

Controle de Processos

Aula: Identificação aplicada à controle de processos

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília – UnB



2021

- 1 Modelos típicos
- 2 Obtenção de modelo empírico
- 3 Estimador de mínimos quadrados
- 4 Sistemas discretos no tempo
- 5 Identificação por modelos lineares auto-regressivos

Sistemas de 1^a e 2^a ordem mais atraso

A maioria das dinâmicas dos processos industriais podem ser aproximadas por sistemas de 1^a e 2^a ordem mais atraso no tempo (tempo morto):

- FOPTD (*first order plus time delay*): 1^a ordem + tempo morto

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

- SOPTD (*second order plus time delay*): 2^a ordem + tempo morto

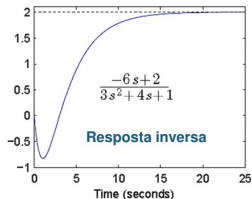
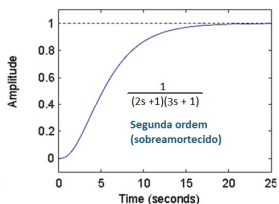
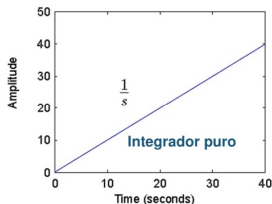
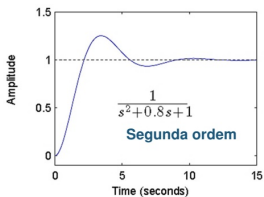
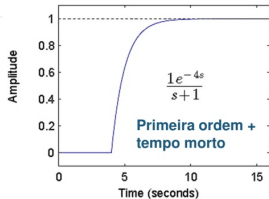
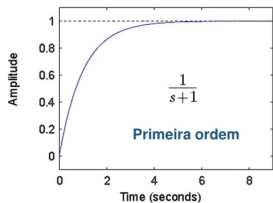
$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} \quad \text{ou}$$

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} e^{-\theta s} = \frac{(K\omega_n^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\theta s}, \quad \omega_n = \frac{1}{\tau}$$

- SOPTDLD (*SOPTD with lead*): 2^a ordem + tempo morto + zero

$$G(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

Respostas típicas ao degrau unitário



- 1 Modelos típicos
- 2 Obtenção de modelo empírico**
- 3 Estimador de mínimos quadrados
- 4 Sistemas discretos no tempo
- 5 Identificação por modelos lineares auto-regressivos

● Modelos obtidos através de um conjunto de dados (resposta do processo).
Principais métodos utilizados no 'chão de fábrica':

- 1 Resposta ao degrau (curva de reação do processo em malha aberta)
- 2 Método dos mínimos quadrados

Resposta ao degrau

Aproximação por $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$. Obtenção de K , τ e θ :

- 1 Método gráfico da reta tangente ao ponto de máxima variação
- 2 Por meio da definição de constante de tempo (63.2%)
- 3 Uso de 2 pontos (método de Broida)
- 4 Uso de conjunto de pontos

Aproximação por FOPDT via resposta ao degrau

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{U}(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}, \quad \tilde{U}(s) = \frac{\Delta u}{s}$$

$$\tilde{y}(t) = K\Delta u \tilde{u}(t - \theta) \left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}\right), \quad \tilde{u}(t) : \text{degrau unitário}$$

Método da reta tangente

- Seja a aplicação de um degrau de amplitude Δu

$$t_1 = \theta$$

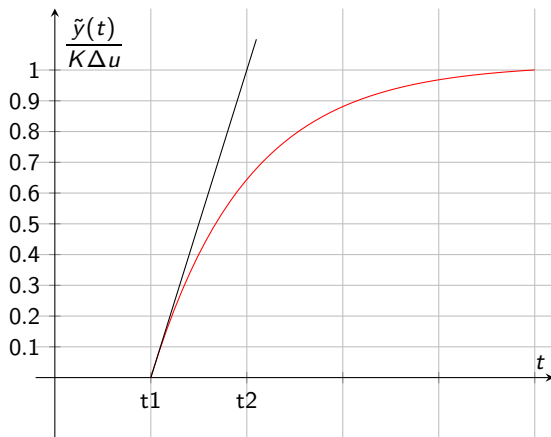
$$t_2 = \theta + \tau$$

$$\text{Ganho: } K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\tilde{y}(\infty)}{\tilde{u}(\infty)}$$

$$\tilde{y}(t) = K\Delta u \tilde{u}(t - \theta) \left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}\right)$$

$$\left. \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \right|_{t=\theta} = \frac{K\Delta u}{\tau} = \frac{\Delta y}{\tau}$$

Identificação pela reta tangente



Resposta ao degrau de amplitude Δu .

Método da reta tangente

Processos integradores ou instáveis

Deseja-se aproximar o processo por

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{s}$$

Resposta ao degrau de amplitude Δu :

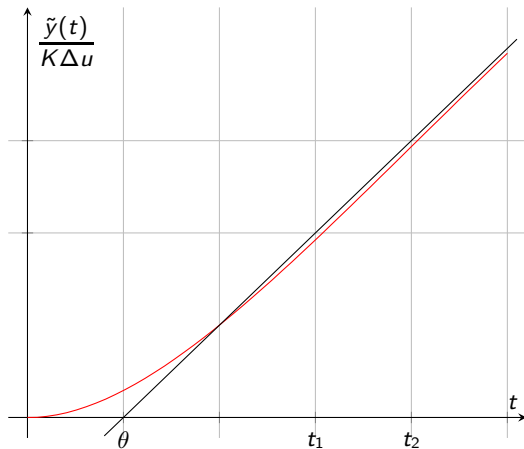
$$y(t) = K\Delta u u(t - \theta) \cdot (t - \theta)$$

Para $t_2 > t_1 > \theta$, $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$y(t_2) - y(t_1) = K\Delta u \Delta t$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

Identificação pela reta tangente



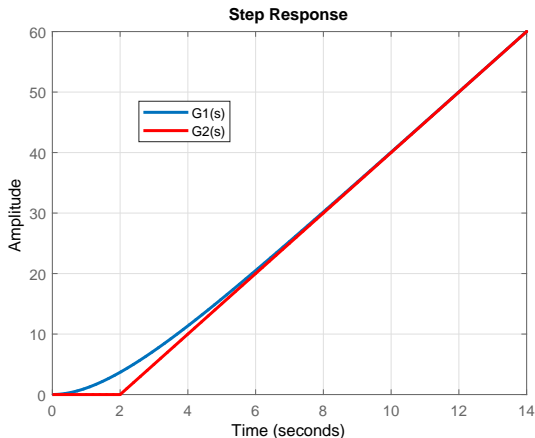
Resposta ao degrau de amplitude Δu .

