327069 – Controle de Sistemas Dinâmicos via LMIs

Regulador Linear Quadrático – LQR
Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação (PGEA)
Universidade de Brasília

1^o Semestre 2018

Controle Ótimo

- **Objetivo do controle ótimo**: Encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimize um custo funcional $J(x(t), u(t))$, ou seja, encontrar $u^*(t)$ ótimo solução do problema

$$\min_{u(t)} J(x(t), u(t))$$
$$\text{s.a} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

cujo custo tem a forma

$$J = \int_0^\infty f(x(t), u(t))dt \quad \left(\sum_{k=0}^{N} f(x(k), u(k)), \quad \text{caso discreto} \right)$$

Regulador Linear Quadrático (LQR)

- Minimização de um critério quadrático associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle

$$x(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i(t)^2 dt = \int_0^\infty x(t)' x(t) dt \quad \text{(energia do sinal)}$$

- Compromisso entre as energias de estado e controle

$$J = \min_u \int_0^\infty \left(x' Q x + u' R u \right) dt \tag{1}$$

em que $Q > 0$ e $R > 0$ $\rightsquigarrow$ matrizes de ponderação (tipicamente diagonais)

Solução por Riccati

A minimização do critério (1) com $J = x(0)' P x(0)$ é obtida com $u = -Kx$, $K = R^{-1} B' P$ e $P > 0$ solução de

$$A' P + PA - PBR^{-1} B' P + Q = 0 \tag{2}$$

Regulador Linear Quadrático (LQR)

Demostração: Defina $v(x) = x'Px$, $P > 0$. Para o sistema estável, $v(\infty) = 0$, então

$$J = \min_u \int_0^\infty \left(x'(A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q)x + \xi'\xi \right) dt + v(x(0))$$

em que $\xi = R^{1/2}u + R^{-1/2}B'P$.

Tem-se que $J = v(x(0)) = x(0)'Px(0)$ devido a (2) ser satisfeita e que $u = -R^{-1}B'Px$ implica $\xi = 0$.

Observa-se também que (2) é equivalente à

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + K'RK + Q = 0$$

garantido a que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável.

Reescrevendo o problema LQR (1)

- O problema de encontrar $\hat{u}^*(t)$ solução de

$$\min_{u(t)} J(x, \hat{u}) \;\; \text{s.a} \;\; \dot{x} = Ax + B\hat{u}, \;\; x(0) = x_0$$

cujo custo tem a forma

$$J(x, \hat{u}) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x \\ \hat{u} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{u} \end{bmatrix} dt, \qquad \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$$

- É equivalente à

$$\min_{u(t)} J(x, \hat{u}) = \int_0^{\infty} z'z \; dt = ||z||_2^2 \;\; \text{s.a} \;\; \begin{cases} \dot{x} & = Ax + B_u u \quad x(0) = x_0 \\ z & = C_z x + D_u u \end{cases}$$

em que

$$u \triangleq R^{1/2}\hat{u}, \quad B_u \triangleq BR^{1/2}, \quad C_z \triangleq \begin{bmatrix} C_{zz} \\ R^{-1/2}S' \end{bmatrix}, \quad D_u \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$C_{zz}'C_{zz} = \hat{Q}, \qquad \hat{Q} = Q - SR^{-1}S' \geq 0$$

- Dessa forma, $z'z = x'Qx + x'S\hat{u} + \hat{u}'S'x + \hat{u}'R\hat{u}$

Reescrevendo o problema LQR (2)

- O problema de encontrar uma lei de controle $u = Kx$ solução de

$$\min_{u(t)} J(x, \hat{u}) \ \text{ s.a } \ \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

cujo custo tem a forma

$$J(x, \hat{u}) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt, \qquad \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$$

- É equivalente à

$$\min_{u(t)} J(x, u) = \int_0^\infty z'z \ dt = ||z||_2^2 \ \text{ s.a } \ \begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ z & = Cx + Du \\ u & = Kx \end{cases}$$

em que

$$\begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \Rightarrow z'z = x' \underbrace{C'C}_{Q} x + x' \underbrace{C'D}_{S} u + u' \underbrace{D'C}_{S'} x + u' \underbrace{D'D}_{R} u$$

