s) + K \cdot Num(s)$

Exemplo

• Seja $GG_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3) + K}$$

$$\begin{aligned} p(s) &= Den(s) + K \cdot Num(s) \\ &= (s+1)(s+2)(s+3) + K \end{aligned}$$

↪ Polos de malha fechada:

K	$p1$	$p2$	$p3$
0	-1	-2	-3
0.3	-1.2	-1.7	-3.1
+1	-1,3 + j0,5	-1,3 - j0,5	-3,3
+50	-0,1 + j3	-0,1 - j3	-5,7
+100	0,3 + j4	0,3 - j4	-6
∞	$\infty + j\infty$	$\infty - j\infty$	$-\infty$

$K = 0$: $p(s) = Den(s) = 0 \Rightarrow$ pólos de MF = pólos de MA

$K \rightarrow \infty$: $p(s) = Num(s) = 0 \Rightarrow$ pólos de MF = zeros MA

$$1 = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots$$

Conceito de lugar das raízes

- Raízes da equação característica da função de transferência de malha fechada

$$1 + G(s)G_c(s) = 0 \Rightarrow 1 + KGG_c(s) = 0 \Rightarrow KGG_c(s) = -1$$

Na forma polar

$$|KGG_c(s)| \angle KGG_c(s) = -1 + j0$$

Condição para pertencer ao *lugar das raízes*

$$\begin{cases} |KGG_c(s)| = 1 \\ \angle KGG_c(s) = 180^\circ \pm q360^\circ, \quad q = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Exemplo

$$G(s)G_c(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad |G(s)G_c(s)| = \frac{|K||s + z_1|}{|s + p_1| \cdot |s + p_2|} = 1$$

$$\angle G(s)G_c(s) = \angle(s + z_1) - \angle(s + p_1) - \angle(s + p_2) = 180^\circ \pm q360^\circ$$

Conceito de lugar das raízes

- Seja uma função de transferência do sistema em malha fechada $G_{mf}(s)$ com equação característica $p(s)$ (denominador de $G_{mf}(s)$) que depende de um certo parâmetro K (em geral o ganho estático do controlador).
- O **Lugar das Raízes** consiste no lugar geométrico das raízes (valores no plano- s) de $p(s)$ ao variar o parâmetro K de 0 à $+\infty$.

Partida e chegada do Lugar das Raízes

- Pontos de partida: raízes de (valores de s tal que) $p_p(s) := \lim_{K \rightarrow 0} p(s) = 0$
- Pontos de chegada: raízes de (valores de s tal que) $p_c(s) := \lim_{K \rightarrow \infty} p(s) = 0$

Observações

- Em geral o número de raízes de $p_p(s)$ é superior ao número de raízes de $p_c(s)$ \rightsquigarrow parte das raízes vão para $\pm\infty$ (assíntotas) quando $K \rightarrow \infty$;
- Se eq. característica na forma $p(s) = 1 + KH(s) = 0$ então raízes de $p_p(s)$ são os polos de $H(s)$ e raízes de $p_c(s)$ são os zeros de $H(s)$;
- O LGR são os valores de s tais que $\angle H(s) = 180^\circ \pm q360^\circ$, $q = 0, 1, 2, \dots$
- Em situações especiais a análise pode-se dar variando o ganho de 0 à $-\infty$.

Condição de ângulo

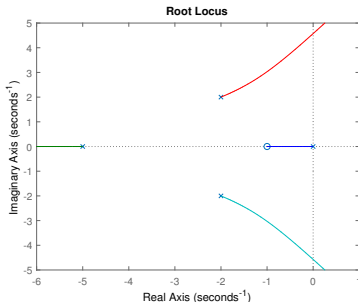
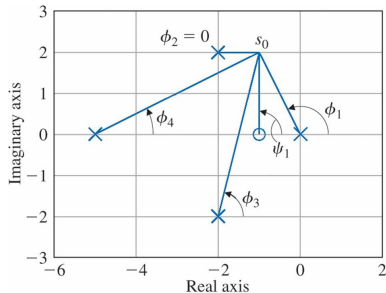
- Seja a equação característica

$$1 + KL(s) = 0, \quad L(s) = \frac{s + 1}{s(s + 5)((s + 2)^2 + 4)}$$

↪ Condição de ângulo para um determinado valor de s dado por $s_0 = -1 + 2j$:

$$\begin{aligned}\angle KL(s) &= \angle(s_0 + 1) - \angle(s_0) - \angle(s_0 + 2 - 2j) - \angle(s_0 + 2 + 2j) - \angle(s_0 + 5) \\ &= \psi_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 \\ &= 90^\circ - 116.6^\circ - 0^\circ - 76^\circ - 26.6^\circ = -129.2^\circ \neq 180^\circ \pm q360^\circ\end{aligned}$$

∴ s_0 não faz parte do LGR.