Identificação pela reta tangente

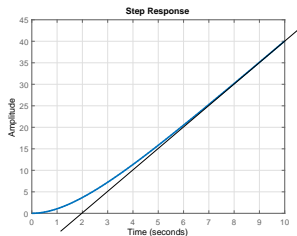
- Seja as funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{5}{s(2s + 1)}, \quad G_2(s) = \frac{5e^{-2s}}{s}$$

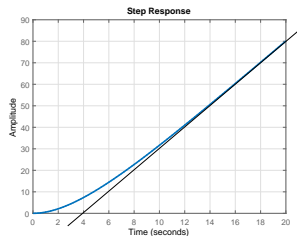
- Resposta ao degrau unitário:



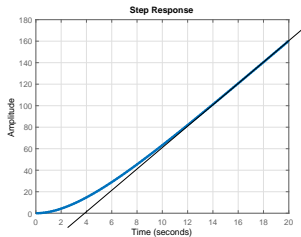
Polo na origem



(a)



(b)



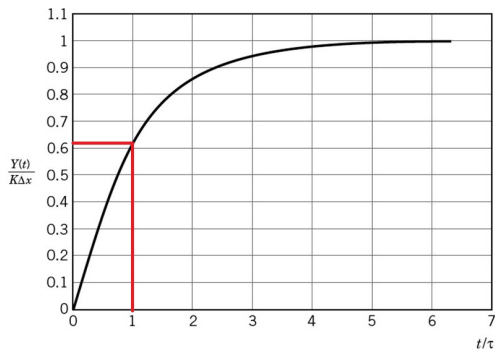
(c)

$$(a) \quad G(s) = \frac{5}{s(2s + 1)}$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{5}{s(4s + 1)}$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{10}{s(4s + 1)}$$

Identificação por meio da definição de τ



Resposta ao degrau de amplitude Δx .

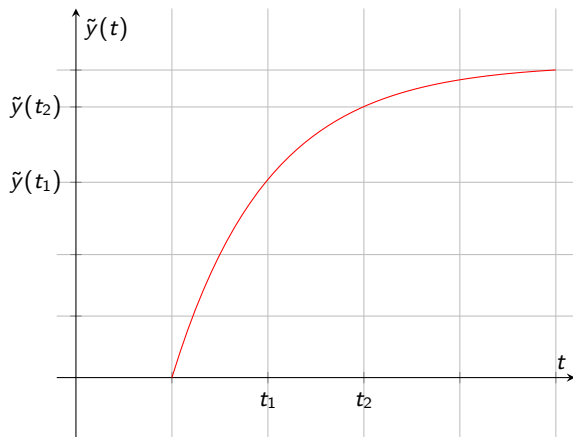
Método de identificação com 2 pontos

- Escolhe-se

$$\begin{array}{l} t_1 = \theta + \frac{\tau}{3} \\ t_2 = \theta + \tau \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y(t_1) = 0,283\Delta y \\ y(t_2) = 0,632\Delta y \end{array}$$

Logo,

$$\begin{cases} \tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ \theta = t_2 - \tau \end{cases}$$

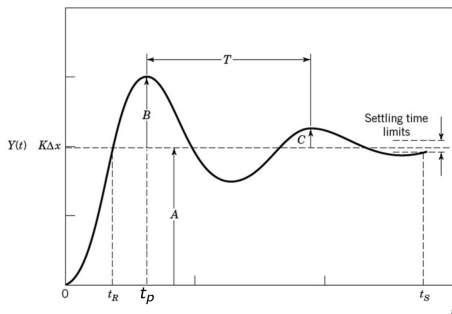


Resposta ao degrau.

Sistemas de segunda ordem

- Considere o modelo a ser obtido e a resposta ao degrau

$$G(s) = \frac{(K\omega_n^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-\theta s}, \quad \omega_n = \frac{1}{\tau}$$



- A partir do máximo sobressinal ($MS = B/A$) e do tempo de pico (t_p), obtém-se

$$\zeta = \frac{-\ln(MS)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(MS)}}, \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

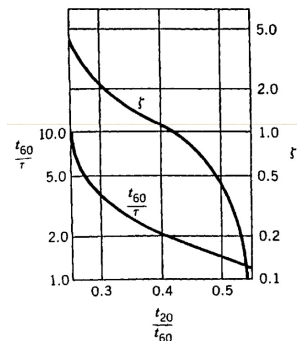
Sistemas de segunda ordem: método gráfico

- Considere o modelo a ser obtido

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

- O método gráfico de Smith (1972) pode ser empregado:

- 1 Da resposta ao degrau, determine o tempo (o atraso é removido) em que a resposta atinge 20% e 60% da amplitude final (Δy), denotado por t_{20} e t_{60} , respectivamente.
- 2 Da figura abaixo (Seborg), determine o ζ e τ .



Sistemas de segunda ordem: método de 3 pontos

- Considere o modelo

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

- Método de 3 pontos de Rangaiah e Krishnaswamy (1994):

- 1 Da resposta ao degrau, determine o ganho K
- 2 Ache os instantes t_1 , t_2 e t_3 que correspondem respectivamente à 14%, 55% e 91% da amplitude final (Δy)
- 3 Calcule α , β e ζ à partir das equações

$$\alpha = (t_3 - t_2)/(t_2 - t_1), \quad \beta = \ln(\alpha/(2.485 - \alpha)),$$

$$\zeta^2 = 0.50906 + 0.51743\beta - 0.076284\beta^2 + 0.041363\beta^3 - 0.0049224\beta^4 + 0.00021234\beta^5$$

- 4 Computar τ e θ à partir das equações

$$(t_2 - t_1)/\tau = 0.85818 - 0.62907\zeta + 1.2897\zeta^2 - 0.36859\zeta^3 + 0.038891\zeta^4$$

$$(t_2 - \theta)/\tau = 1.3920 - 0.52536\zeta + 1.2991\zeta^2 - 0.36014\zeta^3 + 0.037605\zeta^4$$

- As correlações acima forma baseadas no método dos mínimos quadrados do IAE e funcionam bem para $0.707 \leq \zeta \leq 3.0$ (resposta sem sobressinal).

- Para $\zeta > 3.0$ a resposta é essencialmente de primeira ordem e os métodos correspondentes são recomendados.

