

107484 – Controle de Processos

Aula: Caracterização de processos por sistemas de 1ª e 2ª ordem
mais atraso

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



1º Semestre 2015

- 1 Aproximação de sistemas de alta ordem
- 2 Tempo morto (atraso no tempo)
- 3 Obtenção de modelo empírico
- 4 Estimador de mínimos quadrados

Sistemas de 1ª e 2ª ordem mais atraso

A maioria das dinâmicas dos processos industriais podem ser aproximadas por sistemas de 1ª e 2ª ordem mais atraso no tempo (tempo morto):

- FOPTD: *first order plus time delay*

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

- SOPTD: *second order plus time delay*

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} = \frac{\hat{K}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\theta s}$$

- SOPTDLD: *SOPTD with lead*

$$G(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} = \frac{\hat{K}(\tau_3 s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\theta s}$$

Aproximação I

Desprezar pólos menos significativos

Exemplo:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)} = \frac{K/60}{s(s/2+1)(s/30+1)}$$

↪

$$\tilde{G}(s) = \frac{K/30}{s(s+2)}$$

Aproximação II

Aproximação de pólos e zeros por atrasos no tempo

- Expansão em série de Taylor de $e^{-\theta s}$ em torno de $s = 0$:

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} + \frac{(\theta s)^3}{3!} + \frac{(\theta s)^4}{4!} \dots$$

- Desprezando os termos maiores e iguais de 2ª ordem

$$e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s \quad (\text{zero em } s = \frac{1}{\theta})$$

ou

$$e^{-\theta s} = \frac{1}{e^{\theta s}} \approx \frac{1}{1 + \theta s} \quad (\text{pólo em } s = -\frac{1}{\theta})$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{K(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)} \rightsquigarrow \tilde{G}(s) = \frac{K}{5s + 1} e^{-3.6s}$$

Aproximação III

Método de Skogestad [Skogestad, 2003]

- Metade da maior constante de tempo desprezada é adicionada ao atraso e metade à menor constante de tempo retida; demais termos aproximados por atraso ($e^{-\theta s}$)

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{K(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)} \rightsquigarrow \tilde{G}(s) = \frac{K}{6.5s + 1} e^{-2.1s}$$

Aproximação IV

Aproximação de Padé

- Consiste em obter uma função aproximada $G_{m,n}(s)$ de $G(s)$ de menor ordem que exiba uma resposta temporal semelhante. Seja

$$G_{m,n}(s) \triangleq G_{DC} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}, \quad n \geq m$$

- As funções $G_{m,n}(s)$ de $G(s)$ e suas derivadas sucessivas em s , no ponto $s = 0$, devem ser iguais, ou seja, $G^{(n)}(0) = G_{m,n}^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$G(0) = G_{m,n}(0), \quad G'(0) = G'_{m,n}(0), \quad G''(0) = G''_{m,n}(0), \quad \dots$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{2}{(10s + 1)(s + 1)} \quad \rightsquigarrow \quad G_{1,1}(s) = \frac{2(-0.909s + 1)}{10.09s + 1}$$

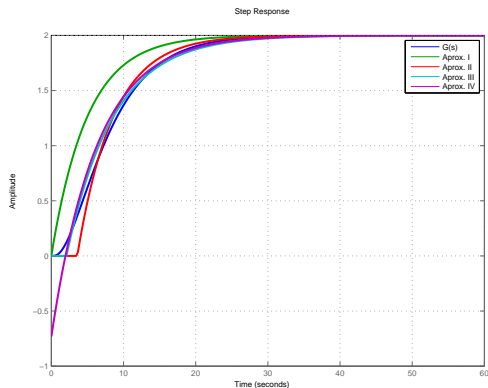
- Métodos de aproximação da resposta em frequência podem ser achados em Dorf, pag. 340, 12ª edição.

Aproximação por modelos de 1ª e 2ª ordem

- Comparação das aproximações de

$$G(s) = \frac{2(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)}$$

por um sistema de 1ª ordem com tempo morto (aprox. II e III) ou com um zero (aprox. IV $\rightsquigarrow G_{1,1}(s) = \frac{-2.30s + 1}{6.29s + 1}$).



