

107484 – Controle de Processos

Aula 16: Projeto PID - Métodos Baseados em Modelos

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



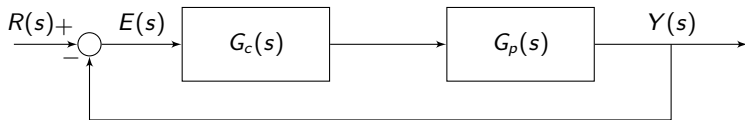
1º Semestre 2021

- 1 Síntese Direta
- 2 *Internal Model Controller (IMC)*
- 3 Alocação de polos
- 4 Observador de distúrbios

Objetivo

Dadas as funções de transferência dos componentes da malha, sintetizar o controlador necessário para produzir uma **resposta de malha fechada específica**.

Exemplo: Seja o diagrama de blocos simplificado



⇒ Função de transferência de malha fechada:

$$G_{MF}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

Considere realimentação unitária, que a dinâmica do processo é totalmente conhecida e está em série com o controlador. A função de transferência de malha fechada é dada por

$$G_{MF}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \Rightarrow \begin{aligned} G_{MF} + G_{MF}G_cG_p &= G_cG_p \\ G_{MF} + G_c(G_{MF}G_p - G_p) &= 0 \end{aligned}$$

Expressão do controlador com FT de MF desejada $G_{MF}(s)$

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{G_{MF}(s)}{1 - G_{MF}(s)} \quad (1)$$

• Observe que para um controle perfeito, $Y(s) = R(s)$ ($G_{MF}(s) = 1$), o ganho do controlador deve ser infinito

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{1}{0}$$

Especificação da Resposta em MF

Especificação de malha fechada

- 1ª ordem sem tempo morto:

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}, \quad \lambda : \text{parâmetro de sintonização} \quad (2)$$

↪ técnica também conhecida como "λ-tuning"

Substituindo (2) em (1),

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda s + 1}}$$

tem-se

Expressão do controlador para $G_{MF}(s)$ definido em (2)

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{1}{\lambda s} \quad (3)$$

Especificação da Resposta em MF

- Processo de 1ª ordem

$$G_p(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad \text{então}$$

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\lambda s} = \frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

↪ Controlador PI com $K_c = \frac{\tau}{K\lambda}$ e $T_i = \tau$

- Processo de 2ª ordem

$$G_p(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \text{e} \quad G_{MF}(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}, \quad \text{então}$$

$$G_c(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K} \cdot \frac{1}{\lambda s} = \frac{1 + (\tau_1 + \tau_2)s + \tau_1\tau_2 s^2}{K\lambda s}$$

↪ Controlador com dois zeros e um polo na origem ∴ PID

PID padrão

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_c \left(\frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s} \right)$$

Comparando-se com a forma padrão do PID tem-se $T_i = \tau_1 + \tau_2$ e

$$G_c(s) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K\lambda} \left(\frac{1 + (\tau_1 + \tau_2)s + (\tau_1 + \tau_2) \frac{\tau_1 \tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)} s^2}{(\tau_1 + \tau_2)s} \right)$$

$$K_c = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K\lambda}, \quad T_i = \tau_1 + \tau_2, \quad T_d = \frac{\tau_1 \tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)}$$

- Processo Integrador (Nível)

$$G_p(s) = \frac{K}{s} \Rightarrow G_c(s) = \frac{s}{K} \cdot \frac{1}{\lambda s} = \frac{1}{K\lambda} \quad (\text{Controlador Proporcional})$$

- Processo de primeira ordem mais tempo morto:

$$G_p(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s} \quad (4)$$

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K} e^{\theta s} \cdot \frac{1}{\lambda s} = \frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) e^{\theta s}$$

Irrealizável! Depende do futuro!

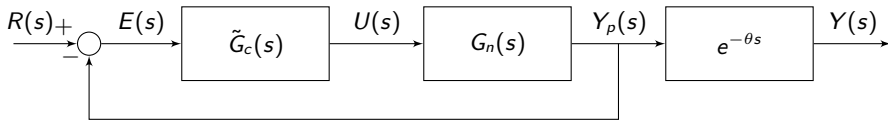
Especificação da Resposta em MF

Especificação de malha fechada

- Para processos de 1ª ordem mais tempo morto usar como especificação:

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{\lambda s + 1} e^{-\theta s} \quad (5)$$

↪ O objetivo de projeto é encontrar um controlador tal que o sistema em malha fechada seja equivalente ao seguinte diagrama:



em que

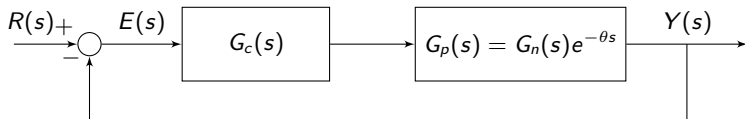
$$G_p(s) = G_n(s)e^{-\theta s}, \quad G_n(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

↪ Conforme visto anteriormente, o controlador $\tilde{G}_c(s) = \frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)$ produz o sistema em malha fechada (5).