Considerações sobre obtenção da resposta ao degrau

Orientações:

- Controlador deve estar em manual (malha aberta)
- degrau deve ser grande o suficiente para ser mensurável mas não ao ponto da resposta ser distorcida por não-linearidades
- certifique-se de que não há distúrbios no processo
- repetir o teste várias vezes (subida e descida)

Limitações:

- maioria dos processos são não-lineares e de alta ordem
- a saída é geralmente contaminada por ruído
- distúrbios podem ocorrer durante o teste
- a degrau não é perfeito (constante de tempo de válvulas, rampa na aceleração de motores etc), mas são boas aproximações em comparação à constante de tempo do processo

- 1 Modelos típicos
- 2 Obtenção de modelo empírico
- 3 Estimador de mínimos quadrados**
- 4 Sistemas discretos no tempo
- 5 Identificação por modelos lineares auto-regressivos

- Para modelos lineares, o estimador de mínimos quadrados é largamente utilizado para estimar parâmetros de modelo (regressão linear).
- Por exemplo, para o modelo $y = \theta_1 + \theta_2 u + \varepsilon$, os pontos individuais da entrada u e da saída y são expressos como $y_i = \theta_1 + \theta_2 u_i + \varepsilon_i$, em que ε_i é um erro aleatório não conhecido.
- O método dos mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados do erro de estimação (resíduo) se ε_i são estatisticamente independentes e com distribuição normal

$$J_{MQ} = \sum_{k=1}^N e_i^2, \quad e_i = y_i - \hat{y}_i, \quad \hat{y}_i = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 u_i$$

em que $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são os parâmetros estimados.

Estimador de mínimos quadrados

- Considere o caso geral de um modelo *linear nos parâmetros* (possivelmente não-linear nas entradas) na forma

$$y = \sum_{i=1}^p \theta_i \varphi_i + \varepsilon$$

- A soma dos quadrados do erros pode ser expressa como

$$J_{MQ} = (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta})$$

em que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1p} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{np} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}}_{\theta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}}_E$$

- A estimação dos parâmetros $\hat{\theta}$ do modelo de predição $\hat{y} = \sum_{i=1}^p \hat{\theta}_i \varphi_i$ é dada por

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad \Phi^T \Phi > 0$$

- Note que a matriz Φ é dada por funções das variáveis de entrada u . Por exemplo, se $y = \theta_1 + \theta_2 u_1 + \theta_3 u_1^2 + \theta_4 u_2 + \varepsilon$, então $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = u_1$, $\varphi_3 = u_1^2$ e $\varphi_4 = u_2$, $p = 4$.

Estimador de mínimos quadrados

Exemplo: estimação do modelo de escoamento de um tanque

● Considere um tanque com um escoamento de saída cujo modelo é dado por $q = kh^\alpha$ em que q é a vazão de saída, h é o nível do tanque, k e α parâmetros a serem determinados.

● Observe que o modelo é não linear nos parâmetros do sistema. Aplicando-se o operador $\ln(\cdot)$ em todos os termos da equação, tem-se

$$\ln(q) = \ln(k) + \alpha \ln(h),$$

e considerando n amostras,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ln(q_1) \\ \ln(q_2) \\ \vdots \\ \ln(q_n) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \ln(h_1) \\ 1 & \ln(h_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(h_n) \end{bmatrix}}_\Phi \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(k) \\ \alpha \end{bmatrix}}_\theta, \quad Y = \Phi\theta$$

- Os parâmetros podem ser estimados por $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$
- Caso apenas o nível h seja medido, pode-se considerar o escoamento livre, ou seja, sem nenhuma corrente de entrada e o tanque cheio. Nesse caso, $q = -Adh/dt$, em que A é a área da seção transversal do tanque.

Identificação de modelo de primeira ordem por múltiplos pontos

- Seja a resposta ao degrau de amplitude Δu (considere que o atraso θ é conhecido e desconsiderado pela translação no tempo da resposta)

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{K\Delta u}_{\tilde{y}(\infty)} \tilde{u}(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- Manipulando-se

$$\underbrace{\ln\left(\frac{\tilde{y}(\infty) - \tilde{y}(t)}{\tilde{y}(\infty)}\right)}_{\Phi(t)} = -\frac{1}{\tau}t$$

Para vários valores de $(t, \tilde{y}(t))$ pode-se plotar um reta com inclinação $m = -1/\tau$.

- Obs.: Para sistemas de primeira ordem tem-se $\tilde{y}(\infty) > \tilde{y}(t)$ mas essa condição pode ser violada devido a ruídos. Nesse caso, desprezar os dados que não satisfazem essa relação para o cálculo do $\ln(\cdot)$.

Obtenção do modelo de primeira ordem

Aplicando-se o método dos mínimos quadrados,

$$m = (T' T)^{-1} T' \Phi$$

em que T é o vetor com os instantes de tempo t_i e Φ o vetor com os valores $\Phi(t_i)$

$$T = [t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_N]^T, \quad \Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_N]^T, \quad \Phi_i = \ln \left(\frac{\tilde{y}(\infty) - \tilde{y}(t_i)}{\tilde{y}(\infty)} \right)$$

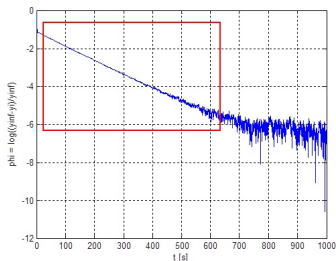
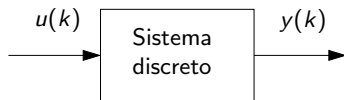


Figura: Janela de dados usados na estimação.

- Esse método não funciona para funções de transferência de ordens mais altas e uma descrição da dinâmica em tempo discreto será apresentada na sequência.

- 1 Modelos típicos
- 2 Obtenção de modelo empírico
- 3 Estimador de mínimos quadrados
- 4 Sistemas discretos no tempo**
- 5 Identificação por modelos lineares auto-regressivos



- $u(k) = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$, $y(k) = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$: seqüência de número reais

Sistema discreto contínuo e invariante no tempo

- Equação diferenças:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

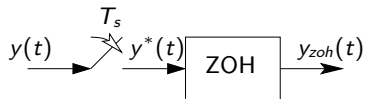
- Função de transferência discreta^a

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$\rightsquigarrow z^{-1}$: operador deslocamento $\rightsquigarrow \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)z^{-m}\} = y(k-m)$

$$Y(z) + a_1 Y(z)z^{-1} + a_2 Y(z)z^{-2} = b_1 U(z)z^{-1} + b_2 U(z)z^{-2}$$

^aTransformada z: $Y(z) := \mathcal{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$.

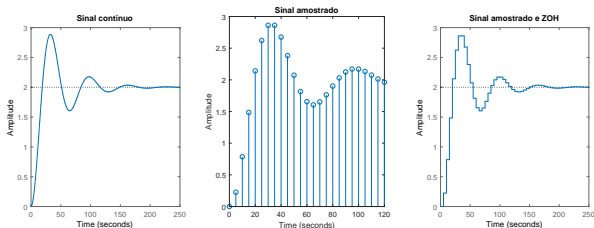


Amostragem do sinal $y(t)$ a cada T_s segundos seguido de um segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *zero-order hold*).