- 1 Lugar Geométrico das Raízes (LGR)
- 2 Procedimento**
- 3 Especificações para LGR
- 4 Adição de polos e zeros no LGR
- 5 Controlador PID na forma polos e zeros

Procedimento

- Inicialmente deve-se escrever a equação característica da função de transferência de malha fechada na forma ganho-pólo-zero

$$1 + K G G_c(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{\prod_i^m (s + z_i)}{\prod_j^n (s + p_j)} = 0$$

① Colocar polos (x) e zeros (o) de MA (laço), ou seja, $G G_c(s)$, no plano s .

- Pólos de MF:
- Partem dos pólos em MA ($K = 0$)
- Destino nos zeros em MA ($K = \infty$)

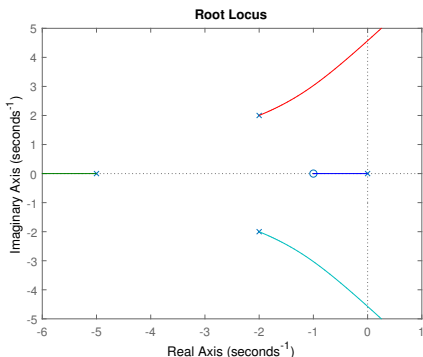
$$Den(s) + K \cdot Num(s) = 0$$

$$\begin{cases} k = 0 & \Leftrightarrow Den(s) = 0 \\ k = \infty & \Leftrightarrow \frac{1}{K} \cdot Den(s) + Num(s) = 0 \\ & Num(s) = 0 \end{cases}$$

Obs.: Pólos sem zeros respectivos vão para $\pm\infty$ (zeros em $\pm\infty$)

Procedimento

- 2) Número de ramificações igual a número de polos de $GG_c(s)$.
- 3) Para $K \geq 0$, qualquer ponto no eixo real à esquerda de um número ímpar de singularidades (pólos e zeros) faz parte do LGR.
- 4) O LGR é simétrico em relação ao eixo real (devido aos polos complexos serem conjugados).



5) Se houver zeros em ∞ , o LGR tende a ∞ ($s \rightarrow \infty$) com **assíntotas**:

• Ponto de partida:

$$\sigma_o = \frac{\sum_{i=1}^{np} \operatorname{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^{nz} \operatorname{Re}(z_j)}{np - nz}, \quad \begin{array}{l} np: \text{número de polos} \\ nz: \text{número de zeros} \end{array}$$

• Ângulo:

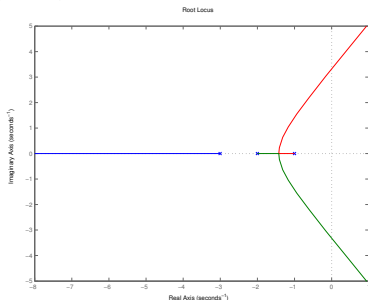
$$\gamma = \frac{180^\circ(2q + 1)}{np - nz}, \quad q = 0, 1, \dots, (np - nz - 1)$$

Exemplo

$$GG_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad \begin{array}{l} nz = 0 \\ np = 3 \end{array}$$

$$\sigma_o = \frac{(-1 - 2 - 3) - (0)}{3} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$\gamma = \frac{(1 + 2 \cdot 0)180^\circ}{3}, \frac{(1 + 2 \cdot 1)180^\circ}{3}, \frac{(1 + 2 \cdot 2)180^\circ}{3}$$
$$= 60^\circ, 180^\circ, -60^\circ$$



- ⑥ Pontos de separação de partida e de chegada (raízes múltiplas no eixo real).

$$GG_c(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow p(s) = D(s) + K \cdot N(s) = 0$$

$$p'(s) = \left. \frac{dp(s)}{ds} \right|_{s=s^*} = 0 \Rightarrow K = -\frac{D'(s)}{N'(s)}$$

- Substituindo K em $p(s)$ obtém-se $D'(s^*)N(s^*) - D(s^*)N'(s^*) = 0$

Portanto, basta resolver

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{D'(s^*)N(s^*) - D(s^*)N'(s^*)}{N^2(s^*)} = 0$$

- As raízes s^* da equação acima são válidas se fornecem $K \geq 0$. Os valores de K em que ocorre a partida/chegada:

$$K = -\frac{D(s^*)}{N(s^*)} \geq 0$$

Pontos de partida e chegada

- Exemplo: Seja

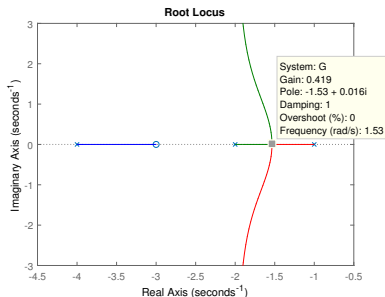
$$1 + L(s) = 0, \quad L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

As raízes de

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0 \Leftrightarrow (3s^2 + 14s + 14)(s + 3) - (s^3 + 7s^2 + 14s + 8)(1) = 0$$

são -1.53 e $-3.23 \pm j0.79$.

\therefore O ponto de partida é -1.53 que ocorre com $K = -\frac{D(-1.53)}{N(-1.53)} = 0.419$.