Especificação da Resposta em MF

- Substituindo (5) e (4) em (1), tem-se

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K e^{-\theta s}} \cdot \frac{e^{-\theta s}}{\lambda s + 1 - e^{-\theta s}} = \frac{1 + \tau s}{K(1 + \lambda s - e^{-\theta s})} \quad (6)$$



- ↪ O controlador $G_c(s)$ é geralmente implementado numa forma diferente.

Controlador Preditivo PI (PPI)

Reescrevendo $G_c(s)$, lembrando que $G_c(s) = U(s)/E(s)$, tem-se

$$(1 + \lambda s - e^{-\theta s})U(s) = \frac{1}{K}(1 + \tau s)E(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{\lambda s} \cdot \frac{1 + \tau s}{K} E(s) - \frac{1 - e^{-\theta s}}{\lambda s} U(s)$$

Controlador Preditivo PI (PPI)

$$U(s) = \underbrace{\frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)}_{\text{controlador PI}} \left(E(s) - \underbrace{\frac{K}{\tau s + 1} (1 - e^{-\theta s}) U(s)}_{\text{predição}} \right)$$

- A expressão acima pode ser reescrita como

$$U(s) = \tilde{G}_c(s) \left(E(s) - G_n(s)(1 - e^{-\theta s})U(s) \right)$$

em que

$$\tilde{G}_c(s) = \frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right), \quad G_p(s) = G_n(s)e^{-\theta s}, \quad G_n(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (7)$$

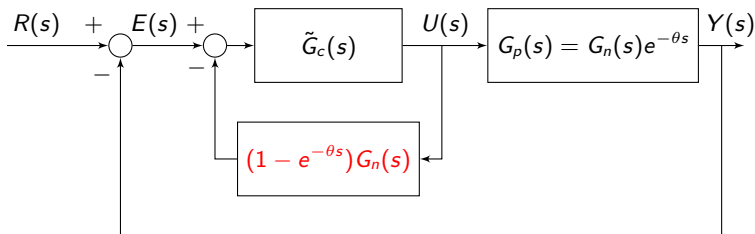
Preditor de Smith

- O controlador preditivo é também conhecido como **Preditor de Smith**:

$$U(s) = \tilde{G}_c(s) \left(E(s) - G_n(s)(1 - e^{-\theta s})U(s) \right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\tilde{G}_c(s)}{1 + \tilde{G}_c(s)G_n(s)(1 - e^{-\theta s})}$$

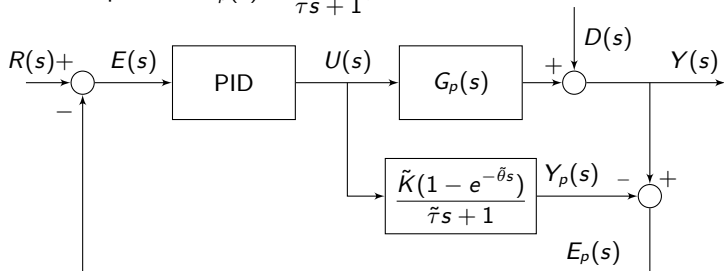
↪ Implementação:



- Observe que o bloco com termo $(1 - e^{-\theta s})G_n(s)$ é equivalente à diferença entre os modelos sem e com atraso $G_n(s) - G_p(s)$.

Preditor de Smith para sistemas de 1ª ordem mais atraso

- Considere o processo $G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$, tem-se



↪ Os parâmetros $(\tilde{K}, \tilde{\tau}, \tilde{\theta})$ representam um modelo da dinâmica do processo. Se o modelo for perfeito, o PID *não enxerga* o atraso,

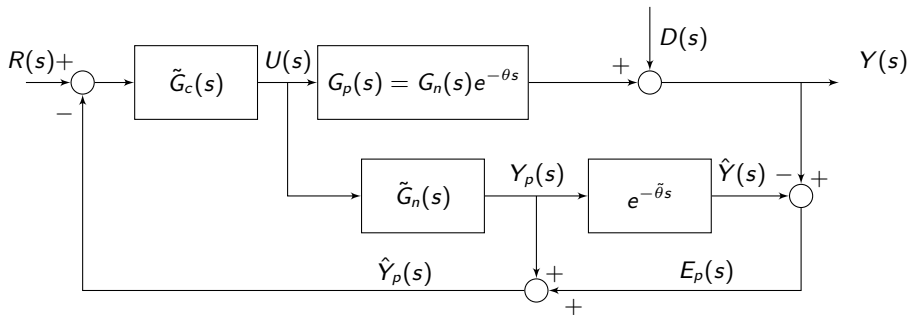
$$E_p(s) = \frac{\tilde{K}}{\tilde{\tau}s + 1} U(s),$$

permitindo que o PID tenha um ganho proporcional bem maior do que teria sem o Preditor de Smith.

