

Controle de Sistemas Não-Lineares: Projeto via Linearização

Eduardo Stockler Tognetti

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília - UnB

2021

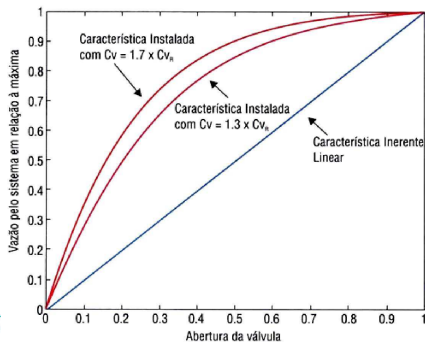
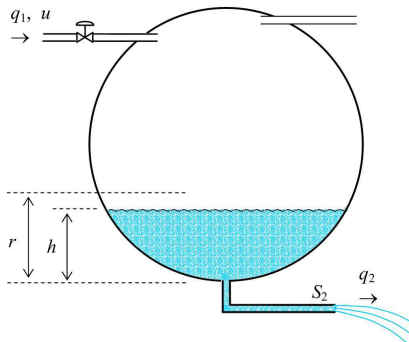
Motivação

- Sistemas não-lineares são comuns em processos químicos e industriais

Controle de nível de um tanque esférico Válvula de controle

$$S(h)\dot{h}(t) = u(t) - S_2\sqrt{2gh(t)} \quad (1)$$

$$Q(a) = Q_{max} \sqrt{\frac{C^2 + 1}{C^2 + f(a)^{-2}}} \quad (2)$$



Linearização

Seja o sistema não-linear $\dot{x} = f(x)$, $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e $f(0) = 0$, $0 \in D$ (origem é um ponto de equilíbrio). Pelo teorema do valor médio,

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x, \quad z_i \in [0, x], \quad [0, x] \in D \quad (3)$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x \quad (4)$$

$$f(z) = Ax + g(x), \quad \text{com } A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ e } g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x \quad (5)$$

A função $g_i(x)$ satisfaz

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\| \quad (6)$$

Pela continuidade de $[\partial f / \partial x]$,

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|x\| \rightarrow 0 \quad (7)$$

\therefore Na vizinhança da origem $\dot{x} = f(x)$ pode ser aproximado por $\dot{x} = Ax$.

Método Indireto de Lyapunov

Teorema 1

Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema não linear $\dot{x} = f(x)$, com $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e D uma vizinhança da origem. Seja

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \quad (8)$$

Então,

- 1 A origem é assintoticamente estável se $\Re \{\lambda_i\} < 0$ para todos os autovalores de A .
- 2 A origem é instável se $\Re \{\lambda_i\} > 0$ para um ou mais autovalores de A .

● Se $\Re \{\lambda_i\} = 0, i = 1, \dots, n \implies$ estabilidade de $x = 0$???

O problema de estabilização

Para o problema de estabilização por realimentação de estados, considere o sistema não-linear

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{9}$$

onde $f(0,0) = 0$ e $f(x, u)$ é continuamente diferenciável no domínio $D_x \times D_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ que contém a origem ($x = 0, u = 0$).

Objetivo

Projetar uma lei de controle de realimentação de estados $u = Kx$ que estabilize localmente o sistema (9).

Linearização de (9) em torno da origem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0} \tag{10}$$

Assuma que o par (A, B) é controlável (estabilizável). Aplicando a lei de controle $u = Kx$ em (9), tem-se $\dot{x} = f(x, Kx)$ e em torno da origem

$$\dot{x} = (A + BK)x \tag{11}$$

O problema de estabilização

Escolhendo K tal que $A + BK$ seja Hurwitz, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada de

$$\dot{x} = f(x, Kx). \quad (12)$$

Então, pode-se sempre encontrar $P = P^T > 0$ tal que

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P < 0 \quad (13)$$

A função quadrática $V(x) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada (12) na vizinhança da origem.

- Pode-se usar $V(x)$ para estimar a região de atração da origem.