⑦ Se for o caso, calcular o ganho no cruzamento dos polos pelo eixo imaginário

→ Aplicar critério de Routh ou Substituição Direta.

⑧ Para determinar o ângulo de partida de pólos complexos e o ângulo de chegada de zeros complexos usar a condição de fase em um ponto s^* na vizinhança de do pólo/ zero complexo

$$\sum_{i=1}^{nz} \angle(s^* + z_i) - \sum_{j=1}^{np} \angle(s^* + p_j) = 180^\circ \pm q360^\circ$$

● Exemplo 1: Seja $p_1 = 0$, $p_2 = -4 + j4$, $p_3 = -4 - j4$ e $z_1 = -4$

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - 135^\circ - \theta_{p_2} - 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta_{p_2} = 45^\circ$$

● Exemplo 2: Seja $p_1 = 0$, $p_2 = -4 + j4$, $p_3 = -4 - j4$ e $p_4 = -4$

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} + \theta_{p_4} = 180^\circ \Rightarrow 135^\circ + \theta_{p_2} + 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta_{p_2} = -135^\circ \text{ ou } +225^\circ$$

⑨ Determinação do ganho K_x para uma raiz específica s_x

$$D(s) + KN(s) = 0 \Rightarrow K_x = -\frac{D(s_x)}{N(s_x)} \Rightarrow K_x = \frac{\prod_{i=1}^{np} |(s_x - p_i)|}{\prod_{j=1}^{nz} |(s_x - z_j)|}$$

Resumo

Aspectos qualitativos:

- 1 Escrever eq. característica na forma $1 + K \frac{\prod_i^n z(s + z_i)}{\prod_j^n p(s + p_j)} = 0$
- 2 Colocar polos (x) e zeros (o) no plano s.
- 3 Identificar LGR no eixo real: **à esquerda de um número ímpar** de pólos e zeros.
- 4 Desenhar as $(np - nz)$ assíntotas cujos pontos de partida e ângulos são:

$$\sigma_o = \frac{\sum_{i=1}^{np} \operatorname{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^{nz} \operatorname{Re}(z_j)}{np - nz}, \quad \gamma = \frac{180^\circ(2q + 1)}{np - nz}, \quad q = 0, \dots, (np - nz - 1)$$

Aspectos quantitativos:

- 5 Identificar pontos s^* de partida ou chegada no plano real:

$$D'(s^*)N(s^*) - D(s^*)N'(s^*) = 0$$

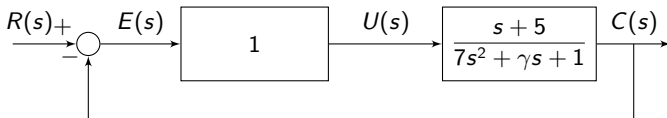
- 6 Determinar ângulos de partida (chegada) em pólos (zeros) complexos.
- 7 Se for o caso, determinar ponto de cruzamento com eixo real (ω_u, K_u) .

Observações

- Aplicado a sistemas de uma entrada e uma saída (SISO)
- No eixo real o LGR é construído da direita para a esquerda
- Procedimento apresentado é válido para $K > 0$, ou seja, $K \in [0, +\infty)$
- Quando há zero positivo (SPD) ou o ganho estático de $G(s)$ é negativo
 $\rightsquigarrow K < 0$ para estabilizar ou para que erro reg. permanente $\rightarrow 0$
 - Para $K < 0$: LGR no eixo real à **esquerda de um no. par** de singularidades; $\gamma = \pm \frac{q360^\circ}{np - nz}$, $q = 0, \dots, (np - nz - 1)$
- Atrasos \rightarrow aproximações (ex.: Padé)

Exemplo 1

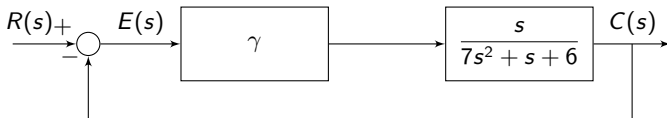
- Considere o caso



Efeito variação γ nos polos de MF?

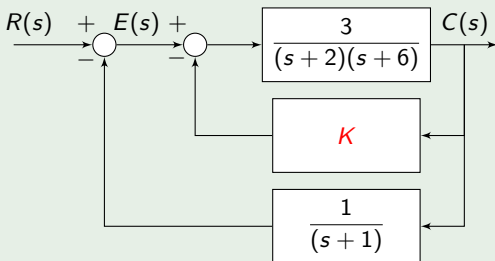
$$\begin{aligned} p(s) &= (7s^2 + \gamma s + 1) + 1(s + 5) \\ &= (7s^2 + s + 6) + \gamma(s) \\ &= Den(s) + K \cdot Num(s) \end{aligned}$$

$$G'(s) = \gamma \frac{s}{7s^2 + s + 6}$$



Exemplo II

- Considere o diagrama de blocos mostrado na figura abaixo



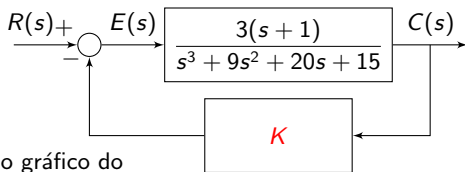
Desenhe o lugar geométrico das raízes (LGR) do sistema $C(s)/R(s)$ para $K \in [0, \infty)$.