- 1 Aproximação de sistemas de alta ordem
- 2 Tempo morto (atraso no tempo)**
- 3 Obtenção de modelo empírico
- 4 Estimador de mínimos quadrados

- O sistema com atraso

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x_d(t - \theta), u(t)) \quad \text{ou} \quad G_\theta(s) = G(s)e^{-\theta s}$$

não é uma função de transferência racional (não pode ser expressa como o quociente de dois polinômios).

Métodos de aproximação por uma função racional

- 1 Expansão em série de Taylor em $s = 0$
- 2 Aproximação por Padé
- 3 Por meio do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(s)$

Expansão em série de Taylor de $e^{-\theta s}$ em torno de $s = 0$

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} + \frac{(\theta s)^3}{3!} + \frac{(\theta s)^4}{4!} \dots$$

ou

$$e^{-\theta s} = \frac{1}{1 + \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} + \frac{(\theta s)^3}{3!} + \frac{(\theta s)^4}{4!} \dots}$$

- Desprezando os termos maiores e iguais de 2ª ordem

$$e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s \quad (\text{zero em } s = \frac{1}{\theta})$$

ou

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1}{1 + \theta s} \quad (\text{pólo em } s = -\frac{1}{\theta})$$

Aproximação por Padé

- Seja

$$G(s) = e^{-\theta s}$$

- Aproximação

$$G_{0,1}(s) = \frac{1}{\theta s + 1}, \quad G_{1,1}(s) = \frac{-\theta s + 2}{\theta s + 2}$$

$$G_{1,2}(s) = \frac{-2\theta s + 6}{\theta^2 s^2 + 4\theta s + 6}, \quad G_{2,2}(s) = \frac{\theta^2 s^2 - 6\theta s + 12}{\theta^2 s^2 + 6\theta s + 12}$$

$$G_{3,3}(s) = \frac{-\theta^3 s^3 + 12\theta^2 s^2 - 60\theta s + 120}{\theta^3 s^3 + 12\theta^2 s^2 + 60\theta s + 120}$$

- No *Matlab*:

```
[num,den] = pade(theta,ordem)
printsys(num,den,'s')
```

Aproximação pela função $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(s)$

- Tem-se que

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \rightsquigarrow e^{-\theta s} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\theta s/x}$$

- Definindo

$$n \triangleq \frac{\theta s}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\theta s}{n}$$

então

$$\tilde{G}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta s}{n}\right)^{-n} \approx \frac{1}{\left(\frac{\theta}{n}s + 1\right)^n}$$

- 1 Aproximação de sistemas de alta ordem
- 2 Tempo morto (atraso no tempo)
- 3 Obtenção de modelo empírico**
- 4 Estimador de mínimos quadrados

● Modelos obtidos através de um conjunto de dados (resposta do processo).
Principais métodos utilizados no 'chão de fábrica':

- 1 Resposta ao degrau (curva de reação do processo em malha aberta)
- 2 Método dos mínimos quadrados

Resposta ao degrau

Aproximação por $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$. Obtenção de K , τ e θ :

- 1 Método gráfico da reta tangente ao ponto de máxima variação
- 2 Por meio da definição de constante de tempo (63.2%)
- 3 Uso de 2 pontos (método de Broida)
- 4 Uso de conjunto de pontos

Aproximação por $G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s}$. Obtenção de K , τ_1 , τ_2 e θ :

- 1 Uso de 3 pontos (boas estimativas para $0.707 \leq \xi \leq 3.0$)

Considerações sobre obtenção da resposta ao degrau

Orientações:

- Controlador deve estar em manual (malha aberta)
- degrau deve ser grande o suficiente para ser mensurável mas não ao ponto da resposta ser distorcida por não-linearidades
- certifique-se de que não há distúrbios no processo
- repetir o teste várias vezes (subida e descida)

Limitações:

- maioria dos processos são não-lineares e de alta ordem
- a saída é geralmente contaminada por ruído
- distúrbios podem ocorrer durante o teste
- a degrau não é perfeito (constante de tempo de válvulas, rampa na aceleração de motores etc), mas são boas aproximações em comparação à constante de tempo do processo

- 1 Aproximação de sistemas de alta ordem
- 2 Tempo morto (atraso no tempo)
- 3 Obtenção de modelo empírico
- 4 Estimador de mínimos quadrados**

- Domínio z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Domínio do tempo discreto

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$

em que

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$$

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}$$

q é o operador de atraso (q^{-1} : atraso de um período de amostragem).