Estimativa da região de atração

Região de atração

$$R_A = \{x \in D \mid \phi(t, x) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0\} \quad (14)$$

- Achar R_A pode ser difícil \rightsquigarrow estimativa de R_A
- Seja $V(x)$ tal que $V(x) > 0$ em D_V e $\dot{V}(x) < 0$ em $D_V - \{0\}$ \rightsquigarrow D_V não é uma estimativa de R_A
 - Seja $V(x_1) = c_1$, $x_1 \in \partial D_V \Rightarrow V(x_2) = c_2$, $c_2 < c_1$, mas $x_2 \in D_V$???

Estimativa de R_A

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\} \subset D_V \quad (15)$$

- $\Omega_c \rightsquigarrow$ curvas de nível de $V(x)$
- $\Omega_c \rightsquigarrow$ conjunto positivamente invariante

Estimativa da região de atração

Seja $V(x)$ uma função de Lyapunov do sistema linearizado

$$\dot{V}(x) = \nabla_x V(x) \cdot f(x) = \nabla_x V(x) \cdot Ax + \nabla_x V(x) \cdot g(x), \quad \nabla_x V(x) \cdot Ax < 0 \quad (16)$$

e como

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|x\|_2 \rightarrow 0 \quad (17)$$

Existe uma bola $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ tal que $\dot{V}(x) < 0$ em D_V

$$c < \min_{\|x\|_2=r} V(x) = \lambda_{\min}(P)r^2 \implies \Omega_c \in D_V \quad (18)$$

pois

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 \quad (19)$$

- Estimativa $\Omega_c = \{V(x) \leq c\} \rightsquigarrow$ simples mas conservadora
- Melhores estimativas \rightsquigarrow Teorema de LaSalle ($\Omega \in D_V$, Ω invariante)

Exemplo de projeto

- Considere a equação do pêndulo $\ddot{\theta} = -a \sin\theta - b\dot{\theta} + cT$, T : torque aplicado.

Objetivo

Estabilizar o pêndulo em $\theta = \delta$.

- Escolhendo as variáveis $x_1 = \theta - \delta$ e $x_2 = \dot{\theta}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cT \end{aligned} \tag{20}$$

- Em regime permanente, $T_{ss} = a/c \sin\delta$, então $u = T - T_{ss}$,

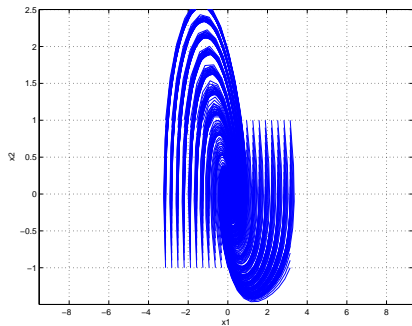
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, u) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, u) = -a(\sin(x_1 + \delta) - \sin\delta) - bx_2 + cu \end{aligned} \implies f(0,0) = 0 \tag{21}$$

- Linearizando,

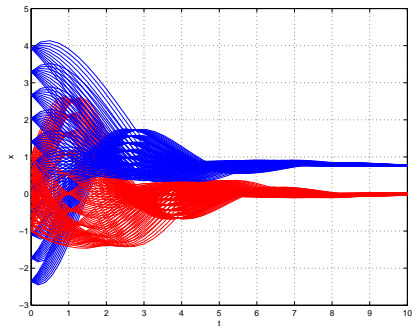
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos\delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \tag{22}$$

- Para $\delta = \pi/4$, projetado $u = Kx$, $K = [-1 \quad -1]$ tal que $(A + BK)$ é Hurwitz
- Torque aplicado $T = a/c \sin\delta + Kx = a/c \sin\delta + k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta}$

Exemplo de projeto – Simulação



Retrato de fase para $x_1(0) \in (-\pi, \pi)$ e $x_2(0) \in (-1, 1)$.



Trajétórias de $x(t)$ para $x_1(0) \in (-\pi, \pi)$ e $x_2(0) \in (-1, 1)$.