Exemplo II

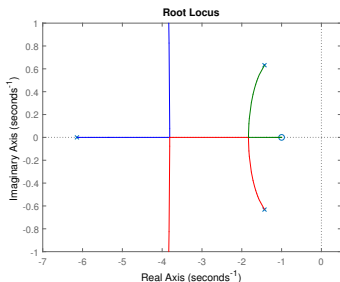
- O sistema em malha fechada é dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3(s+1)}{s^3 + 9s^2 + 20s + 15 + K(3s+3)}$$

- Observe que o sistema em malha fechada é equivalente ao seguinte diagrama

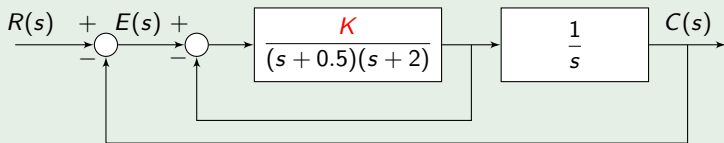


↪ Observe que no gráfico do LGR deve-se considerar como polos (×) as raízes de $s^3 + 9s^2 + 20s + 15 = 0$ ($-6.1; -1.4 \pm j0.6$ ↪ raízes da eq. característica do sist. em MF com $K = 0$) e como zeros (○) as raízes de $3s + 3 = 0$ (-1 ↪ raízes finitas da eq. característica do sist. em MF com $K \rightarrow \infty$).



Exemplo III

- Considere o diagrama de blocos mostrado na figura abaixo



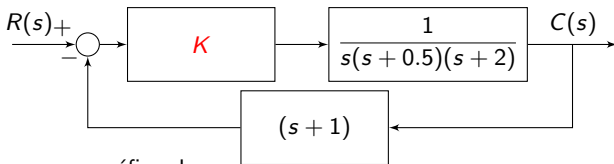
Desenhe o lugar geométrico das raízes (LGR) do sistema $C(s)/R(s)$ para $K \in [0, \infty)$.

Exemplo III

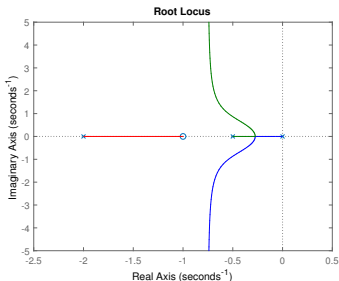
- O sistema em malha fechada é dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s + 0.5)(s + 2) + K(s + 1)} \quad \rightsquigarrow \text{sem zeros finitos}$$

- Observe que o sistema em malha fechada é equivalente ao seguinte diagrama

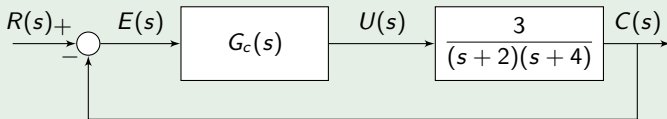


\rightsquigarrow Observe que no gráfico do LGR deve-se considerar como polos (\times) as raízes de $s(s + 0.5)(s + 2) = 0$ (raízes da eq. característica do sist. em MF com $K = 0$) e como zeros (\circ) as raízes de $s + 1 = 0$ (raízes finitas da eq. característica do sist. em MF com $K \rightarrow \infty$).



Exemplo IV

- Considere o diagrama de blocos mostrado na figura abaixo



Considere 3 cenários: $G_c(s)$ um controlador tipo P, PI e PID em que o ganho proporcional é dado por K .

Desenhe o lugar geométrico das raízes (LGR) do sistema $C(s)/R(s)$ para $K \in [0, \infty)$ para cada um dos cenários.

Exemplo IV

● Controlador Proporcional (P)

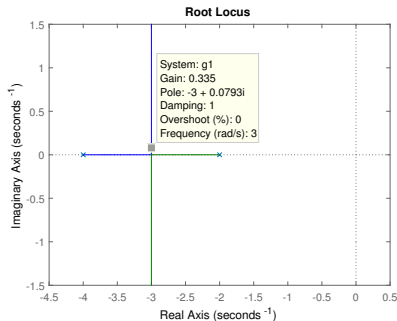


Figura: $G_c(s) = K$.

● Controlador Proporcional-Integral (PI)

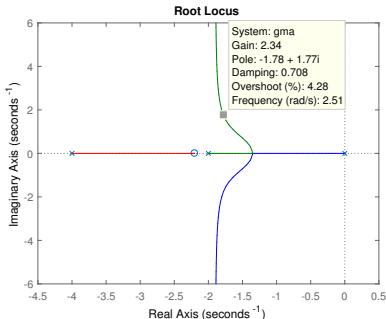


Figura: $G_c(s) = K(1 + 2.2/s)$,
 $T_i = 1/2.2$.