- Para $S = 0$: $C = \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{1/2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad z'z = x'Qx + u'Ru$

Reescrevendo o problema LQR

Solução LMI ao problema LQR

- As matrizes do sistema (A, B, C, D) podem ser consideradas incertas
- Impondo $\dot{V}(x) + z'z < 0$, $V(x) = x'Px$, e integrando de 0 a $T > 0$,

$$V(x(T)) - V(x(0)) + \int_0^T z'z \; dt < 0$$

- Supondo o sistema estável em malha fechada, quando $T \to \infty$ tem-se

$$\lim_{T\to\infty} x(T) = 0 \text{ e } \lim_{T\to\infty} V(x(T)) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty z'z \; dt < V(x(0)) = x_0'Px_0$$

- Sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x} & = (A + BK)x = A_{cl}x, \qquad x(0) = x_0 \\ z & = (C + DK)x = C_{cl}x \end{cases}$$

então

$$\dot{V}(x) + z'z = x'(A_{cl}'P + PA_{cl} + C_{cl}'C_{cl})x < 0$$

- Para garantir a minimização de $J = ||z||_2^2 = x_0'Px_0$,

$$\min \lambda \quad \text{s.a} \quad \lambda > x_0'Px_0$$

Reescrevendo o problema LQR

Teorema 1

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ z & = Cx + Du \end{cases}$$

Se existirem matrizes $W = W' > 0$ *e* Z *tais que*

$$\begin{aligned} & \min \quad \lambda \quad s.a \\ & \begin{bmatrix} \lambda & x_0' \\ x_0 & W \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B + BZ & \star \\ CW + DZ & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

sejam satisfeitas, então o sistema com o ganho de realimentação de estados $K = ZW^{-1}$ *é assintoticamente estável e a função custo* $J = \min_u \int_0^\infty z'z \, dt$ *satisfaz* $J < x_0' W^{-1} x_0$.

- Considerando qualquer x_0 num dado conjunto politópico $\mathcal{X}_0$ com vértices conhecidos $\rightsquigarrow$ resolver (3) para todo x_0 nos vértices de $\mathcal{X}_0$

Reescrevendo o problema LQR

- Outra tratativa para as condições iniciais: $x_0 \in \mathcal{X}_0 = \{x : \mathbb{R}^n : x' P_0 x \leq 1\}$

- Problema de minimização

$$\min J = \int_0^{\infty} z'z \, dt \quad \Rightarrow \quad \min \gamma \quad \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_0 - P \geq 0, & P > 0 \\ A_{cl}'P + PA_{cl} + \gamma^{-1} C_{cl}' C_{cl} < 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

- As desigualdades acima, se satisfeitas, garantem

$$\dot{V} - \gamma^{-1} z'z < 0$$

- Integrando de 0 a ∞, tem-se

$$||z||_2^2 < x_0 P x_0 \gamma \leq \gamma, \qquad \forall \; P \leq P_0$$

- As desigualdades (4) podem ser transformadas em LMIs por meio de complemento de Schur e transf. de congruência com $T = diag\{W, I\}$, $W = P^{-1}$

$$\min \gamma : \begin{bmatrix} P_0 & I \\ I & W \end{bmatrix} > 0, \; \begin{bmatrix} He\{AW + BZ\} & \star \\ CW + DZ & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \; K = ZW^{-1}$$

Reescrevendo o problema LQR

Problema LQR como $\mathcal{H}_2$

- Sistema em malha fechada pode ser reescrito de forma a ter condição inicial nula

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = (A+BK)x = A_{cl}x \\ z & = (C+DK)x = C_{cl}x \\ x(0) & = x_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = A_{cl}x + B_w w \\ z & = C_{cl}x \\ x(0) & = 0 \end{array}\right.$$

em que $B_w = x_0$ e $w = \delta(t)$.