↪ Para maior robustez, considerar no projeto que apenas 60% do tempo morto é compensado, ou seja, utilizar no projeto $\tilde{\theta} = 0,4\theta$.

Preditor de Smith

- Forma alternativa do Preditor de Smith explicitando as diferenças que podem ocorrer entre o modelo utilizado para o projeto ($\tilde{G}_n(s)e^{-\tilde{\theta}s}$) e o modelo real da planta ($G_p(s) = G_n(s)e^{-\theta s}$) sujeito a distúrbios.



↪ O controlador $\tilde{G}_c(s)$ é projeto para o modelo do sistema sem atraso $\tilde{G}_n(s)$.

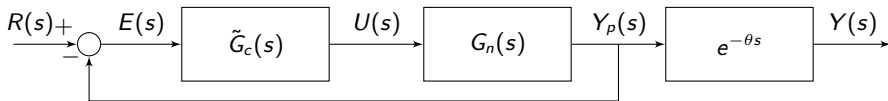
Controlador Preditivo PI (PPI)

Comentários:

- Predição da saída do processo no tempo t baseado nos valores do sinal de controle no intervalo $(t - T_i, t) \Rightarrow$ "Preditivo PI" (PPI);
- Corrige os efeitos da ação de controle no processo mas que ainda não apareceram devido ao atraso;
- Para longos θ esta predição é melhor do que aquela obtida pelo termo derivativo;
- Para processos instáveis é necessária uma malha de controle adicional estabilizante;
- Erro de modelagem ($\tilde{G}_n(s), \tilde{\theta}$) ou variações no atraso (θ) podem degradar o desempenho do sistema em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\tilde{G}_c(s)G_n(s)e^{-\theta s}}{1 + \tilde{G}_c(s)\tilde{G}_n(s) + \tilde{G}_c(s)(G_n(s)e^{-\theta s} - \tilde{G}_n(s)e^{-\tilde{\theta}s}}$$

- Se o modelo é perfeito ($\tilde{G}_n(s) = G_n(s)$ e $\tilde{\theta} = \theta$), tem-se o diagrama equivalente:



Controlador Preditivo PI (PPI)

- Forma alternativa:

$$U(s) = \frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) E(s) - \frac{1}{\lambda s} (1 - e^{-\theta s}) U(s)$$

pois

$$\frac{\tau}{K\lambda} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{\tau}{\lambda(\tau s + 1)} + \frac{\tau}{\tau s \lambda(\tau s + 1)} = \frac{(\tau s + 1)}{\lambda s(\tau s + 1)} = \frac{1}{\lambda s}$$

Se adotarmos $\lambda = \tau$,

$$(1 + \tau s - e^{-\theta s}) U(s) = \frac{1}{K} (1 + \tau s) E(s)$$

$$\left(1 - \frac{e^{-\theta s}}{\tau s + 1}\right) U(s) = \frac{1}{K} E(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{K} E(s) + \frac{e^{-\theta s}}{\tau s + 1} U(s) = \frac{1}{K} \left(E(s) + G_p(s) U(s)\right)$$

$$U(s) = \frac{1}{K - G_p(s)} E(s)$$

Controlador racional por meio da aproximação do atraso

- Pode-se aproximar o termo $e^{-\theta s}$ que aparece no controlador:

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s \quad (8)$$

Substituindo (8) em (6), tem-se

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{\tau s + 1}{K} \frac{1}{(1 + \lambda s - 1 + \theta s)} = \frac{\tau s}{K(\lambda + \theta)s} + \frac{1}{K(\lambda + \theta)s} \\ &= \frac{\tau}{K(\lambda + \theta)} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right), \quad \text{controlador PI com } \begin{cases} K_c = \frac{1}{K} \cdot \frac{\tau}{\lambda + \theta} \\ T_i = \tau \end{cases} \end{aligned}$$

- **Obs. I:**

↪ $K_c \propto \frac{1}{K}$

↪ $T_i \propto \tau$ processo lento → ação lenta

↪ $K_c \propto \frac{1}{\lambda}$ dinâmica MF ↑ rápida → ↑ K_c

↪ θ limitante para K_c ($\lambda = 0$)

- **Obs. II:** A dinâmica desejada FOPDT não serve para qualquer processo.