Exemplo IV

- Controlador PID com zeros reais

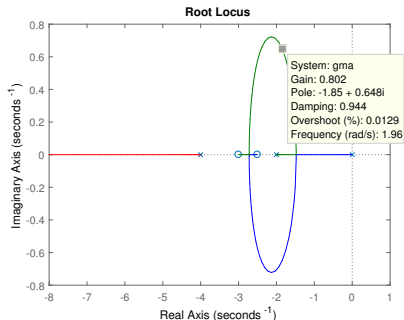


Figura: $G_c(s) = K\left(\frac{s^2 + 5.5s + 7.5}{s}\right)$.

- Controlador PID com zeros complexos conjugados

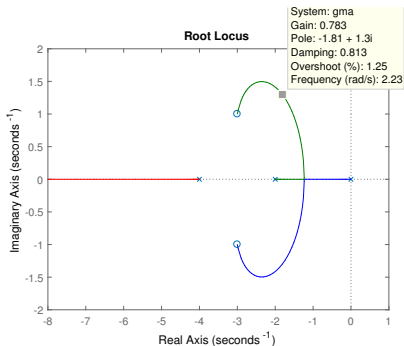
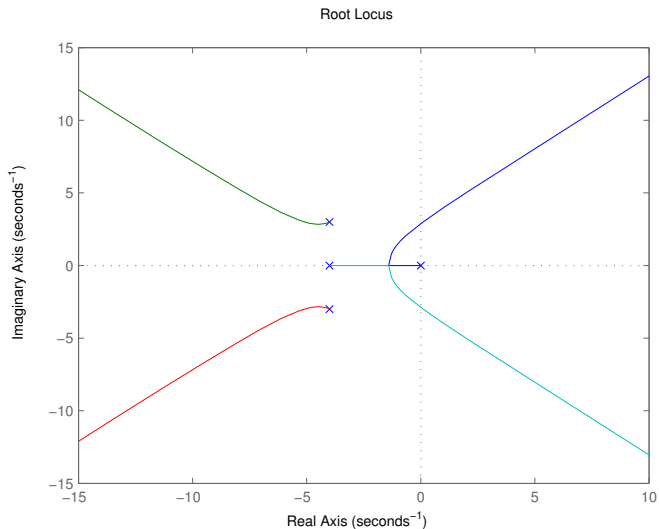
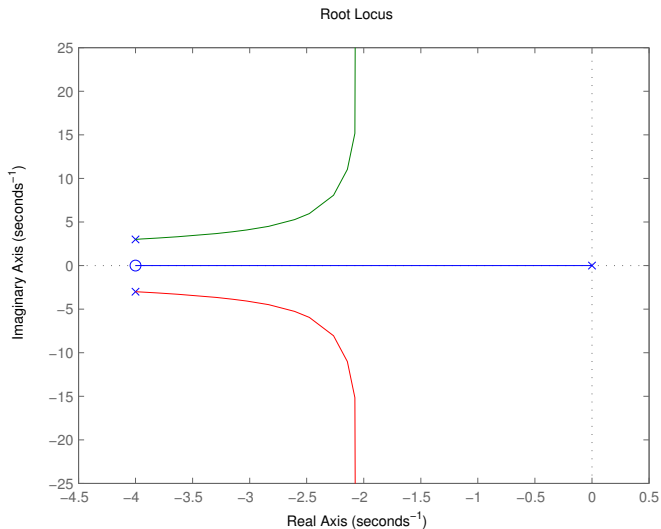


Figura: $G_c(s) = K\left(\frac{s^2 + 6s + 10}{s}\right)$.

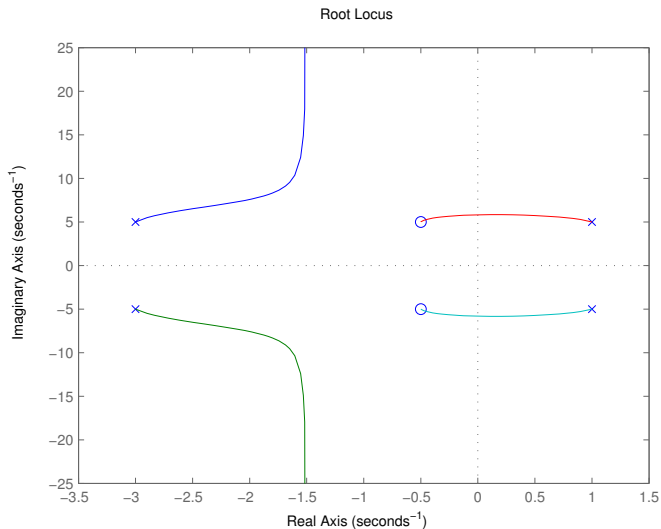
Exemplo V



Exemplo VI



Exemplo VII



Exemplo VIII - Ganho estático do sistema negativo

- Seja o controlador proporcional $G_c(s) = K_c$ e o processo

$$G(s) = \frac{-2(3s + 1)}{5s^2 + 2s + 1}, \text{ ganho estático: } G(0) = -2; \text{ polos: } -0.2 \pm j0.4; \text{ zero: } -1/3$$

- Eq. característica do sist. em MF: $p(s) = (5s^2 + 2s + 1) + (-K_c)(6s + 2)$
- Aplicando o critério de estabilidade de Routh em $p(s) = 0$ tem-se $K_c < 1/2$ e $K_c < 1/3$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para $-\infty < K_c < 1/3$.