- Sistemas com atraso no tempo de θ e período de amostragem h

$$H(z) = \frac{B(z)z^{-d}}{A(z)}, \quad A(q)y(k) = B(q)q^{-d}u(k), \quad d = \theta \operatorname{div} h$$

- Obs.: $y(k) \triangleq y(kh)$ e $y(k-n) \triangleq y(kh-nh)$

• $H(s) \implies H(z)$

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s} \implies H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^d(z + a_1)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})z^{-d}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

em que

$$a_1 = -e^{-h/\tau}, \quad b_0 = K(1 - e^{-(h-L)/\tau}), \quad b_1 = Ke^{-h/\tau}(e^{L/\tau} - 1)$$
$$d = \theta \operatorname{div} h \quad (\theta < h \Rightarrow d = 1), \quad L = \theta \operatorname{mod} h \quad (\theta < h \Rightarrow L = \theta)$$

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \implies H(z) = \frac{b_1}{z + a_1} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$H(s) = \frac{K(s + a)}{\tau s + 1} \implies H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$H(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)} \implies H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Representação de sistemas

- Equação a diferença linear \rightsquigarrow relação entrada-saída
- Tempo discreto \rightsquigarrow dados coletados por amostragem

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_y} y(k-n_y) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) \quad (1)$$

- Próximo valor de saída

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_y} y(k-n_y) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) \quad (2)$$

- Notação compacta

$$y(k) = \varphi(k)^T \theta, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \mathbb{R}^n, \quad n = n_y + n_u \quad (3)$$

com

$$\varphi(k)^T = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-n_y) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n_u)] \quad (\text{regressores})$$

$$\theta^T = [a_1 \ \dots \ a_{n_y} \ b_1 \ \dots \ b_{n_u}] \quad (\text{parâmetros})$$

Objetivo

Estimar

$$\theta = [a_1 \ \dots \ a_{n_y} \ b_1 \ \dots \ b_{n_u}]^T \rightsquigarrow \hat{\theta} \quad (4)$$

$$\min \hat{\theta} - \theta \quad (5)$$

- Realização de N medidas

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(1)^T \\ \varphi(2)^T \\ \vdots \\ \varphi(N)^T \end{bmatrix} \theta \quad \Longrightarrow \quad Y = \Phi \theta \quad (6)$$

$$Y \in \mathbb{R}^N, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{(n) \times N}, \quad \theta \in \mathbb{R}^n$$

- Se $N = n \rightsquigarrow \theta = \Phi^{-1} Y$, desde Φ não singular
- Se $N > n \rightsquigarrow$ sistema sobredeterminado

$$\Phi^T Y = \Phi^T \Phi \theta \quad \Longrightarrow \quad \theta = \underbrace{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T}_{\text{pseudo-inversa}} Y, \quad \Phi^T \Phi \text{ não singular}$$

Exemplo

$$H(s) = \frac{K(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad \xleftrightarrow{h} \quad H(z) = \frac{b_1z + b_2}{z^2 + a_1z + a_2} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

$$y(k) = \underbrace{[-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k-1) \quad u(k-2)]}_{\varphi(k)^T} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) & u(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

$$Y = \Phi\theta$$

$$\theta = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY, \quad \Phi^T\Phi > 0$$

Propriedade do método dos mínimos quadrados

- Erro ao explicar $y(k)$ através de $\varphi(k)$ e $\hat{\theta} \rightsquigarrow e(k)$ (resíduo)

$$y(k) = \varphi(k)^T \hat{\theta} + e(k) \quad \implies \quad Y = \Phi \hat{\theta} + E \quad (7)$$

- Função custo

$$J_{MQ} = \sum_{k=1}^N e(k)^2 = E^T E = \|E\|^2 \quad (8)$$

- Índice de ajuste de $\Phi \hat{\theta}$ a $Y \rightsquigarrow$ escolha de $\hat{\theta}$ que minimiza J_{MQ}

$$\begin{aligned} J_{MQ} &= (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}) \\ &= Y^T Y - Y^T \Phi \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \Phi^T Y + \hat{\theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