Exemplos:

- a) Se existir um zero no SPD, $1 - \tau_a s$, $\tau_a > 0$, o controlador por SD terá o termo $(1 - \tau_a s)$ no denominador e será instável, então escolhe-se

$$G_{MF}(s) = \frac{(1 - \tau_a s)e^{-\theta s}}{\lambda s + 1}$$

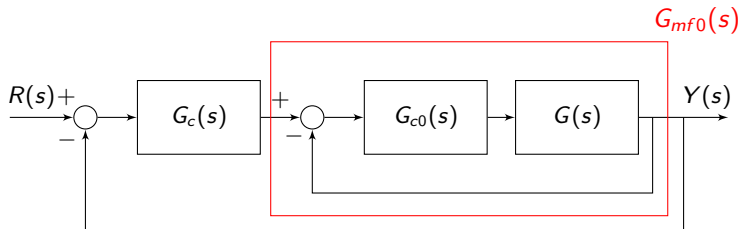
- b) **Processos instáveis:** como a Síntese Direta baseia-se no cancelamento de polos e zeros $\left(G_c \propto \frac{1}{G}\right)$ é necessário primeiro estabilizar o processo por meio de uma malha adicional interna.

Processos instáveis

- Para o projeto de controladores via Síntese Direta para processos instáveis, primeiro é necessário estabilizar o processo por um controlador estabilizante.
- No exemplo abaixo, primeiramente projeta-se o controlador $G_{c0}(s)$ que estabiliza $G(s)$, ou seja, tal que

$$G_{mf0}(s) = \frac{G_{c0}(s)G(s)}{1 + G_{c0}(s)G(s)}$$

é estável. Pode-se utilizar o Critério de Routh ou Lugar das Raízes e $G_{c0}(s)$ não precisa ter um termo integral (PI ou PID), podendo ser um controlador proporcional (P).



- Após, aplica-se o método de Síntese Direta para o projeto de $G_c(s)$ em função de $G_{mf0}(s)$.

- 1 Síntese Direta
- 2 *Internal Model Controller (IMC)*
- 3 Alocação de polos
- 4 Observador de distúrbios

Internal Model Controller (IMC)

Princípio

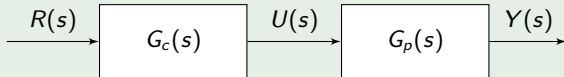
O IMC (em português, Controlador por Modelo Interno) se baseia no Princípio do modelo Interno que afirma que o controle pode ser obtido somente se o sistema de controle *encapsula*, implicitamente ou explicitamente, alguma representação do processo a ser controlado.

↪ Em particular, se o esquema de controle é desenvolvido baseado em um modelo exato do processo, um controle perfeito é teoricamente possível.

Internal Model Controller (IMC)

Motivação

Considere o esquema de controle em malha aberta

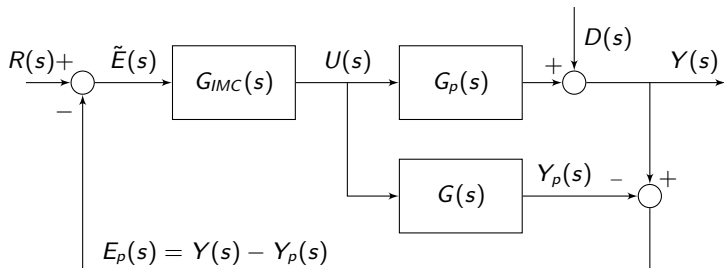


↪ O controle perfeito pode ser obtido com $G_c(s) = G_p^{-1}(s)$ se $G_p(s)$ é perfeitamente conhecido.

↪ Na prática o modelo difere do processo real e há distúrbios. Nesse caso, pode-se ajustar manualmente a referência $R(s)$ até obter a saída desejada $Y(s)$. Como automatizar esse processo?

Internal Model Controller (IMC)

- Desenvolvido por (Garcia e Morari, 1982 e Rivera et al., 1986)



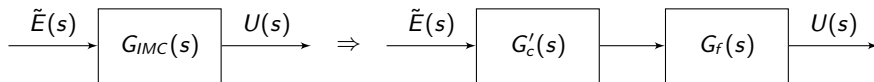
- Do diagrama,

$$U(s) = G_{IMC}(s) \left(R(s) - Y(s) + G(s)U(s) \right)$$

em que $G(s)$ é um modelo disponível do processo real $G_p(s)$ (desconhecido).