• Tem-se

$$y^*(t) = y(kT_s)\delta(t - kT_s), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$y_{zoh}(t) = y(kT_s), \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

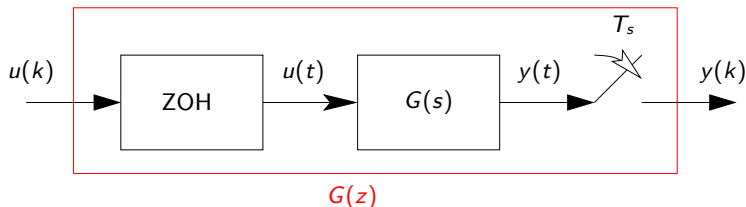


Sinais $y(t)$ (à esquerda), $y^*(t)$ (centro) e $y_{zoh}(t)$ (à direita).

↪ Se definirmos $z := e^{sT_s}$ a transformada z é proporcional à transformada de Laplace para sistemas contínuos amostrados (se aproxima quando $T_s \rightarrow 0$).

Equivalência entre sistemas contínuos e discretos no tempo

- **Discretização** via segurador de ordem zero (ZOH) $G(z)$ de uma planta contínua no tempo $G(s)$:



- A discretização com ZOH produz um casamento exato entre os sistemas contínuos e discretos no domínio no tempo para entradas tipo escada.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}, \quad z := e^{sT_s}$$

Uma aproximação para o mapeamento do domínio s no domínio z é dada pela aproximação bilinear ou Tustin:

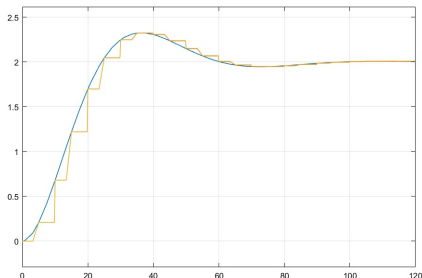
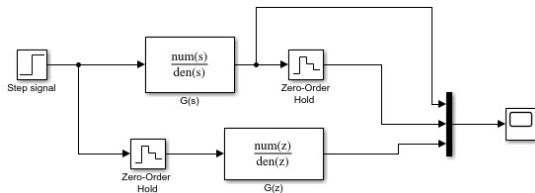
$$z = e^{sT_s} \approx \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \Rightarrow s = \frac{2(z - 1)}{T_s(z + 1)}$$

↪ Comandos Matlab: `sysd=c2d(sysc,Ts,'zoh')` e `sysd=c2d(sysc,Ts,'tustin')`

Equivalência entre sistemas contínuos e discretos no tempo

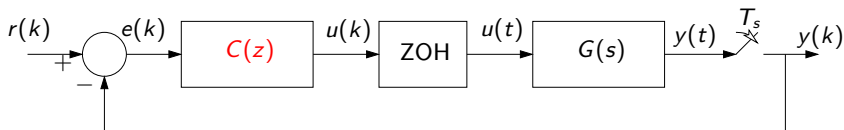
- Exemplo de discretização:

$$G(s) = \frac{2}{100s^2 + 10s + 1}, \quad G(z) = \frac{0.2088z + 0.1766}{z^2 - 1.414z + 0.6065}, \quad T_s = 5 \text{ seg.}$$



Sistema de controle digital

● Sistema de controle digital



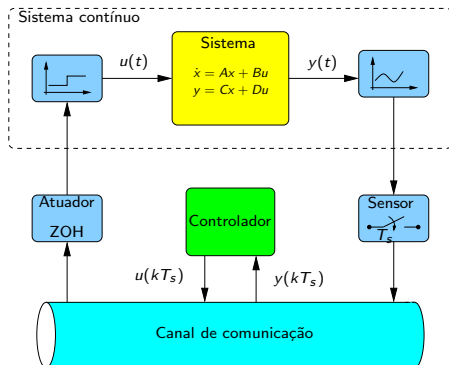
● Controlador digital PID com ganhos (K_p, K_i, K_d) e filtro na ação derivativa com parâmetro N obtido via *backward Euler method*:

$$C(z) = K_p + \frac{K_i T_s z}{z - 1} + \frac{K_d N (z - 1)}{(1 + N T_s) z - 1} \quad (1)$$

Quantização

A amplitude também pode ser discretizada em um conjunto finito de valores discretos dado pelo número de bits usado pelo conversor analógico-digital A/D (ex.: 8-bit equivale à 256 níveis).

Sistema de controle em rede



Assumptions

- Constant sampling-time T_s
- Time-driven sensors (kT_s , $k \in \mathbb{N}$)
- Event-driven controller
- Event-driven actuator

• Continuous-time plant:

$$\dot{x} = Ax + Bu^*$$

$$y = Cx + Du$$

• Zero-order hold (ZOH):

$$u^*(t) = u_k, t \in [t_k, t_{k+1}]$$

- 1 Modelos típicos
- 2 Obtenção de modelo empírico
- 3 Estimador de mínimos quadrados
- 4 Sistemas discretos no tempo
- 5 Identificação por modelos lineares auto-regressivos

- Seja uma função de transferência no domínio z dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- A representação no domínio do tempo discreto é dada pela equação diferenças

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$

em que

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$$

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}$$

q é o operador de atraso (q^{-1} : atraso de um período de amostragem).

- Exemplo:

$$y(k) = \alpha y(k-1) + (1-\alpha)u(k), \quad 0 \leq \alpha < 1 \Leftrightarrow H(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \quad (\text{low-pass IIR filter})$$

$$y(k) = \frac{1}{2}u(k) + \frac{1}{2}u(k-1) \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1} \quad (\text{moving average FIR filter})$$

Representação de sistemas

- Equação a diferença linear \rightsquigarrow relação entrada-saída
- Tempo discreto \rightsquigarrow dados coletados por amostragem

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_y} y(k-n_y) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) \quad (2)$$

- Próximo valor de saída

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_y} y(k-n_y) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) \quad (3)$$

- Notação compacta

$$y(k) = \varphi(k)^T \theta, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \mathbb{R}^n, \quad n = n_y + n_u \quad (4)$$

com

$$\varphi(k)^T = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-n_y) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n_u)] \quad (\text{regressores})$$

$$\theta^T = [a_1 \ \dots \ a_{n_y} \ b_1 \ \dots \ b_{n_u}] \quad (\text{parâmetros})$$

Objetivo

Estimar

$$\theta = [a_1 \ \dots \ a_{n_y} \ b_1 \ \dots \ b_{n_u}]^T \rightsquigarrow \hat{\theta} \quad (5)$$

$$\min \hat{\theta} - \theta \quad (6)$$

- Realização de N medidas

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(1)^T \\ \varphi(2)^T \\ \vdots \\ \varphi(N)^T \end{bmatrix} \theta \quad \Longrightarrow \quad Y = \Phi \theta \quad (7)$$

$$Y \in \mathbb{R}^N, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{(n) \times N}, \quad \theta \in \mathbb{R}^n$$