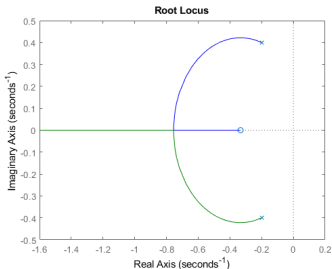
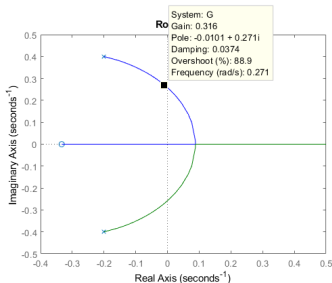


Figura: LGR para $K_c \in [0, +\infty)$ (à esquerda) e para $K_c \in [0, -\infty)$ (à direita).

Exemplo IX - Zero no semiplano direito (SPD)

- Seja o controlador proporcional $G_c(s) = K_c$ e o processo

$$G(s) = \frac{2(-3s + 1)}{5s^2 + 2s + 1}, \text{ ganho estático: } G(0) = 2; \text{ polos: } -0.2 \pm j0.4; \text{ zero: } +1/3$$

- Eq. característica do sist. em MF: $p(s) = (5s^2 + 2s + 1) + (-K_c)(6s - 2)$
- Aplicando o critério de estabilidade de Routh em $p(s) = 0$ tem-se $K_c < 1/3$ e $K_c > -1/1$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para $-1/2 < K_c < 1/3$.

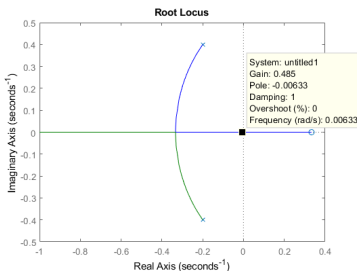
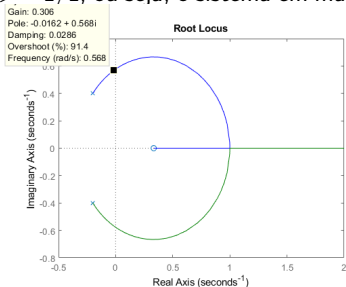


Figura: LGR para $K_c \in [0, +\infty)$ (à esquerda) e para $K_c \in [0, -\infty)$ (à direita).

Exemplo X - Ganho estático negativo e zero no SPD

- Seja o controlador proporcional $G_c(s) = K_c$ e o processo

$$G(s) = \frac{-2(-3s + 1)}{5s^2 + 2s + 1}, \text{ ganho estático: } G(0) = -2; \text{ polos: } -0.2 \pm j0.4; \text{ zero: } +1/3$$

- Eq. característica do sist. em MF: $p(s) = (5s^2 + 2s + 1) + (K_c)(6s - 2)$
- Aplicando o critério de estabilidade de Routh em $p(s) = 0$ tem-se $K_c < 1/2$ e $K_c > -1/3$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para $-1/3 < K_c < 1/2$.

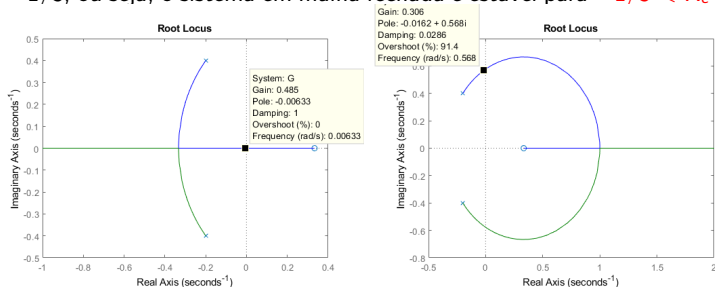


Figura: LGR para $K_c \in [0, +\infty)$ (à esquerda) e para $K_c \in [0, -\infty)$ (à direita).

