

169536 - Tópicos em Controle e Automação:

Controle de Processos

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Seja o sistema não-linear

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)). \quad (1)$$

Deseja-se linearizar (1) em torno do ponto de operação em regime permanente $s = (x(0), y(0), z(0)) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Em estado estacionário

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0. \quad (2)$$

Linearizando em torno de s , ou seja, expandindo (1) em série de Taylor e desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois, tem-se

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) \simeq f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_s (y(t) - \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_s (z(t) - \bar{z}). \quad (3)$$

Definindo as variáveis de desvio

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \bar{x}, \quad \tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \bar{y}, \quad \tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \bar{z} \quad (4)$$

e subtraindo (3) por (2), obtém-se

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = c_x \tilde{x}(t) + c_y \tilde{y}(t) + c_z \tilde{z}(t), \quad (5)$$

em que

$$c_x \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s, \quad c_y \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_s, \quad c_z \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_s \quad \text{e} \quad \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{d(x(t) - \bar{x})}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Portanto aplicando a Transformada de Laplace em (5)

$$s\tilde{X}(s) - c_x \tilde{X}(s) = c_y \tilde{Y}(s) + c_z \tilde{Z}(s), \quad (6)$$

pode-se obter as funções de transferência relacionando a variável $x(t)$ com $y(t)$ e $z(t)$,

$$\tilde{X}(s) = \frac{c_y/c_x}{\frac{1}{c_x}s - 1} \tilde{Y}(s) + \frac{c_z/c_x}{\frac{1}{c_x}s - 1} \tilde{Z}(s). \quad (7)$$

1 Observação

A partir de (1), pode-se escrever

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (8)$$

e portanto

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \quad (9)$$

Definindo

$$\tilde{f}(x(t), y(t), z(t)) \triangleq f(x(t), y(t), z(t)) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (10)$$

e $s = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, de Taylor tem-se

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{f}(x(t), y(t), z(t)) \simeq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_s \tilde{y}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_s \tilde{z}(t). \quad (11)$$

2 Observação

É possível fazer a subtração da equação em regime transiente pela de regime permanente antes de linearização. Defina $g(x, y, z)$ como o sistema após a subtração

$$g(x, y, z) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), z(t)) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (12)$$

e aplicando a expansão em série de Taylor em $g(x(t), y(t), z(t))$, tem-se

$$\begin{aligned} g(x(t), y(t), z(t)) &\simeq g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_s (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_s (y(t) - \bar{y}) + \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_s (z(t) - \bar{z}) \\ &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_s \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_s \tilde{y}(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_s \tilde{z}(t) \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_s \tilde{y}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_s \tilde{z}(t), \end{aligned}$$

e portanto (5) é obtido.

3 Observação

Um ponto importante é que linearizar um produto de funções que esta sendo derivado poderá fornecer resultados diferentes em relação à aplicação da regra da cadeia.

Como exemplo, seja $g(h(t), T(t)) = h(t)T(t)$. Linearizando g em torno de \bar{h} e \bar{T} tem-se

$$g(h(t), T(t)) \triangleq \bar{h} \bar{T} + \bar{T} \tilde{h}(t) + \bar{h} \tilde{T}(t)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}g(h(t), T(t)) = \bar{T} \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + \bar{h} \frac{d\tilde{T}(t)}{dt} \quad (13)$$

difere do resultado aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}h(t)T(t) = T(t) \frac{dh(t)}{dt} + h(t) \frac{dT(t)}{dt} = T(t) \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + h(t) \frac{d\tilde{T}(t)}{dt}. \quad (14)$$

4 Observação

Como regra geral para o procedimento de linearização

1. se houver a derivada do produto de funções aplique a regra da cadeia e verifique se é possível substituir um dos termos por outra equação proveniente de um balanço de massa ou energia;
2. manipule a equação diferencial de forma a deixá-la como em (1), isolando no lado esquerdo somente a derivada;
3. aplique a expansão em série de Taylor, derivando as variáveis dependentes do tempo e desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2;
4. subtraía da equação em regime permanente, resultado em (5);
5. aplique a transformada de Laplace e obtenha as funções de transferência do sistema.