- Se $N = n \rightsquigarrow \theta = \Phi^{-1} Y$, desde Φ não singular
- Se $N > n \rightsquigarrow$ sistema sobredeterminado

$$\Phi^T Y = \Phi^T \Phi \theta \quad \Longrightarrow \quad \theta = \underbrace{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T}_{\text{pseudo-inversa}} Y, \quad \Phi^T \Phi \text{ não singular}$$

Exemplo

$$H(s) = \frac{K(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad \xleftrightarrow{T_s} \quad H(z) = \frac{b_1z + b_2}{z^2 + a_1z + a_2} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

$$y(k) = \underbrace{[-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k-1) \quad u(k-2)]}_{\varphi(k)^T} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) & u(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

$$Y = \Phi\theta$$

$$\theta = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY, \quad \Phi^T\Phi > 0$$

Exemplo

Considere um sistema em que se deseja obter o modelo mais adequado as seguintes medidas

$$\begin{aligned}t = 1: & \quad u(1) = 0 \quad y(1) = 0 \\t = 2: & \quad u(2) = 1 \quad y(2) = 0.9 \\t = 3: & \quad u(3) = 2 \quad y(3) = 2.1\end{aligned} \quad (8)$$

- 1 Considere o modelo constante $y(k) = \theta_0$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\theta}_0 = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = 1.0 \Rightarrow J_{MQ} = 2.2 \quad (9)$$

- 2 Considere o modelo linear $y(k) = \theta_0 + \theta_1 u(k) = [1 \quad u(k)] \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\theta} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ 1.05 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{MQ} = 0.015, \quad \Phi^T E \approx 0 \quad (10)$$

- 3 Considere o modelo $y(k) = \theta_0 + \theta_1 u(k) + \theta_2 u(k-1)$

$$\hat{\theta}^T = [0 \quad 0.9 \quad 0.3] \Rightarrow J_{MQ} \approx 0 \quad (11)$$

Representação de sistemas

- Sistemas com atraso no tempo de θ e período de amostragem T_s

$$H(z) = \frac{B(z)z^{-d}}{A(z)}, \quad A(q)y(k) = B(q)q^{-d}u(k), \quad d = \theta \operatorname{div} T_s$$

Obs.: $y(k) \triangleq y(kT_s)$ e $y(k-n) \triangleq y(kT_s - nh)$

- Conversão de sistemas $H(s) \implies H(z)$ (Matlab: `d2c(sys)`; `c2d(sys, Ts)`):

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s} \implies H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^d(z + a_1)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})z^{-d}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

em que

$$a_1 = -e^{-T_s/\tau}, \quad b_0 = K(1 - e^{-(T_s - L)/\tau}), \quad b_1 = Ke^{-T_s/\tau}(e^{L/\tau} - 1)$$

$d = \theta \operatorname{div} T_s$ ($\theta < T_s \implies d = 1$), $L = \theta \operatorname{mod} T_s$ ($\theta < T_s \implies L = \theta$)

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \implies H(z) = \frac{b_1}{z + a_1} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$H(s) = \frac{K(s + a)}{\tau s + 1} \implies H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$H(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)} \implies H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Propriedade do método dos mínimos quadrados

- Erro ao explicar $y(k)$ através de $\varphi(k)$ e $\hat{\theta} \rightsquigarrow e(k)$ (resíduo)

$$y(k) = \varphi(k)^T \hat{\theta} + e(k) \quad \implies \quad Y = \Phi \hat{\theta} + E \quad (12)$$

- Função custo

$$J_{MQ} = \sum_{k=1}^N e(k)^2 = E^T E = \|E\|^2 \quad (13)$$

- Índice de ajuste de $\Phi \hat{\theta}$ a $Y \rightsquigarrow$ escolha de $\hat{\theta}$ que minimiza J_{MQ}

$$\begin{aligned} J_{MQ} &= (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}) \\ &= Y^T Y - Y^T \Phi \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \Phi^T Y + \hat{\theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\theta} \end{aligned} \quad (14)$$

- Minimização de $J_{MQ} \rightsquigarrow (\partial J_{MQ} / \partial \hat{\theta}) = 0$

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} = -(Y^T \Phi)^T - \Phi^T Y + (\Phi^T \Phi + \Phi^T \Phi) \hat{\theta} = -2\Phi^T Y + 2(\Phi^T \Phi) \hat{\theta} = 0 \quad (15)$$

Portanto,

$$\hat{\theta} = \arg_{\theta} \min J_{MQ} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad \text{pois} \quad \frac{\partial^2 J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}^2} = 2\Phi^T \Phi > 0 \quad (16)$$

- EMQ $\rightsquigarrow \min \|E\|^2 = \min \|Y - \hat{Y}\|^2, \quad \hat{Y} = \Phi \hat{\theta}$
- Seja $\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n] \rightsquigarrow \hat{Y} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \hat{\theta}_i \rightsquigarrow \hat{Y} \in \text{c.l.}\{\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n\}$

Problema (geométrico)

Achar uma combinação linear de Φ_i ($\sum_{i=1}^n \Phi_i \hat{\theta}_i$) que mais se aproxima de Y .

- Da GA,

$$d_{\min}(Y, \text{plano gerado pela combinação de } \Phi_i) \\ = \|Y - \text{Proj}_{\perp}(Y, \text{plano})\|$$

- Seja $Y^* = \text{Proj}_{\perp}(Y, \text{plano}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j \theta_j^*$
- $\rightsquigarrow \Phi_i^T(Y - Y^*) = 0, i = 1, \dots, n$

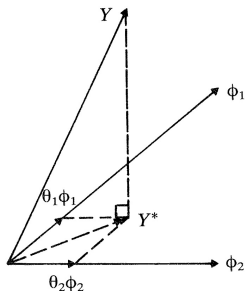


Ilustração geométrica para o caso $N = 3$ e $n = 2$.

$$\Phi_i^T Y = \sum_{j=1}^n \Phi_i^T \Phi_j \theta_j^* \Rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1^T \Phi_1 & \dots & \Phi_1^T \Phi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_n^T \Phi_1 & \dots & \Phi_n^T \Phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \vdots \\ \theta_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^T Y \\ \vdots \\ \Phi_n^T Y \end{pmatrix}$$

$$(\Phi^T \Phi) \theta^* = \Phi^T Y$$

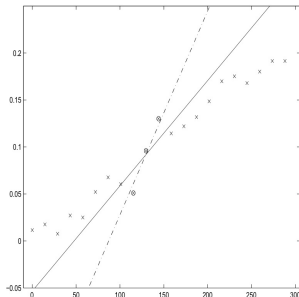
$$\therefore \theta^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \rightsquigarrow Y^* = \hat{Y} = \Phi \hat{\theta} \rightsquigarrow \Phi^T E = 0 \text{ e } \hat{Y}^T E = 0$$