Internal Model Controller (IMC)

- Implementação de filtro passa-baixa $G_f(s)$



Expressão usual para o filtro

$$G_f(s) = \frac{1}{(\tau_f s + 1)^r} \quad (9)$$

em que r é a ordem do filtro tal que a função de transferência $G'_c(s)G_f(s)$ seja própria (usualmente $r = 1$)

↪ Filtro: minimiza o efeito da diferença entre o modelo e o processo real (*model mismatch*) que geralmente é maior em altas frequências.

Internal Model Controller (IMC)

- Do diagrama, observa-se que $Y(s) = G_p(s)U(s) + D(s)$ e

$$U(s) = G'_c(s)G_f(s)\left(R(s) - Y(s) + G(s)U(s)\right) \Leftrightarrow U(s) = \frac{G'_c(s)G_f(s)(R(s) - Y(s))}{1 - G'_c(s)G_f(s)G(s)}$$

- Então, a expressão em malha fechada é dada por

$$Y(s) = \frac{G'_c(s)G_f(s)G_p(s)}{1 + G'_c(s)G_f(s)(G_p(s) - G(s))}R(s) + \frac{1 - G'_c(s)G_f(s)G(s)}{1 + G'_c(s)G_f(s)(G_p(s) - G(s))}D(s)$$

- Para o caso do casamento perfeito $G(s) = G_p(s)$:

$$Y(s) = G'_c(s)G_f(s)G_p(s)R(s) + (1 - G'_c(s)G_f(s)G(s))D(s)$$

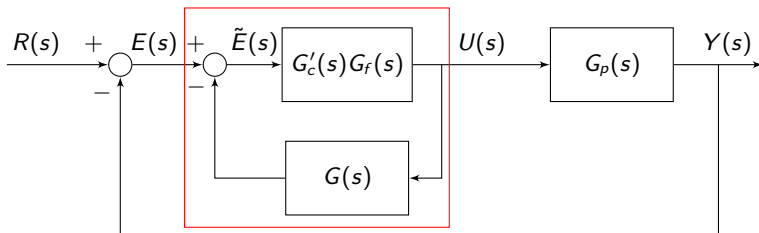
$$G_{MF}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = G'_c(s)G_f(s)G_p(s) \quad \text{e} \quad G_{MFD}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 1 - G'_c(s)G_f(s)G(s)$$

↪ Escolhendo-se $G'_c(s) = G(s)^{-1}$, obtém-se o rastreamento dado por $G_{MF}(s) = G_f(s)$ (especificado pelo projetista);

↪ Mesmo no caso $G(s) \neq G_p(s)$, a escolha $G'_c(s) = G(s)^{-1}$ leva à rejeição de distúrbio $G_{MFD}(s) = 1 - G_f(s)$.

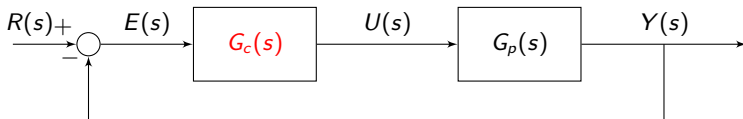
Internal Model Controller (IMC)

- O controle IMC pode ser implementado na forma de um controlador série



Rearranjando para a expressão do controlador série

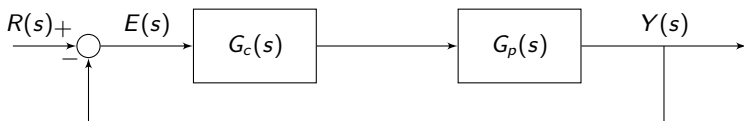
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{U(s)}{R(s) - Y(s)} = \frac{G'_c(s)G_f(s)}{1 - G(s)G'_c(s)G_f(s)} \quad (10)$$



Internal Model Controller (IMC)

- Para o caso em que $G(s)$ não possui termos irrealizáveis, $G_c'(s) = \frac{1}{G(s)}$ e $r = 1$ (filtro), a expressão controlador série é

$$G_c(s) = \frac{\frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_f s + 1}}{1 - \frac{1}{G(s)} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\tau_f s + 1}} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_f s}$$



- ↪ Recupera-se a expressão por meio da SD. Contudo, para a inversão de $G(s)$, é necessário excluir termos irrealizáveis ($e^{-\theta s}$) ou zeros positivos.
- ↪ Assim como na Síntese Direta, para processos instáveis é necessária uma malha de controle adicional estabilizante.