Exemplo de projeto 2

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{x_2} u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 + e^{x_2} u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{23}$$

Objetivo

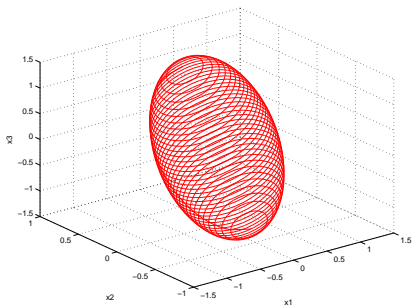
Estabilizar o sistema em torno da origem e encontrar uma estimativa para região de atração.

- A partir do sistema linearizado

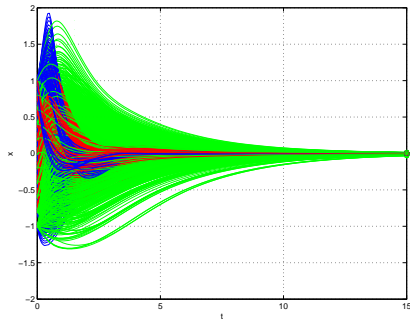
$$AW + WA^T + BZ + Z^T B^T < 0 \implies P = W^{-1} \text{ e } K = ZW^{-1} \tag{24}$$

- $\dot{V}(x) < 0$ em $\{\|x\|_2 < r = 1.4\} \implies c < \lambda_{\min}(P)r^2 = 1.3$

Exemplo de projeto 2 – Simulação



Estimativa da região de atração para o sistema não-linear.



Trajétórias de $x(t)$ para $\|x(0)\|_2 < 1.4$.

Exemplo 3 – Simulação

Exemplo

- Seja a dinâmica não linear dada por

$$\dot{x} = F(x, u), \quad F(x, u) = \begin{bmatrix} x_1(1 - x_2^2) - x_2 + u_1 \\ x_2^2 + u_2 \end{bmatrix}$$

com pontos de equilíbrio $x_{e1} = (1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (estável) e $x_{e2} = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ (instável) considerando $u_e = (1, -2)$, ou seja, $F(x_{ei}, u_e) = 0$, $i = 1, 2$.

↪ Deseja obter a dinâmica linearizada em torno do ponto de equilíbrio estável x_{e1} e verificar uma estimativa para a região de atração para esse ponto.

- O código Matlab é apresentado na sequência.

Exemplo 3

```

1  % \dot{x} = F(x,u)
2  F = @(x,u) [x(1)*(1-x(2)^2)-x(2) + u(1);
3  x(2)^2 + u(2)];
4
5  % Equilibrium point
6  ue = [1 -2];
7  %[xe2,fval,exitflag,output,jacobian] = fsolve(@(x)F(x,ue),[0 0]);
8  xe{1} = [1+sqrt(2) -sqrt(2)]; % stable eq. point
9  xe{2} = [1-sqrt(2) sqrt(2)]; % unstable eq. point
10 % Checking F(xe,ue)=0
11 disp(F(xe{1},ue));
12 disp(F(xe{2},ue));
13
14 % Jacobian matrix
15 x=sym('x',[2 1]);
16 u=sym('u',[2 1]);
17 dx=F(x,u);
18 Aj = jacobian(dx,x);
19 Bj = jacobian(dx,u);
20
21 % dx = A*x + B*u
22 A = eval(subs(Aj,{x(1),x(2),u(1),u(2)},{xe{1} ue}));
23 B = eval(subs(Bj,{x(1),x(2),u(1),u(2)},{xe{1} ue}));
24 sys_ss = ss(A,B,eye(2),zeros(2));
25 G = tf(sys_ss);
26 eig(A) % checking stability of the open-loop system