Estimador de Mínimos Quadrados Ponderado

- Estimador clássico \rightsquigarrow penaliza igualmente os erros para cada observação de Y
- Situação em que se deseja dar pesos diferentes \rightsquigarrow ex. operação em “pontos distantes”

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^N e(i)w_i e(i) = E^T W E \quad (17)$$

$$W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_N\} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (18)$$



Mínimos Quadrados Ponderados

$$\hat{\theta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W Y \quad (19)$$

$$W > 0 \Rightarrow \Phi^T W \Phi > 0 \quad (20)$$

Implementação numérica

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \Rightarrow \hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^N \phi(k) \phi(k)^T \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \phi(k) y(k) \right) \quad (21)$$

Resumo

- $y(k) = \varphi(k)^T \theta$ N medidas $Y = \Phi^T \theta$
- $\hat{\theta} = \arg_{\theta} \min (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$

- Conversão modelo discreto para contínuo: $d2c(sys)$
- Conversão modelo contínuo para o discreto: $c2d(sys, Ts)$

● Em um experimento, um novo par entrada/saída é normalmente gerado em cada amostragem. Então, é conveniente estimar os parâmetros recursivamente.

● Assuma a notação $y(k - n_y) \triangleq y(kh - n_y h)$ e sejam os vetores

$$\varphi_k^T \triangleq [-y(k-1) \cdots -y(k-n_y) \quad u(k-1) \cdots u(k-n_u)] \quad (\text{regressores})$$

$$\theta^T \triangleq [a_1 \cdots a_{n_y} \quad b_1 \cdots b_{n_u}] \quad (\text{parâmetros})$$

então $y(k) = \varphi_k^T \theta + e(k)$, com $E[e_k e_k^T] = R_k$ (adotar $R_k = I$ se desconhecido).

● A estimativa pode ser calculada recursivamente

$$K_k = P_{k-1} \varphi_k \left(\varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k + R_k \right)^{-1}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \left[y(k) - \varphi_k^T \hat{\theta}_{k-1} \right]$$

$$P_k = P_{k-1} - K_k \varphi_k^T P_{k-1}$$

● Observações:

- P_k é proporcional a matriz de covariância das estimativas $P_k = \text{cov}[\hat{\theta}_k]$
- Supor valor inicial de $\hat{\theta}_0$ em função de alguma informação do processo ou $\hat{\theta}_0 = 0$
- Valor inicial de P_k é tipicamente escolhido como $P_0 = \mu I$, $\mu \in [10^3, 10^7]$
- Para melhor desempenho computacional é possível escolher $K_k = P_{k-1} \varphi_k$

Estimação das matrizes de estado

- Seja o modelo

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) + e(k), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

sendo $e(k)$ o erro de regressão.

- Pode-se reescrever o modelo acima como

$$x(k) = \underbrace{[A \quad B]}_{\theta^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix}}_{\varphi_k} = \varphi_k^T \theta$$

- Aplicar os métodos de estimação de mínimos quadrados considerando $y(k) = \varphi_k^T \theta$, em que $y(k) = x(k)$.

- Obs.: Necessário medir os n estados do sistema.

- Seja o modelo

$$\begin{aligned}x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + Ew_{k-1} \\y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}$$

com $E[w_k w_k^T] = Q_k$, $E[v_k v_k^T] = R_k$, $E[v_i w_j^T] = 0$, $\forall i, j$.

- O estimador de \hat{x}_k que minimiza $E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]$ é chamado de **Filtro de Kalman**.
- Implementação para condições iniciais \hat{x}_0 e P_0 :

Preditor de Kalman

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + AK_k[y_k - C\hat{x}_k] \\K_k &= P_k C^T [CP_k C^T + R_k]^{-1} \\P_{k+1} &= AP_k A^T - AK_k CP_k A^T + EQ_k E^T\end{aligned}$$

- ↪ A última equação é conhecida como a equação de Riccati discreta.
- As equações acima resumem as etapas preditora e corretora.
- K_k ↪ ganho de Kalman; P_k ↪ estimativa da matriz de covariância do erro.

Estimação de parâmetros via filtro de Kalman

- Parâmetros invariantes no tempo: $\theta_{k+1} = \theta_k + w_k$, w_k variável aleatória com distribuição gaussiana não correlacionada com v_k
- Filtro de Kalman com

$$\hat{x}_k = \hat{\theta}_k, \quad A = I, \quad B = 0, \quad E = I, \quad C = \varphi(k)^T$$

Estimação conjunta de estados e parâmetros via filtro de Kalman

- Sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{\theta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta_k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{\theta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k \\ \eta_k \end{bmatrix}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C(\theta_k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{\theta}_k \end{bmatrix} + v_k$$

- Sistema não linear no estado aumentado $z_k = [x_k^T \quad \theta_k^T]^T \rightsquigarrow$ Filtro de Kalman Estendido (EKF, do inglês *Extended Kalman Filter*).

Escolha do tempo de amostragem

- A seleção do tempo de amostragem (T_s) é crítica para o desempenho do controle;
- Amostragem muito lenta (alto T_s) pode reduzir a eficiência do controle;
- A relação sinal/ruído influencia na seleção do tempo de amostragem. Alta taxa de amostragem não é recomendada quando a relação sinal/ruído é alta. Recomenda-se a utilização de filtros neste caso.

Escolha do tempo de amostragem

- Métodos baseados na resposta em malha aberta
 - $T_s < 0.1\tau_{\max}$ [Kalman and Bertram]
 - $0.2 < T_s/\theta < 1$ (FOPTD)
 - $0.01 < T_s/\tau < 0.05$ [Astrom e Wittenmark]
 - $t_s/15 < T_s < t_s/6$ (t_s : tempo acomod. 95%) [Isermann]
- Exemplos de escolhas típicas de T_s para processos industriais
 - Malha de vazão: $T_s = 1$ s
 - Malha de nível e pressão: $T_s = 5$ s
 - Malha de temperatura: $T_s = 20$ s

Escolha da amplitude

- Para processos não-lineares a amplitude deve ser limitada (próximo ao ponto de operação) para manter válida a abordagem linear
- A relação entre o nível do sinal aplicado e o ruído deve ser maior que 6.