- Minimização de $J_{MQ} \rightsquigarrow (\partial J_{MQ} / \partial \hat{\theta}) = 0$

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} = -(Y^T \Phi)^T - \Phi^T Y + (\Phi^T \Phi + \Phi^T \Phi) \hat{\theta} = -2\Phi^T Y + 2(\Phi^T \Phi) \hat{\theta} = 0 \quad (10)$$

Portanto,

$$\hat{\theta} = \arg_{\theta} \min J_{MQ} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad \text{pois} \quad \frac{\partial^2 J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}^2} = 2\Phi^T \Phi > 0 \quad (11)$$

Exemplo

Considere um sistema em que se deseja obter o modelo mais adequado as seguintes medidas

$$\begin{aligned}t = 1: & \quad u(1) = 0 \quad y(1) = 0 \\t = 2: & \quad u(2) = 1 \quad y(2) = 0.9 \\t = 3: & \quad u(3) = 2 \quad y(3) = 2.1\end{aligned} \quad (12)$$

- 1 Considere o modelo constante $y(k) = \theta_0$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\theta}_0 = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = 1.0 \Rightarrow J_{MQ} = 2.2 \quad (13)$$

- 2 Considere o modelo linear $y(k) = \theta_0 + \theta_1 u(k) = [1 \quad u(k)] \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\theta} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ 1.05 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{MQ} = 0.015, \quad \Phi^T E \approx 0 \quad (14)$$

- 3 Considere o modelo $y(k) = \theta_0 + \theta_1 u(k) + \theta_2 u(k-1)$

$$\hat{\theta}^T = [0 \quad 0.9 \quad 0.3] \Rightarrow J_{MQ} \approx 0 \quad (15)$$

Implementação numérica

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \Rightarrow \hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^N \phi(k) \phi(k)^T \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \phi(k) y(k) \right) \quad (16)$$

Resumo

- $y(k) = \varphi(k)^T \theta$ N medidas $Y = \Phi^T \theta$
- $\hat{\theta} = \arg_{\theta} \min (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$

- Conversão modelo discreto para contínuo: d2c(sys)
- Conversão modelo contínuo para o discreto: c2d(sys, h)

Escolha do tempo de amostragem

- A seleção do tempo de amostragem é crítica para o desempenho do controle;
- Amostragem muito lenta (alto h) pode reduzir a eficiência do sistema de controle;
- A relação sinal/ruído influencia na seleção do tempo de amostragem. Alta taxa de amostragem não é recomendada quando a relação sinal/ruído é alta. Recomenda-se a utilização de filtros neste caso.

Escolha do tempo de amostragem

- Métodos baseados na resposta em malha aberta
 - $h < 0.1\tau_{\max}$ [Kalman and Bertram]
 - $0.2 < h/\theta < 1$ (FOPTD)
 - $0.01 < h/\tau < 0.05$ [Astrom e Wittenmark]
 - $t_s/15 < h < t_s/6$ (t_s : tempo acomod. 95%) [Isermann]
- Exemplos de escolhas típicas de h para processos industriais
 - Malha de vazão: $h = 1$ s
 - Malha de nível e pressão: $h = 5$ s
 - Malha de temperatura: $h = 20$ s

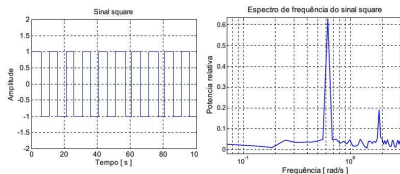
Escolha da amplitude

- Para processos não-lineares a amplitude deve ser limitada (próximo ao ponto de operação) para manter válida a abordagem linear
- A relação entre o nível do sinal aplicado e o ruído deve ser maior que 6.

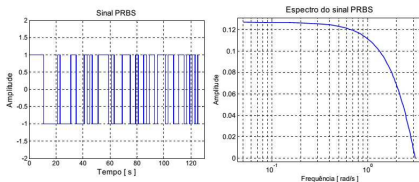
Sequência de identificação em malha aberta

- 1 Selecionar um sinal de identificação e aplicá-lo em torno do ponto de operação;
- 2 Escolher tempo de amostragem com base na constante de tempo dominante observada (a escolha de h para o cálculo do parâmetros e do modelo pode não ser a mesma da taxa de aquisição do conversor A/D);
- 3 Fazer aquisição de dados (coletar sinais de entrada e saída);
- 4 Propor um modelo (função de transferência) e verificar representação no domínio z ;
- 5 Determinar os parâmetros (θ) com parte dos sinais adquiridos;
- 6 Utilizar uma parte dos dados para validar o modelo (comparação e avaliação do erro de estimação).