```

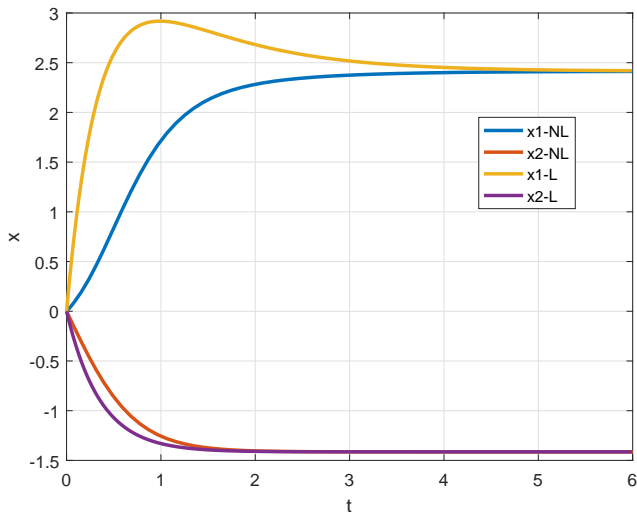
Exemplo 3 – Simulação

```

1  % Time-simulation of NL sys. for u=ue and given x(0)
2  Fx=@(t,x)F(x,ue);
3  x0 = [0 0];
4  [t,xt] = ode45(Fx,[0 10],x0);
5  figure; plot(t,xt);
6
7  % Initial response for linearized system
8  [Y,T,X] = initial(sys_ss,x0-xe{1});
9  hold on
10 plot(T,X+xe{1});
11 hold off; grid
12 legend('x1-NL','x2-NL','x1-L','x2-L')
13
14 % phase retrait nonlinear e.d.o
15 xx1=-6:.1:6;
16 xx2=-6:.01:6;
17 [X1,X2]=meshgrid(xx1,xx2);
18 % dX = F(X)
19 F1 = X1.*(1-X2.^2)-X2 + ue(1);
20 F2 = X2.^2 + ue(2);
21 figure;clf; hold on
22 streamslice(X1,X2,F1,F2,2);
23 xlabel('x_1');ylabel('x_2');
24 plot(xe{1}(1),xe{1}(2),'r*');plot(xe{2}(1),xe{2}(2),'b*'); hold off

```

Exemplo 3 – Simulação



Trajetórias de $x(t)$ para $x(0) = (0,0)$ da dinâmica não linear (NL) e do sistema linearizado (L) em torno de (x_{e1}, u_e) (ponto de equilíbrio estável).

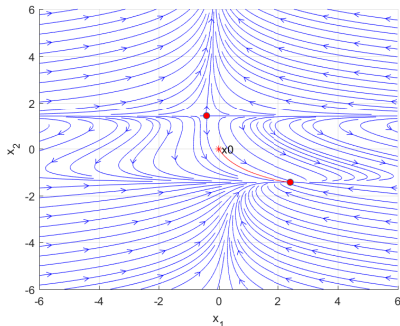
Exemplo 3 – Simulação

```

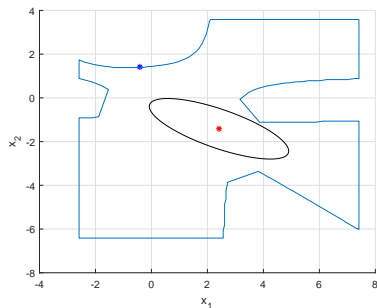
1  % LMIs
2  P = sdpvar(order,order,'symmetric'); %variable
3  LMIs = [];
4  LMIs = [LMIs, P>=0];
5  LMIs = [LMIs, A'*P+P*A<=0];
6  opts = sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi');
7  sol = optimize(LMIs,[],opts);
8  [p,~]=check(LMIs);
9  feas = 0;
10 %capturing the solutions (if ones exist)
11 if sum(p < 0 ) == 0 % all primals positive
12     feas = 1;
13     P = value(P);
14 end
15
16 % Var. transf. xtil = x - xe -> F2(0)=0
17 F2=F([x(1)+xe{1}(1) x(2)+xe{1}(2)],ue);
18 %eval(subs(F2,'x1','x2'),{0,0}); (0,0) is new eq. point
19
20 Vx = @(x)x'*P*x; % V(xtil)
21 dotV = 2*x'*P*F2; %\dot{V}(xtil)
22 dotVx = subs(dotV,'u1','u2',{ue(1),ue(2)});
23 xa = []; xa2 = [];
24 for x1i=-5:0.1:5
25     for x2i=-5:0.1:5
26         dotVxx = eval(subs(dotVx,'x1','x2',{x1i,x2i}));
27         if dotVxx < 0
28             xa2=[xa2; x1i+xe{1}(1) x2i+xe{1}(2)];
29         end
30     end
31 end