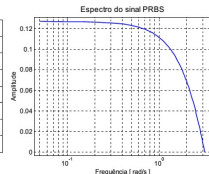
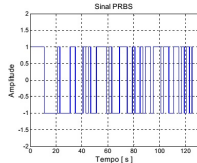
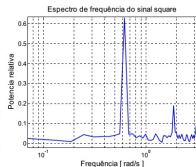
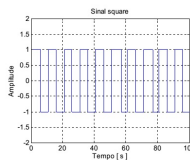
Sequência de identificação em malha aberta

- 1 Selecionar um sinal de identificação e aplicá-lo em torno do ponto de operação;
- 2 Escolher tempo de amostragem com base na constante de tempo dominante observada (a escolha de T_s para o cálculo do parâmetros e do modelo pode não ser a mesma da taxa de aquisição do conversor A/D);
- 3 Fazer aquisição de dados (coletar sinais de entrada e saída);
- 4 Propor um modelo (função de transferência) e verificar representação no domínio z ;
- 5 Determinar os parâmetros (θ) com parte dos sinais adquiridos;
- 6 Utilizar uma parte dos dados para validar o modelo (comparação e avaliação do erro de estimação).

Sinal de excitação

- O uso de outros sinais de excitação além do degrau pode levar a obtenção de melhores modelos \rightsquigarrow Sinal PRBS (Pseudorandom binary signal)

O sinal prbs (Pseudorandom binary signal)



```
u = idinput(N,'prbs',band,[minu, maxu]); %band = [wlow, whigh]
% band = [0 B] implica que o sinal PRBS é constante em
% intervalos de comprimento 1/B
```

Exemplo 1: Crie um sinal de entrada periódico de **1** entrada consistindo de **5** períodos, em que cada período tem **300** amostras: `u = idinput([300 1 5]);`

Exemplo 2: Crie um sinal com 300 amostras cuja variação ocorra no mínimo a cada $1/0.2$ amostras: `U = idinput(300,'prbs',[0 .2],[-1, 1]);` Se o período de amostragem é $T_s = 0.5$ então o sinal PRBS irá manter o nível por pelo menos $1/0.2 * 0.5 = 2.5$ unidades de tempo (segundos, minutos etc).

Exemplo de estimação com sinal PRBS (I)

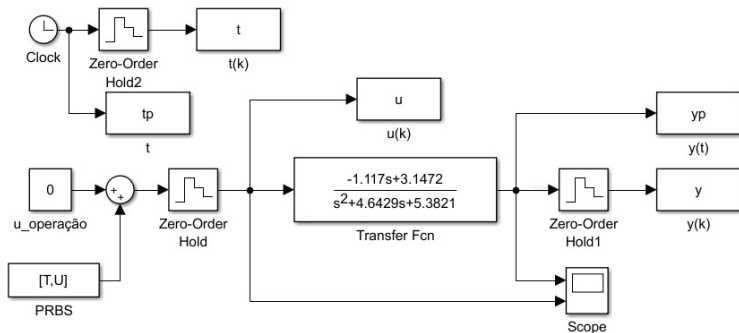


Figura: B. W. Bequette, Process Control: modeling, design and simulation, 2013.

Implementação (I)

```
1 % use PRBS to estimate a discrete model
2 Ts = 0.25; % sampling time
3 T = 0:Ts:5; T = T'; % time vector
4 seed = [3;0.5]; % seed for noise generation
5 randn('state',seed); % using the same seed each time
6 uu = 0.5+ 0.25*randn(length(T),1); % mean 0.5 var. 0.25
7 U = 2*round(uu)-1; % creates PRBS with -1 and 1 values
8 stairs(T,uu); hold on; stairs(T,U,'r'); hold off;
9 sim('processoest'); % runs simulation diagram
10 figure(1); % plot input-output data
11 subplot(2,1,1),plot(tp,yp,'k',t,y,'ko');
12 xlabel('time, min'), ylabel('y'); title('example')
13 subplot(2,1,2),stairs(t,u,'k'); xlabel('time, ...
    min'),ylabel('u'); axis([0 5 -1.1 1.1])
```

Implementação (I)

● Implementação de

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) & u(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$
$$\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

```
1 N = length(T);
2 for j = 1:N-2 % phi matrix for estimation
3     phi(j,:) = [y(j+1) y(j) u(j+1) u(j)];
4 end
5 Y = y(3:N);
6 theta = inv(phi'*phi)*phi'*Y % estimation
```

Implementação (I)

- Funções de transferência discreta e contínua:

```
1 num = [theta(3) theta(4)]; % numerator of discrete ...  
   transfer function  
2 den = [1 -theta(1) -theta(2)]; % denominator of ...  
   discrete transfer function  
3 sysd = tf(num,den,0.25) % create discrete tf object  
4 tzero(sysd) % calculate zeros  
5 pole(sysd) % calculate poles  
6 syszpk = zpk(sysd) % zero-pole-k form  
7 sysc=d2c(sysd) % discrete to continuous
```

- Resultado:

$$G(z) = \frac{\hat{\theta}_3 z + \hat{\theta}_4}{z^2 - \hat{\theta}_1 z - \hat{\theta}_2}$$

sysc =

-1.117 s + 3.147

s^2 + 4.643 s + 5.382

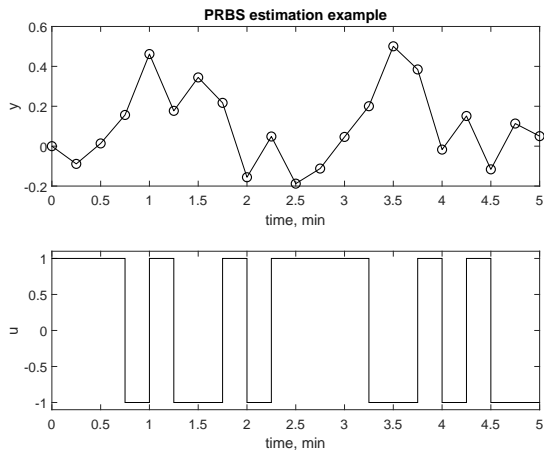


Figura: B. W. Bequette, Process Control: modeling, design and simulation, 2013.

Exemplo de estimação com sinal PRBS (II)

- Considere um sistema não linear com ponto de operação em regime permanente $u = 5$ e $y = 3$.
- Nesse caso, o sinal PRBS deve ser aplicado em torno de 5 conforme o diagrama abaixo.

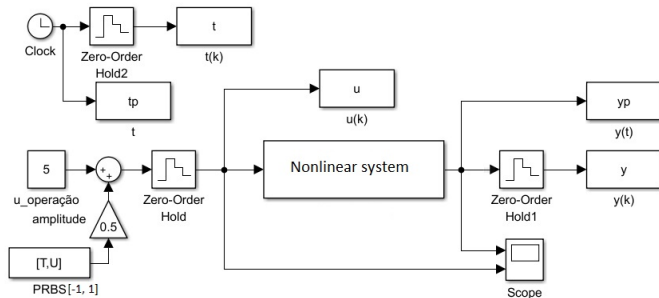


Figura: Sinal PRBS de amplitude 0.5 em torno do ponto de operação da entrada em 5.