Internal Model Controller (IMC)

Procedimento de projeto IMC

- 1 Fatorar modelo do processo em

$$G(s) = G_+(s)G_-(s)$$

em que $G_+(s)$ são os termos irrealizáveis e **ganho unitário**.

- 2 Filtro e controlador IMC dados por

$$G_f(s) = \frac{1}{(\tau_f s + 1)^r}, \quad G'_c(s) = \frac{1}{G_-(s)}$$

- 3 Controlador série dado por (10),

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{G'_c(s)G_f(s)}{1 - G(s)G'_c(s)G_f(s)} = \frac{1}{G_-(s)} \cdot \frac{1}{(\tau_f s + 1)^r - G_+(s)}$$

- Observe que sistema em malha fechada é dado por $G_{MF}(s) = G_f(s)G_+(s)$, pois

$$G_{MF}(s) = G'_c(s)G_f(s)G(s) = \frac{1}{G_-(s)}G_f(s)G_+(s)G_-(s) = G_f(s)G_+(s)$$

Exemplo de projeto IMC

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-\theta s} \quad \begin{cases} G_-(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \\ G_+(s) = e^{-\theta s} \end{cases}$$

Então,

$$G'_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K}, \quad G_f(s) = \frac{1}{\tau_f s + 1}$$

$$G_c(s) = \frac{G'_c(s)G_f(s)}{1 - G'_c(s)G(s)G_f(s)} = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\tau_f s + 1 - e^{-\theta s}} \quad (\text{igual a SD})$$

Aproximando $e^{-\theta s}$ por

$$\textcircled{1} \quad e^{-\theta s} = \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}$$

$$\textcircled{2} \quad e^{-\theta s} = 1 - \theta s$$

Exemplo de projeto IMC

1 Para $e^{-\theta s} = \frac{1 - \theta/2s}{1 + \theta/2s}$

$$G_+(s) = 1 - \frac{\theta}{2}s, \quad G_-(s) = \frac{K}{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}, \quad G_f(s) = \frac{1}{\tau_f s + 1} \quad (r = 1)$$

$$G_c(s) = \frac{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)(\tau s + 1)}{K \left(\tau_f + \frac{\theta}{2}\right)s}, \quad \text{PID} \begin{cases} K_c = \frac{1}{K} \cdot \frac{2\tau + \theta}{2\tau_f + \theta} \\ T_i = \frac{\theta}{2} + \tau \\ T_d = \frac{\tau\theta}{2\tau + \theta} \end{cases}$$

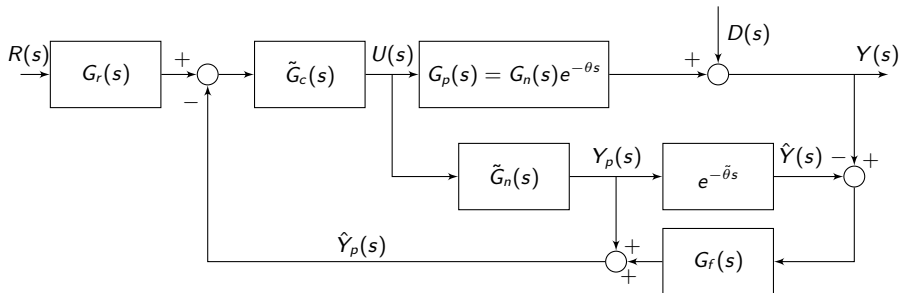
Obs.: Se adotado $r = 2$ o controlador série $G_c(s)$ teria um pólo adicional e não teria a estrutura do PID padrão

2 Repetindo o mesmo processo para $e^{-\theta s} = 1 - \theta s$

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\tau_f + \theta)s}, \quad \text{PI} \begin{cases} K_c = \frac{1}{K} \cdot \frac{\tau}{\tau_f + \theta} \\ T_i = \tau \end{cases}$$

Preditor de Smith

- Preditor de Smith com filtros $G_r(s)$, para melhorar resposta à referência $R(s)$, e $G_f(s)$, para filtrar erros de modelagem em altas frequências.



↪ Em geral, escolhe-se

$$G_f(s) = \frac{1}{\tau_f s + 1} \quad \text{e} \quad G_r(s) = \frac{1 + s\beta T_i}{1 + sT_i}$$

↪ $G_r(s)$ cancela o zero introduzido pelo PI (com tempo de integração T_i) e aloca um zero não dominante por meio da escolha do parâmetro β (ex.: $\beta = 0,4$);

↪ $G_f(s)$ filtra o erro de modelagem $Y(s) - \hat{Y}(s)$ por meio da escolha do parâmetro τ_f .