- Seja a matriz de transferência H_{wz}, $z = H_{wz}w$, como $w = \delta(t)$ então

$$\min_K ||z||_2^2 = \min_K ||h||_2^2 = \mathbf{Tr}(B_w' P B_w)$$

em que P é solução de

$$A_{cl}'P + PA_{cl} + C_{cl}'C_{cl} \leq 0$$

- O problema é resolvido por meio de condições convexas aplicando as manipulações algébricas vistas no controle de realimentação de estado com custo $\mathcal{H}_2$

LQR para sistemas sujeitos a ruído branco

Norma $\mathcal{H}_2$ e variância de processos estocásticos

- Projeto de uma lei de controle $u = Kx$ que estabiliza o sistema com ruído branco Gaussiano, $\mathcal{E}\{w\} = 0$, $\mathcal{E}\{ww'\} = W\delta$, $W > 0$,

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w, \quad x(0) = 0 \\ z &= C_z x + D_u u, \end{cases}$$

e minimiza

$$J \triangleq \lim_{t\to\infty} \mathcal{E}\{z'z\}$$

- **Solução**:

Problema $\mathcal{H}_2$

$$\min \mathbf{Tr}(PB_w W B_w') \qquad \text{s.a}$$
$$(A + B_u K)'P + P(A + B_u K) + (C_z + D_u K)'(C_z + D_u K) < 0$$

então $J = \mathbf{Tr}(PB_w W B_w')$

Condições:

(i) (A, B_u) estabilizável

(ii) $D_u' D_u > 0$ (D_u posto coluna completo)

- C_z e D_u são matrizes de ponderação $\rightsquigarrow$ LQR

Problema LQR - formas alternativas (1)

- Seja o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ z &= Cx + Du \end{cases}$$

- Seja a lei de controle $u = Kx \rightsquigarrow$ função custo

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\, dt = \int_0^\infty \left(x'(Q + K'RK)x\right) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{Tr}\left((Q + K'RK)xx'\right) dt = \mathbf{Tr}\left((Q + K'RK)P\right), \qquad P \triangleq \int_0^\infty xx'\; dt \end{aligned}$$

P é uma matriz simétrica definida positiva satisfazendo

$$(A + BK)P + P(A + BK)' + x_0x_0' = 0 \tag{5}$$

- O problema é solucionado por meio da formulação LMI ($\exists \mu > 0 : I < \mu x_0 x_0'$ e da homogeneidade de (5), $\mu P \mapsto P$, $\mu > 0$)

$$\min_{P,Z,X} \quad \mathbf{Tr}(QP) + \mathbf{Tr}(X) \qquad \text{s.a} \qquad \begin{array}{l} AP + PA' + BZ + Z'B' + I < 0 \\ \begin{bmatrix} X & R^{1/2}Z \\ Z'R^{1/2} & P \end{bmatrix} > 0, \quad P > 0 \end{array}$$

em que $K = ZP^{-1}$

Problema LQR - formas alternativas (2)

- Seja a lei de controle $u = Kx$, o sistema linear e o custo dados abaixo

$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ z & = Cx + Du \end{cases} \qquad J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)\, dt$$

- Considerando o sistema em malha fechada estável ($V(x) = x'Px \mapsto 0$ quando $t \mapsto \infty$), tem-se

$$\dot{V}(x) + x'Qx + u'Ru < 0 \overbrace{\Rightarrow}^{\int_0^{\infty}(\cdot)dt} J < x_0'Px_0 < \lambda_{\max}(P)||x_0||_2^2 < \mathbf{Tr}(P)||x_0||_2^2 \quad (6)$$

- O lado esquerdo de (6) é garantido se a desigualdade abaixo é satisfeita

$$W(A+BK)' + (A+BK)W + WQW + WK'RKW < 0, \;\; W \triangleq P^{-1} > 0 \quad (7)$$

- (7) pode ser transformada em LMI através da aplicação do complemento de Schur e da transformação $Z = KW$ (opcionalm. $R = R^{1/2}R^{1/2}$, $Q = Q^{1/2}Q^{1/2}$)
- A minimização de J é feita através da minimização de seu limitante superior em (6)

$$\min \lambda_{\max}(P) \Rightarrow \max \mu \text{ s.a } W \geq \mu I \;\text{ e }\; (7)$$

ou

$$\min \mathbf{Tr}(P) \Rightarrow \min \mathbf{Tr}(X^{-1}), P \leq X^{-1} \Rightarrow \min -\text{logdet}(X) \text{ s.a } W \geq X \;\text{ e }\; (7)$$