Exemplo de estimação com sinal PRBS (II)

● Para a identificação de um sistema linear auto-regressivo é necessário considerar os dados expressos em **variáveis de desvio**, ou seja, subtraindo os valores em estado estacionário $u = 5$ e $y = 3$.

● Importante considerar a janela de dados compreendendo o período em que a resposta à condição inicial é zero, ou seja, o instante a partir do qual para uma entrada constante $u = 5$ a saída atinge o valor em regime permanente $y = 3$.

↪ No exemplo, consideramos que a influência da resposta à condição inicial seja nula a partir de $t > 1\text{min}$, ou equivalentemente, **a partir da quinta amostra** considerando $T_s = 0.25$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(7) \\ y(8) \\ y(9) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_Y = \begin{bmatrix} -y(6) & -y(5) & u(6) & u(5) \\ -y(7) & -y(6) & u(7) & u(6) \\ -y(8) & -y(7) & u(8) & u(7) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_\theta$$

Exemplo de estimação com sinal PRBS (II)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(7) \\ y(8) \\ y(9) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(6) & -y(5) & u(6) & u(5) \\ -y(7) & -y(6) & u(7) & u(6) \\ -y(8) & -y(7) & u(8) & u(7) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix}}_\Phi \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_\theta$$

```

1 Ts = 0.25; T = 0:Ts:5; N = length(T);
2 U = idinput(N,'prbs',[0 1],[-1, 1]); %sinal PRBS
3 sim('processoest'); % roda diagrama simulink
4 ubar = 5; ybar = 3;
5 du = u - ubar; dy = y - ybar; % vars. desvio
6 kop = 5; % resp. c.i. nula a partir de t(kop)=1
7 for j = 1:N-1-kop % matriz regressores phi
8 phi(j,:)=[dy(j+kop) dy(j-1+kop) du(j+kop) du(j-1+kop)];
9 end
10 Y = dy(2+kop:N);
11 theta = inv(phi'*phi)*phi'*Y % parâmetros estimados
    
```

Verificação do modelo

- Dois conjuntos de dados independentes devem ser gerados, um é utilizado para a estimação e o outro para a validação do modelo \rightsquigarrow capacidade de generalização do modelo;
- Os dois conjuntos de dados devem ser gerados em torno do mesmo ponto de operação no caso de modelos lineares;
- A comparação pode ser feita visualmente plotando-se a saída medida $y(k)$ e a saída estimada $\hat{y}(k)$ ou por meio do índice:

NRMSE (Normalized Root Mean Square Error)

$$\text{RMSE} = \left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \right) \times 100\%$$

em que \bar{y} é o valor médio do sinal medido $y(k)$ na janela de identificação.

- Quanto mais próximo de 100% significa que o preditor é significamente melhor do que o preditor trivial (média temporal do sinal).
- Implementação Matlab: `FIT = 100 * (1-norm(Y-YHAT)/norm(Y-mean(Y)))`

Sistemas com múltiplas entradas

Os sinais PRBS para as diversas entradas podem ser gerados a partir de um mesmo conjunto de dados porém defasados de modo a reduzir a correlação entre ambos o que propiciará sinais de saída com mais informações para a identificação.

● Os seguintes comandos do toolbox *System Identification* do Matlab podem ser usados:

- 1 $SYS = ssest(DATA, NX)$: estima um modelo contínuo no espaço de estados (A, B, C, D) de ordem NX a partir dos dados $DATA$ (IDDATA object).
- 2 $SYS = tfest(DATA, NP)$: estima uma função de transferência com NP polos.
- 3 $SYS = procest(DATA, TYPE)$: estima um modelo de processo de estrutura $TYPE$.
- 4 $FO = fit(X, Y, FT)$: ajusta uma curva ou superfície aos dados (X, Y) com modelo especificado por FT .

● Exemplo:

```
1   load dados.mat
2   data = iddata([y1 ; y2]','u',Ts);
3   data.InputName = {'entrada'};
4   data.OutputName = {'saida1','saida2'};
5   [modeloIni,x0] = ssest(data,2,'Ts',Ts);
6   A=modeloIni.A;
7   B=modeloIni.B;
8   B(1)=0; %informando que u não entra na dinâmica ...
          de x1
9   C = [1 0; 0 1]; %informando que y(t)=x(t)
10  D = [0]; %informando que sistema é estri. próprio
11  K = 0*modeloIni.K; %não há entrada exógena
12  x0 = [0 0]'; %c.i. nula
13  init_sys = idss(A,B,C,D,K,x0,Ts);
14  init_sys.Structure.b.Free(1,1) = false;
15  init_sys.Structure.c.Free = false;
16  [modelo,x0] = ssest(data,init_sys,'Ts',Ts);
17  [yout,fit,x0] = compare(data,modelo);
18  modelo.K = modelo.K*0;
```

● Exemplo:

```
1           % Obtain the measured inputoutput data.
2 load iddemo_heatexchanger_data;
3 data = iddata(pt,ct,Ts);
4 data.InputName = '\Delta CTemp';
5 data.InputUnit = 'C';
6 data.OutputName = '\Delta PTemp';
7 data.OutputUnit = 'C';
8 data.TimeUnit = 'minutes';
9
10          % ...
           Estimate a firstorder plus dead time process model
11 type = 'P1D';
12 sysP1D = procest(data,type);
13
14          % Compare the model with the data.
15 compare(data,sysP1D)
```


Outros comandos úteis

Conversão de modelos:

```
Sys = tf(num,den);  
% Conversão modelo discreto para contínuo: d2c(sys)  
% Conversão modelo contínuo para o discreto: c2d(sys,Ts)  
% Ts: período de amostragem
```

Criando um sinal PRBS I:

```
1 % use PRBS to estimate a discrete model  
2 Ts = 0.25;  
3 T = 0:Ts:5; % time vector (row)  
4 T = T'; % time vector (column)  
5 seed = [3;0.5]; % seed for noise generation  
6 randn('state',seed); % using the same seed each time  
7 uu = 0.5+ 0.25*randn(length(T),1); % mean of 0.5 ...  
    with variance of 0.25  
8 U = 2*round(uu)-1; % creates PRBS with -1 and 1 values  
9 stairs(T,uu); hold on; stairs(T,U,'r'); hold off;
```

Criando um sinal PRBS II:

```
1 % use PRBS to estimate a discrete model
2 u = idinput(N,'prbs',[wlow, whigh],[minu, maxu]);
3 % N: no. de amostras
4 % band = [0 B] implica que o sinal PRBS é constante em
5 % intervalos de comprimento 1/B (B em rad/s)
6 % [minu, maxu]: amplitudes min. e max.
7 % Exemplo
8 Ts = 0.25; T = 0:Ts:5; % time vector
9 U = idinput(length(T),'prbs',[0 .2],[-1, 1]);
10 stairs(T,U);
```