- 1 Síntese Direta
- 2 *Internal Model Controller* (IMC)
- 3 Alocação de polos
- 4 Observador de distúrbios

Alocação de polos (I)

- Considere o modelo de primeira ordem e um controlador PI dados respectivamente por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

em que $y(t)$ é a saída controlada, $u(t)$ a variável manipulada e $e(t) = r(t) - y(t)$ é o sinal de erro entre o sinal de referência $r(t)$ e a saída $y(t)$.

- O sistema em malha fechada é de segunda ordem dado por

$$G_{mf}(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

cuja equação característica é dada por

$$1 + G(s)G_c(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 + s \frac{1 + KK_c}{\tau} + \frac{KK_c}{\tau T_i} = 0 \quad (11)$$

- Suponha que se deseja os polos em malha fechada caracterizados pelo fator de amortecimento ζ e a frequência natural ω_n raízes da equação característica desejada

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (12)$$

- Comparando-se (11) com (14) e isolando os ganhos do controlador, obtém-se

$$K_c = \frac{2\zeta\omega_n\tau - 1}{K}, \quad T_i = \frac{2\zeta\omega_n\tau - 1}{\omega_n^2\tau}, \quad \omega_n > 1/(2\zeta\tau)$$

Alocação de polos (I)

- Observe que o sistema em malha fechada tem um zero em $s = -1/T_i$ o que pode causar maior sobressinal se ele estiver muito à direita dos polos de malha fechada e próximo ao eixo imaginário.

Ponderação da referência (*Setpoint Weighting*)

$$u(t) = K_c \left(e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\nu) d\nu + T_d \frac{de_d(t)}{dt} \right) \quad (13)$$

em que $e(t) = r(t) - y(t)$, $e_p(t) = br(t) - y(t)$ e $e_d(t) = cr(t) - y(t)$, sendo b e c parâmetros de projeto para ponderar a resposta à mudança no sinal de referência $r(t)$.

- Para evitar sobressinal excessivo na resposta à mudança da referência (*set-point*), pode-se adotar o PI dado por (13) (com $T_d = 0$) de forma que o novo zero do sistema em malha fechada seja dado por $s = -1/(bT_i)$ e escolher o parâmetro b para levar o zero à esquerda dos polos dominantes de malha fechada. Uma escolha para b é $b = 1/(\omega_n T_i)$ que leva o zero para $s = -\omega_n$.
- Escolhas de ω_n muito grande fornecem $T_i \approx \frac{2\zeta}{\omega_n}$, independente de τ contudo o modelo $G(s)$ tende a não ser mais válido para representar a dinâmica real.

Alocação de polos (II)

- Para o sistema de segunda ordem e o controlador PID

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad G_c(s) = \frac{K_c(1 + sT_i + s^2 T_i T_d)}{sT_i}$$

então obtém-se uma equação característica de malha fechada de terceira ordem.

- Uma equação característica de malha fechada conveniente é dada por

$$(s + \alpha\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0 \quad (14)$$

que contém dois polos dominantes com fator de amortecimento ζ e frequência ω_n , e um polo real em $s = -\alpha\omega_n$ que deve estar à esquerda dos polos dominantes pelo escolha de α para caracterizar a resposta como de segunda ordem.

- Igualando-se $1 + G(s)G_c(s) = 0$ com (14) obtém-se os ganhos do controlador para escolhas de projeto de α , ζ , ω_n (faça as contas). Observa-se também que há um valor crítico para a escolha de ω_n dado por ω_c em que a escolha $\omega_n = \omega_c$ anula o termo derivativo ($T_d = 0$) e $\omega_n > \omega_c$ para se ter $T_d > 0$.

- Faça as contas para

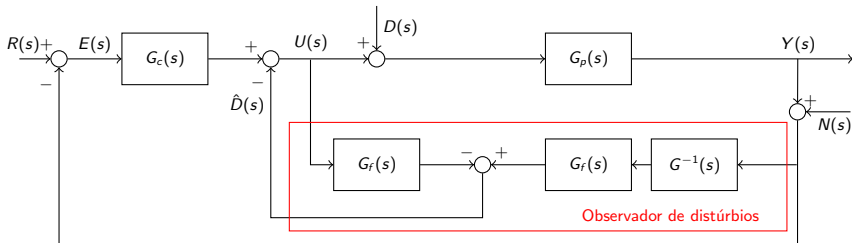
$$G(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad \text{e} \quad G_c(s) = K_c + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Referência das notas de aula sobre Alocação de polos:
PID Controllers, Astrom & Hagglund, 2nd ed., 1994.