Obs.: $\mathbf{Tr}(P) \leq \mathbf{Tr}(X^{-1}) \Leftrightarrow \text{logdet}(P) \leq \text{logdet}(X^{-1}) = -\text{logdet}(X) = -\sum \log(\lambda_i(X))$

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Controle LQG

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + w, \qquad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + v \end{cases}$$

- w e v são ruídos brancos (variáveis estocásticas) de média nula e covariâncias $Q_w \geq 0$ e $R_v > 0$
- **Problema:** Encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimiza a função custo

$$J = \lim_{T\to\infty} \mathcal{E}\left\{ \int_0^T \left(x'Qx + u'Ru \right) dt \right\}, \qquad Q \geq 0, \quad R > 0$$

$\rightsquigarrow$ Combinação do controlador LQR, que minimiza um critério quadrático, e do filtro de Kalman, que minimiza a variância do erro de estimação

$\rightsquigarrow$ Projeto da lei de controle ótima $u = Kx_f$ e do ganho do filtro de Kalman L independentes (Princípio da Separação)

$\rightsquigarrow$ Matrizes Q, R, Q_v e R_v $\rightsquigarrow$ parâmetros de projeto

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Projeto do Observador

- w e v são ruídos brancos (variáveis estocásticas) satisfazendo

$$\mathcal{E}\{w(t)\} = 0,\ \mathcal{E}\{v(t)\} = 0, \quad \text{(média nula)}$$
$$\mathcal{E}\{v(t)v(\tau)'\} = 0, \mathcal{E}\{w(t)w(\tau)'\} = 0, t \neq \tau \ \text{(não correlacionados no tempo)}$$
$$\mathcal{E}\{v(t)w(t)'\} = 0 \ \ \text{(não correlacionados entre si)}$$
$$\mathcal{E}\{w(t)w(t)'\} = Q_w \geq 0, \ \ \mathcal{E}\{v(t)v(t)'\} = R_v > 0 \ \ \text{(matrizes de covariância)}$$

- Filtro de Kalman

$$\dot{x}_f = (A - LC)x_f + Bu + Ly$$

com ganho L que minimiza a variância do erro de estimação $\mathcal{E}\{e'e\}$, $e = x - x_f$, dado por

$$L = SC'R_v^{-1}, \qquad SA' + AS - SC'R_v^{-1}CS + Q_w = 0 \tag{8}$$

- $S > 0$ solução de (8)

- Hipótese: (A, C) observável e (A, B_w) controlável, em que $Q_w = B_w' B_w$

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Projeto do Controlador

- Problema LQR: encontrar lei de controle $u = -Kx$ que minimize

$$\int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\, dt$$

para as trajetórias de $\dot{x} = Ax + Bu$. O ganho ótimo é dado por

$$K = R^{-1}B'P, \qquad A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \tag{9}$$

- $P > 0$ solução de (9)
- Hipótese: (A, B) controlável e (A, C_o) observável, em que $Q = C_o'C_o$

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Solução do problema LQG

- Lei de controle $u = -Kx_f$ que resulta no sistema em malha fechada

$$\dot{x} = Ax + Bu + w, \qquad y = Cx + v$$
$$\dot{x}_f = (A - LC)x_f + Bu + Ly, \qquad u = -Kx_f$$

que resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ w - Lv \end{bmatrix} \tag{10}$$

- De (10) verifica-se o Princípio da Separação

- Se (8) e (9) não se verificam mas os modos não controláveis e não observáveis são estáveis $\rightsquigarrow$ sistema em malha fechada ainda é estável e $P \geq 0$ e/ou $S \geq 0$

- O controle LQR apresenta propriedades de robustez (ex.: para $R = rI$ tem ao menos 60^o de margem de fase e margem de ganho infinita em cada canal). O Filtro de Kalman e o LQG não apresentam garantias de robustez.