● Sinal PRBS (Pseudorandom binary signal)



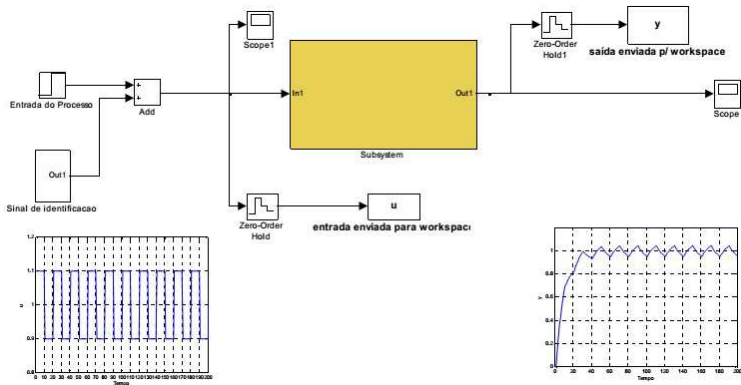
O sinal prbs (Pseudorandom binary signal)

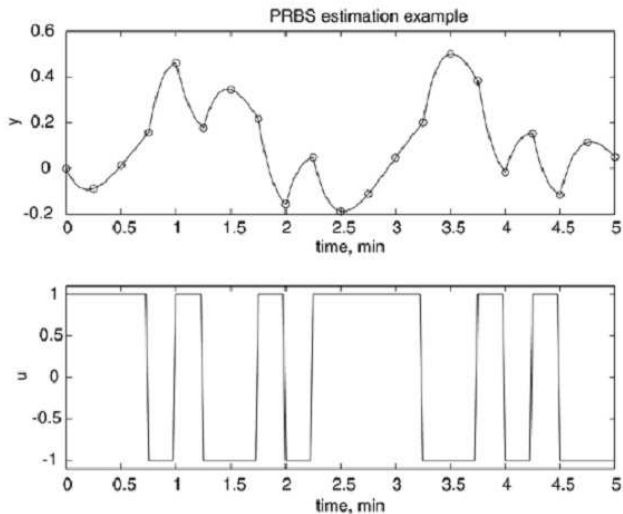


```
u = idinput(N,'prbs',band,[minu, maxu]); %band = [wlow, whigh]
% band = [0 B] implica que o sinal PRBS é constante em
% intervalos de comprimento 1/B
```

Exemplo: Crie um sinal de entrada periódico de **1** entrada consistindo de **5** períodos, em que cada período tem **300** amostras: `u = idinput([300 1 5]);`

Implementação





Implementação recursiva

- Em um experimento, um novo par entrada/saída é normalmente gerado em cada amostragem. Então, é conveniente estimar os parâmetros recursivamente.

- Assuma a notação $y(k - n_y) \triangleq y(kh - n_y h)$ e sejam os vetores

$$\varphi_{k-1}^T \triangleq [-y(k-1) \cdots -y(k-n_y) \quad u(k-1) \cdots u(k-n_u)] \quad (\text{regressores})$$

$$\theta^T \triangleq [a_1 \cdots a_{n_y} \quad b_1 \cdots b_{n_u}] \quad (\text{parâmetros})$$

então $y(k) = \varphi_{k-1}^T \theta$.

- A estimativa pode ser calculada recursivamente

$$e_k = y(k) - \varphi_{k-1}^T \theta_{k-1}$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \varphi_{k-1} \varphi_{k-1}^T P_{k-1}}{1 + \varphi_{k-1}^T P_{k-1} \varphi_{k-1}}$$

$$\theta_k = \theta_{k-1} + P_k \varphi_{k-1} e_k$$

- Observações:

- P_k é proporcional a matriz de covariância das estimativas
- Supor valor inicial de θ em função de alguma informação do processo
- Valor inicial de P_k é tipicamente escolhido como a matriz identidade multiplicado por um valor escalar alto