- 1 Síntese Direta
- 2 *Internal Model Controller* (IMC)
- 3 Alocação de polos
- 4 Observador de distúrbios

Controle baseado em observador de distúrbios

- Arquitetura de controle que objetiva minimizar a influência do distúrbio através da estimação $\hat{D}(s)$ do sinal de distúrbio $D(s)$ na entrada do processo.



Expressão usual para o filtro (passa-baixa)

$$G_f(s) = \frac{1}{(\tau_f s + 1)^r}$$

em que r é a ordem do filtro tal que a função de transferência $G^{-1}(s)G_f(s)$ seja própria (usualmente $r = 1$ se sistema de 1ª ordem)

↪ Filtro: minimiza o efeito da diferença entre o modelo $G(s)$ e o processo real $G_p(s)$ que geralmente é maior em altas frequências.

Controle baseado em observador de distúrbios

- A saída $Y(s)$ é dada por

$$Y = \frac{G_p G G_c}{\Delta} R + \frac{G_p G (1 - G_f)}{\Delta} D - \frac{G_p (G G_c + G_f)}{\Delta} N$$

em que

$$\Delta = G(1 + G_c G_p) + (G_p - G)G_f$$

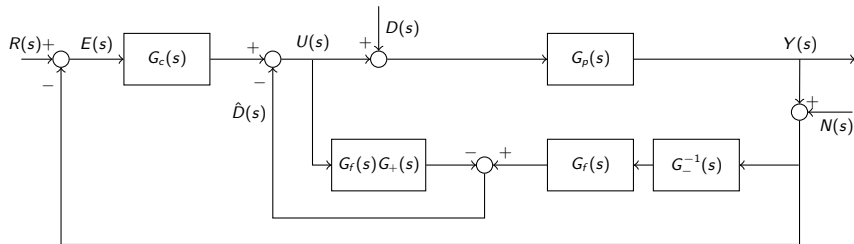
↪ Se $G_f(s) = 1$ a compensação é perfeita ($\hat{D}(s) = D(s)$) mas para garantir que $G^{-1}(s)G_f(s)$ seja própria impõe-se $\lim_{s \rightarrow 0} G_f(s) = 1$ ($\hat{D}(s) = G_f(s)D(s)$, eliminação do distúrbio em regime permanente).

↪ Se $G(s) = G_p(s)$ o observador não modifica o rastreamento (função de transferência entre $Y(s)$ e $R(s)$).

↪ O sinal $N(s)$ representa o ruído de medida. Se a constante de tempo do filtro τ_f for muito rápida (valores pequenos) haverá amplificação do ruído no sinal de controle.

Controle baseado em observador de distúrbios

- Arquitetura para **sistemas de fase não-mínima e com atraso no tempo** em que $G(s)$ é fatorado em $G(s) = G_-(s)G_+(s)$, com $G_+(s)$ a parte com atraso ou zeros positivos e tal que $G_+(0) = 1$.

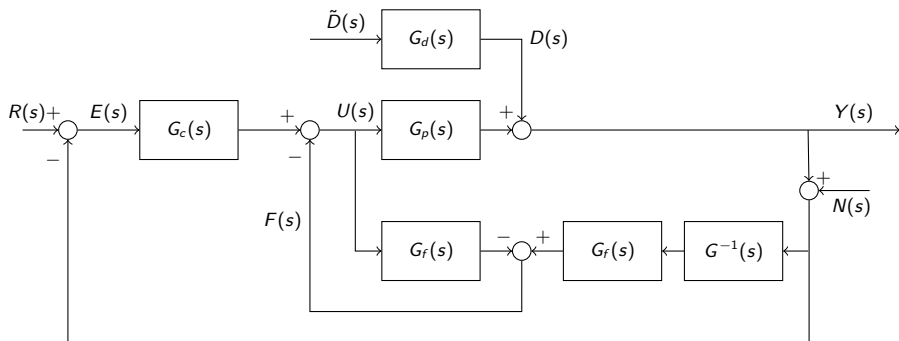


- Exemplo:

$$G(s) = \frac{k(-\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} = \underbrace{\frac{(-\beta s + 1)}{(\beta s + 1)} e^{-\theta s}}_{G_+(s)} \underbrace{\frac{k(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}}_{G_-(s)}$$

Controle baseado em observador de distúrbios

- O distúrbio também pode ser considerado na saída do processo.



- Em que o sinal estimado $F(s)$ é dado por

$$F(s) = (G_p(s)G^{-1}(s) - 1)G_f(s)U(s) + G^{-1}(s)G_f(s)G_d(s)\tilde{D}(s)$$

- Se $G(s) = G_p(s)$,

$$F(s) = G^{-1}(s)G_f(s)D(s), \quad D(s) = G_d(s)\tilde{D}(s)$$