Exemplos diversos

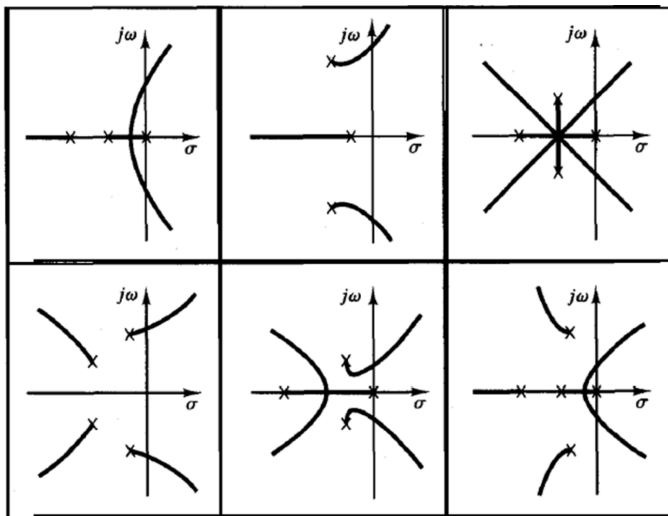


Figura: Exemplos LGR.

Exemplos diversos

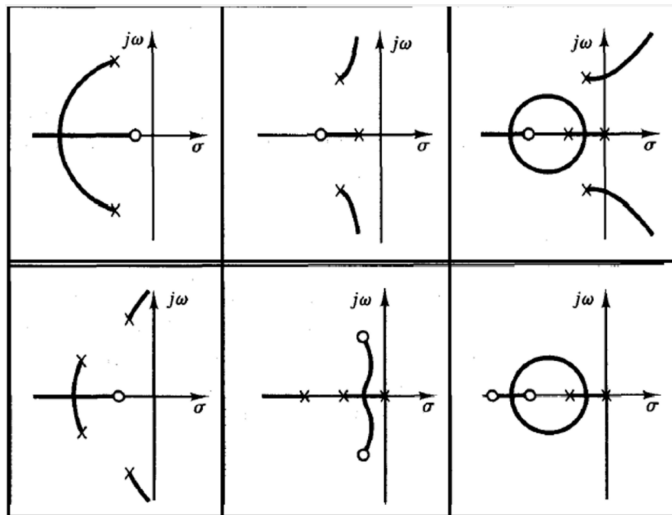


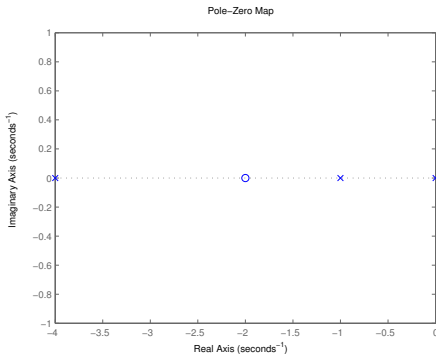
Figura: Exemplos LGR.

Exercício

Desenhe o lugar das raízes dados os pólos e zeros de malha aberta abaixo. Considere 3 cenários:

- 1 Pólo mais afastado em $s = -4$ (figura abaixo).
- 2 Pólo mais afastado em $s = -20$.
- 3 Pólo mais afastado em $s = -13.54$.

Dicas: Calcule os pontos de partida e chegada dos pólos complexos no eixo real para cada caso.



- 1 Lugar Geométrico das Raízes (LGR)
- 2 Procedimento
- 3 Especificações para LGR**
- 4 Adição de polos e zeros no LGR
- 5 Controlador PID na forma polos e zeros

Especificações para LGR

- Sistema de 2^a ordem $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$ ou $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$
- Especificação resposta transiente subamortecida

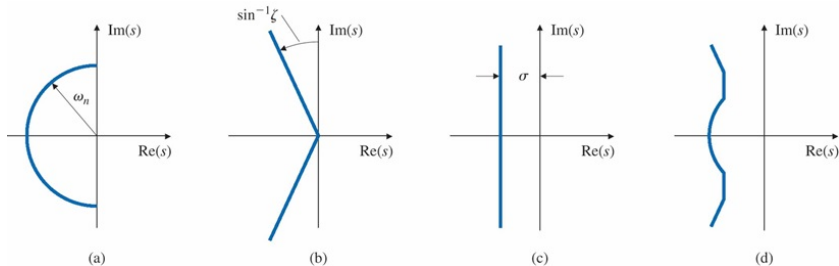


Figura: Lugar geométrico dos pólos no plano-s de acordo com especificação resposta transiente subamortecida (a) tempo de subida

$t_R \approx 1.8\tau = 1.8/\omega_n$; (b) sobressinal $M = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$; (c) tempo de acomodação $t_s = 4\tau/\zeta = 4/\sigma$ (critério de 2^o); (d) composição das três anteriores (região à esquerda da curva azul) [Franklin, Powell & Emami-Naeini 2013].