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Problema LQG: sistema em malha fechada

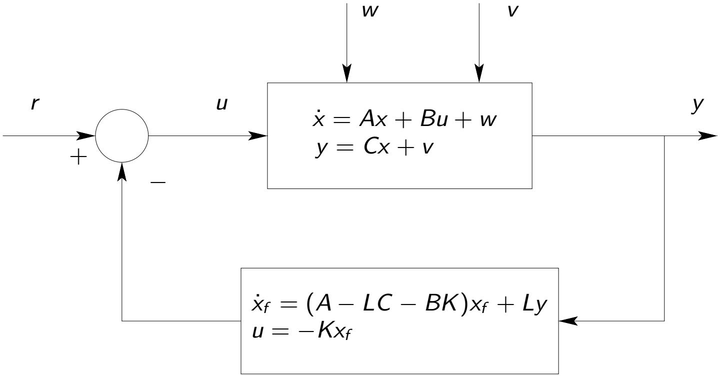

Figura: Representação do sistema em malha fechada do controle LQG.

Reescrevendo o problema LQG (1)

Solução com LMIs via Princípio da Separação

- O problema LQG pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + B_w\hat{w}, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + D_w\hat{w} \\ z &= C_zx + D_zu \end{cases}$$

$$\left\{ \dot{x}_f = Ax_f + Bu + L(y - Cx_f) \right.$$

Função objetivo: $J = \lim_{t\to\infty} \mathcal{E}\{z'z\}$

em que

$\rightsquigarrow$ $C_z'C_z = Q, \quad D_z'D_z = R \quad \text{e} \quad C_z'D_z = 0$

$\rightsquigarrow$ $\hat{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, \; B_w = \begin{bmatrix} Q_w^{1/2} & 0 \end{bmatrix}$ e $D_w = \begin{bmatrix} 0 & R_v^{1/2} \end{bmatrix}$ $(B_wD_w' = 0) \rightsquigarrow \mathcal{E}\{\hat{w}\hat{w}'\} = I$

- Dinâmica em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ B_w - LD_w \end{bmatrix} \hat{w}$$

$$z = \begin{bmatrix} C_z + D_zK & -D_zK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Obs.: Se considerado $u = Kx$, tem-se $z = (C_z + D_zK)x$

Reescrevendo o problema LQG (1)

Solução com LMIs via Princípio da Separação

Procedimento de Projeto:

1. Projeto do ganho de realimentação de estados que minimiza (LQR)

$$\int_0^{\infty} \left(x'Qx + u'Ru\right) dt,$$

   ou seja, minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do sistema em malha fechada considerando a lei de realimentação de estados $u = Kx$, $||H_{\hat{w}z}||_2^2$, dada por

$$H_{\hat{w}z} = \left[\begin{array}{c:c} A + BK & B_w \\ \hdashline C_z + D_z K & 0 \end{array}\right]$$

2. Projeto do ganho do filtro de Kalman que minimiza $\mathcal{E}\{e'e\} = ||H_{\hat{w}e}||_2^2$, dada por

$$H_{\hat{w}e} = \left[\begin{array}{c:c} A - LC & B_w - LD_w \\ \hdashline I & 0 \end{array}\right]$$

Reescrvendo o problema LQG (2)

Solução com LMIs via controlador dinâmico de saída

- O problema LQG pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + B_w w, \quad x(0) = 0 \\ y &= Cx + D_w w \\ z &= C_z x + D_z u \end{cases} \qquad J = \lim_{t \to \infty} \mathcal{E}\{z'z\}$$

em que w é um ruído branco Gaussiano de média zero e covariância $W > 0$

- A solução do problema é dada pelo controlador dinâmico de saída

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \quad x_c(0) = 0 \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{cases}$$

- Resolver $J = \lim_{t \to \infty} \mathcal{E}\{z'z\}$ em termos do Gramiano de controlabilidade

$$J \leq \mathbf{Tr}(\tilde{C} Y \tilde{C}')$$

$$Y > 0 : \qquad \tilde{A} Y + Y \tilde{A}' + \tilde{B}_w W \tilde{B}_w' < 0$$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ e $\tilde{D}$ ($\tilde{D} = 0$) $\rightsquigarrow$ matrizes do sistema aumentado em malha fechada
$\rightsquigarrow$ Projeto via técnicas de realimentação dinâmica de saída com custo $\mathcal{H}_2$
$\rightsquigarrow$ Permite tratar o caso em que as matrizes do sistema são incertas