```

Exemplo 3 – Simulação



Retrato de fase do sistema não-linear, pontos de equilíbrio x_{e1} (estável) e x_{e2} (estável), e trajetória para $x(0) = (0,0)$.



Região $D_V = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n} : \dot{V}(x) < 0\}$ (azul) e estimativa da região de atração (região invariante) do ponto de equilíbrio estável x_{e1} dada pela maior curva de nível $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n} : V(x) = x^T P x < c\}$ contida em D_V (preto) sendo c um escalar apropriadamente escolhido.

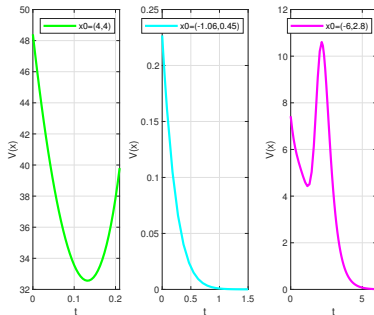
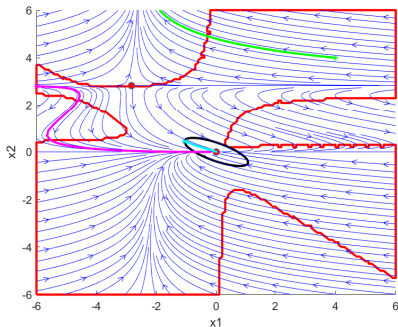
Exemplo 3 – Mudança de coordenadas para x_{e1}

- Observe a dinâmica pode ser reescrita em um novo sistema de coordenadas $\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}(t) + x_{e1}, \tilde{u}(t) + u_e) =: \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{u})$, com $\tilde{x}(t) = x(t) - x_{e1}$ e $\tilde{u}(t) = u(t) - u_e$, tal que $\tilde{F}(0,0) = 0$.

```
1 % New coordinate system F2(0,0) = 0
2 Ftil=@(x,u)F([x(1)+xe{1}(1) x(2)+xe{1}(2)], [u(1)+ue(1) u(2)+ue(2)]);
3
4 disp(Ftil([0 0],[0 0])); % = (0,0)
5
6 % New eq. points
7 xe2{1} = xe{1} - xe{1}; % (0,0) stable eq. point
8 xe2{2} = xe{2} - xe{1}; % (xe2 - xe1) unstable eq. point
```

Exemplo3 – Simulação

● Observe nas figuras abaixo que a região $D_V = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \dot{V}(\tilde{x}) = 2\tilde{x}^T P F(\tilde{x}) < 0\}$ não é invariante e que as regiões D_V e $\Omega_c = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n \times n} : V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} < c\}$ são conservadoras. Contudo, trajetórias iniciando dentro de Ω_c (ciano) tem convergência garantida e $V(\tilde{x})$ monotonicamente decrescente.



Retrato de fase do sistema não-linear no novo sistema de coordenadas

$\tilde{x} = x - x_{e1}$, região D_V (vermelho), região Ω_c (preto), pontos de equilíbrio e trajetória para as condições iniciais $\tilde{x}(0) = (4, 4)$ (verde), $\tilde{x}(0) = (-2.45, 1)$ (ciano) e $\tilde{x}(0) = (-6, 2.8)$ (magenta).

Trajетórias de $V(\tilde{x})$ para as condições iniciais $\tilde{x}(0) = (4, 4)$ (à esquerda), $\tilde{x}(0) = (-2.45, 1)$ (centro) e $\tilde{x}(0) = (-6, 2.8)$ (à direita).