- 1 Lugar Geométrico das Raízes (LGR)
- 2 Procedimento
- 3 Especificações para LGR
- 4 Adição de polos e zeros no LGR**
- 5 Controlador PID na forma polos e zeros

Adição de polos e zeros no LGR

● Adição de polos:

- "puxa" o LGR para direita (\downarrow estabilidade, $\uparrow t_s$)
- pólo na origem $\rightarrow e_{ss}$ nulo
- Exemplo: **controlador PI** $G_c(s) = K_c \left(\frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \right)$
- PI visto como **controlador atraso** $G_c(s) = K_c \left(\frac{s + z}{s + p} \right)$, $z > p \geq 0$

● Adição de zeros:

- "puxa" o LGR para esquerda (\uparrow estabilidade, $\downarrow t_s$)
- e_{ss} tendem a aumentar
- Exemplo: **controlador PD** $G_c(s) = K_c(1 + \tau_d s)$
- PD visto como **controlador avanço** $G_c(s) = K_c \left(\frac{s + z}{s + p} \right)$, $z \ll p$

- 1 Lugar Geométrico das Raízes (LGR)
- 2 Procedimento
- 3 Especificações para LGR
- 4 Adição de polos e zeros no LGR
- 5 Controlador PID na forma polos e zeros

Controlador PID na forma polos e zeros

- PI

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = K_c \left(\frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \right)$$
$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ z_1 = -\frac{1}{\tau_i} \end{cases}$$

- PID

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) = K_c \left(\frac{s^2 \tau_i \tau_d + s \tau_i + 1}{\tau_i s} \right)$$

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ z_{1,2} = \frac{-\tau_i \pm \sqrt{\tau_i^2 - 4\tau_i \tau_d}}{2\tau_i \tau_d} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\tau_d}{\tau_i}}}{2\tau_d}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{zeros reais:} \\ \frac{\tau_d}{\tau_i} < \frac{1}{4} \\ \tau_i > 4\tau_d \end{array}$$

Exemplo I: projeto PI/PID

- Escolha a estrutura do controlador (PI/PID) e posicione os zeros tal que o sistema seja estável para $\forall K \geq 0$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)^2}$$

- Controlador proporcional (P): $G_c(s) = K_c$

$$(s+1)(s^2+6s+9) = s^3+7s^2+15s+9$$

$$D'(s) = 3s^2 + 14s + 15$$

$$N'(s) = 0$$

↪ Pontos de encontro ou partida no eixo real

$$\frac{D'(s^*)N(s^*) - D(s^*)N'(s^*)}{N(s^*)^2} = 0 \Rightarrow s^* = -3; -\frac{5}{3}$$

↪ Ganho em s^* e no cruzamento com o eixo imaginário (ganho último)

$$K = -\frac{D(s^*)}{N(s^*)} = 1,1852$$

Routh-Hurwitz

$$K_u = 95,9$$

Exemplo I: projeto PI/PID

- Controlador PID

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) = K_c \left(\frac{s^2 \tau_i \tau_d + s \tau_i + 1}{\tau_i s} \right) = K_c \left(\frac{s^2 + s/\tau_d + 1/(\tau_i \tau_d)}{s/\tau_d} \right)$$

↪ Um pólo na origem e dois zeros:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau_d/\tau_i}}{2\tau_d}$$

↪ Projeto de τ_i e τ_d para posicionar os zeros em $-1/2$ e -2

$$\left(s + \frac{1}{2} \right) (s + 2) = s^2 + \frac{1}{\tau_d} s + \frac{1}{\tau_i \tau_d}$$

$$s^2 + \frac{5}{2} s + 1 \Rightarrow \tau_d = \frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{\tau_i 2} = 1 \Rightarrow \tau_i = \frac{5}{2}$$

Exemplo II: como estabilizar?

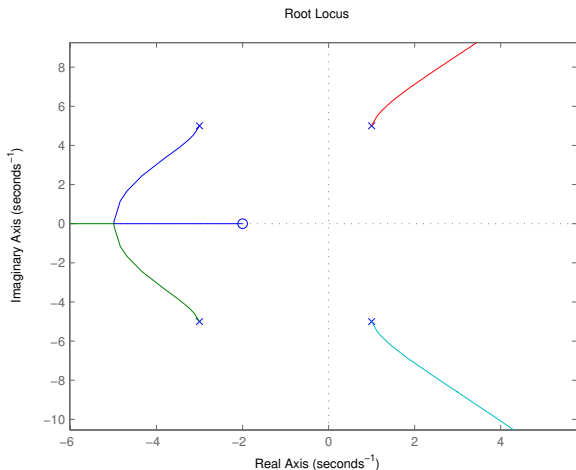


Figura: LGR de sistema instável para qualquer ganho proporcional positivo.

Exemplo II: como estabilizar?

↪ Solução: controlador PID

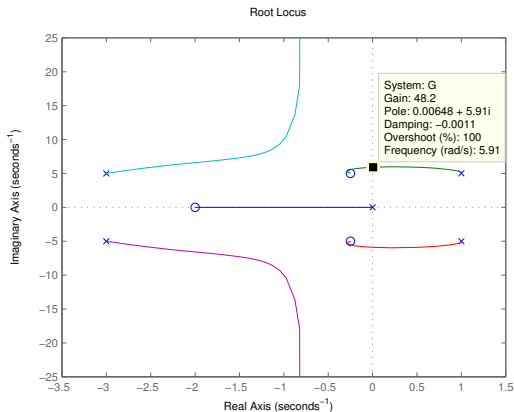


Figura: LGR com a adição de um controlador PID com um pólo na origem e dois zeros complexos conjugados. Estável para $K_c > 48,2$.