Exemplo 3 – Estabilização do ponto de equilíbrio x_{e_2}

- Deseja-se estabilizar o ponto de equilíbrio instável x_{e_2} por meio de projeto do sistema linearizado.

- Reescrevendo a dinâmica em um novo sistema de coordenadas

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}(t) + x_{e_2}, \tilde{u}(t) + u_e) =: \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{u})$$

tal que $\tilde{F}(0,0) = 0$.

- Sistema linearizado em torno de (x_{e_2}, u_e)

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad \tilde{x}(t) = x(t) - x_{e_2}, \quad \tilde{u}(t) = u(t) - u_e$$

↪ Sistema em malha aberta instável $\mathbb{R}\{\lambda(A)\} < 0$

- Projeto da lei de controle $\tilde{u} = K\tilde{x}$

$$AW + WA^T + BZ + Z^T B^T < 0 \implies P = W^{-1} > 0 \text{ e } K = ZW^{-1}$$

tal que $\dot{\tilde{x}} = (A + BK)\tilde{x}$ estável.

Exemplo 3 – Estabilização do ponto de equilíbrio x_{e2}

- Resposta do sistemas em malha fechada na variável de desvio \tilde{x} :
 $\dot{\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x}, K\tilde{x})$ e $\dot{\tilde{x}} = (A + BK)\tilde{x}$ para $\tilde{x}(0) = (-2, -4)$

```

1      % New coordinate system \tilde{F}(0,0) = 0
2      xeq = xe{2};
3      Ftil=@(x,u)F([x(1)+xeq(1) x(2)+xeq(2)], [u(1)+ue(1) u(2)+ue(2)]);
4
5      % Time-simulation of CLOSED-LOOP nonlinear sys.
6      Fx=@(t,x)Ftil(x,K*x);
7      x0 = [-2 -4];
8      [t,xt] = ode45(Fx,[0 14],x0);
9      figure; plot(t,xt);
10
11     % Initial response for linearized system
12     sys_ss_cl = ss(A+B*K,zeros(2),eye(2),zeros(2))
13     [Ycl,Tcl,Xcl] = initial(sys_ss_cl,x0);
14     plot(Tcl,Xcl); xlabel('t');ylabel('xtil');
15     title('Closed-loop response');
16     legend('x1-NL','x2-NL','x1-L','x2-L'); grid;

```

- Resposta em termos de x

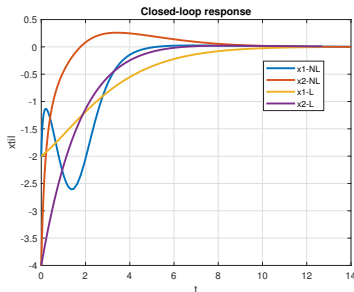
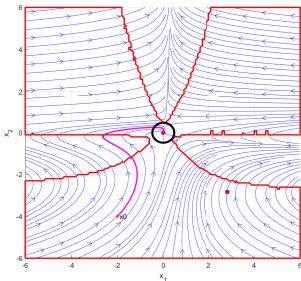
```

1      plot(t,xt+xeq); hold on;
2      plot(Tcl,Xcl+xeq); xlabel('t');ylabel('x'); hold off;

```

Exemplo 3 – Estabilização do ponto de equilíbrio x_{e2}

- Observe nas figuras abaixo que a região $D_V = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \dot{V}(\tilde{x}) = 2\tilde{x}^T P F(\tilde{x}, K\tilde{x}) < 0\}$ não é invariante e que as regiões D_V e $\Omega_c = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n \times n} : V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} < c\}$ são conservadoras.
- O ponto de equilíbrio x_{e1} se encontra agora em $x_e = \tilde{x}_e + x_{e2}$, $\tilde{x}_e = (48.97, -2.66)$, ou seja, $\tilde{F}(\tilde{x}_e, K\tilde{x}_e) = 0$ ou $F(x_e, K(x_e - x_{e2}) + u_e) = 0$, pois $u = K(x - x_{e2}) + u_e = Kx + c$, $c = u_e - Kx_{e2}$.



Retrato de fase do sistema não-linear no novo sistema de coordenadas $\tilde{x} = x - x_{e2}$, região D_V (vermelho), região Ω_c (preto), ponto de equilíbrio na origem e trajetória para a condição inicial $\tilde{x}(0) = (-2, -4)$ (magenta).

Trajétórias de \tilde{x} para a condição inicial $\tilde{x}(0) = (-2, -4)$.

Conclusão

- Linearização é capaz de verificar a estabilidade do ponto de equilíbrio ou do projeto de controlador estabilizante.
- Estimativa da região de atração em geral conservadora \rightsquigarrow importante do ponto de vista prático (região de operação possível).
- Conservadorismo: análise e projeto do sistema linearizado não levam em conta os termos não lineares.
- Análise e projeto diretamente a partir do sistema não linear \rightsquigarrow difícil e *ad-hoc*.

Soluções menos conservadoras

- Soluções menos conservadoras mas resolvidas por métodos de otimização convexos:
 - representação do sistema não linear como $\dot{x} = Ax + Bu + Eg(t, x)$ em que a informação de $g(t, x)$ é levada em conta na análise ou projeto (em geral via *S-Procedure*). Exemplo:
 - $\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \gamma > 0$;
 - $g(\cdot)$ verifica condição de cone limitado em setor:
 $(g(z) - M_1 z)^T (g(z) - M_2 z) \leq 0, g(0) = 0, z = Cx$ (cone sector-bounded nonlinearity);
 - $\|g(t, x)\| \leq \gamma > 0, g(t, 0) \neq 0$, ou $g(t, x)^T Q g(t, x) \leq 1, Q > 0$
 (ver Quadratic Boundedness: $V(x) < 1 \rightarrow \dot{V}(x) < 0$);
 - representação de sistemas não lineares por modelos Takagi-Sugeno ou quasi-LPV: $\dot{x} = A(\alpha(x))x + B(\alpha(x))u, \alpha(x)$ pertence ao simplex unitário e representa os termos não lineares \rightsquigarrow modelo não é único e vale apenas em região compacta do espaço de estados $\mathcal{X} \supseteq \Omega = \{x : V(x) \leq 1\}$.
- Busca de funções de Lyapunov não quadráticas (exemplo $V(x) = x^T P(x)x$) e critérios de otimização para a maximização da estimativa da região de atração Ω (invariante e contrativo).

Conclusão

Resumo

Seja

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (25)$$

Objetivo:

- Estabilizar $\dot{x} = f(x, u)$ em um ponto $p \rightsquigarrow \exists q \mid f(p, q) = 0$
- A mudança de variáveis $z = x - p$ e $v = u - q \rightsquigarrow$ estabilização da origem
 - 1 Encontrar o sistema linearizado $\dot{x} = Ax + Bu$
 - 2 Projetar lei de controle $u = Kx$ tal que $A + BK$ Hurwitz
 - 3 Encontrar $V(x) = x^T P x$ tal que $P(A + BK) + (A + BK)^T P < 0$
 - 4 Encontrar o domínio $D_V = \{\dot{V}(x) < 0\}$ para o (25)
 - 5 Encontrar o maior conjunto invariante contido em $D_V \rightsquigarrow \Omega_c = \{V(x) \leq c\}$

Exercícios propostos

Exercício 1

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - x_2 - x_1x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1x_2 - 2ax_3\end{aligned}\tag{26}$$

com $a, b > 0$. Usando a linearização, projete uma lei de controle de realimentação de estados que estabilize a origem.

Exercício 2

Usando a linearização, projete uma lei de controle de realimentação de estados que estabilize a origem do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= e^{x_2} u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 + e^{x_2} u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2\end{aligned}\tag{27}$$

Estime a região de atração do sistema em malha fechada.