327069 – Controle de Sistemas Dinâmicos via LMIs

Realimentação de Estados de Sistemas com Taxa de Decaimento Exponencial

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação (PGEA)

Universidade de Brasília – UnB

1^o Semestre 2018

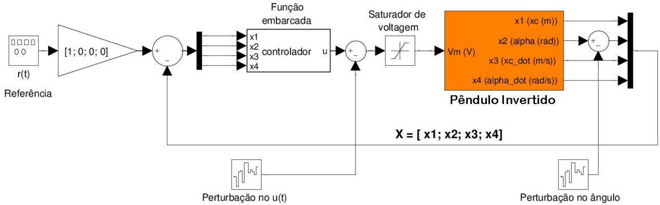
Estabilidade Exponencial

Definição 1 (BEFB:94)

Um sistema é exponencialmente estável com taxa de decaimento $\gamma > 0$ se existir uma constante positiva β tal que, toda trajetória dos estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ do sistema satisfaça

$$||x(t)|| \leq \beta ||x(0)|| e^{-\gamma t}, \qquad t > 0,$$

em que $\beta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ e P é a matriz da função quadrática de Lyapunov $V(t,x) = x(t)'Px(t)$.



Estabilidade Exponencial de Sistemas Dependentes de Parâmetros

Teorema 1

Dados os escalares positivos γ e μ, se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{aligned} T_{ii} &< 0, \quad i = 1, \cdots, N \\ T_{ij} + T_{ji} &< 0, \quad i < j = 1, \cdots, N \end{aligned} \tag{1}$$

em que

$$T_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} A_iG_j + G_j'A_i' + B_iZ_j + Z_j'B_i' + 2\gamma W & W + \mu(A_iG_j + B_iZ_j) - G_i' \\ \star & -\mu(G_i + G_i') \end{bmatrix} \tag{2}$$

então a lei de controle $u(t) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x(t)$ com

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i, \quad G(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i G_i \tag{3}$$

é uma lei que estabiliza o sistema com taxa de dacaimento γ para todo $\alpha \in \mathcal{U}$.

Demonstração

Primeiro, defina a matriz do sistema em malha fechada

$$\bar{A}(\alpha) \triangleq A(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)G(\alpha)^{-1} \tag{4}$$

e

$$T(\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i\alpha_j T_{ij} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha)G(\alpha) + G(\alpha)'\bar{A}(\alpha)' + 2\gamma W & W + \mu\bar{A}(\alpha)G(\alpha) - G(\alpha)' \\ \star & -\mu(G(\alpha) + G(\alpha)') \end{bmatrix}$$

Observe que se as LMIs (1) são satisfeitas então $T(\alpha) < 0$, pois

$$T(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i\alpha_j T_{ij} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 T_{ii} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j \left(T_{ij} + T_{ji}\right) < 0.$$

Demonstração

Pré e pós-multiplicando $T(\alpha) < 0$ por $\begin{bmatrix} I & \bar{A}(\alpha) \end{bmatrix}$ e pela sua transposta, respectivamente, tem-se

$$\bar{A}(\alpha)W + W\bar{A}(\alpha)' + 2\gamma W < 0. \tag{5}$$

Seja $P \triangleq W^{-1}$, pré e pós-multiplicando (5) por W^{-1}, tem-se

$$\bar{A}(\alpha)'P + P\bar{A}(\alpha) + 2\gamma P < 0. \tag{6}$$

Seja a função de Lyapunov

$$V(t,x) = x(t)'Px(t),$$

a LMI (6) é equivalente à

$$x(t)'\left(\bar{A}(\alpha)'P + P\bar{A}(\alpha)\right)x(t) + x(t)'\left(2\gamma P\right)x(t) = \dot{V}(t,x) + 2\gamma V(t,x) < 0. \tag{7}$$

Demonstração

A resolução de $\dot{V}(x) < -2\gamma V(x)$ fornece $V(t,x) \leq V(0,x(0))e^{-2\gamma t}$ e, portanto

$$\lambda_{\min}(P)||x(t)||^2 \leq x'(t)Px(t) \leq \lambda_{\max}(P)||x(t)||^2,$$

implica

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(P)||x(t)||^2 &\leq V(0,x(0))e^{-2\gamma t} \\
||x(t)||^2 &\leq \frac{V(0,x(0))}{\lambda_{\min}(P)}e^{-2\gamma t} \\
&= \frac{x'(0)Px(0)}{\lambda_{\min}(P)}e^{-2\gamma t} \\
&\leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}||x(0)||^2 e^{-2\gamma t}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$||x(t)|| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}||x(0)||e^{-\gamma t}.$$

Portanto, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável com taxa de decaimento γ.

$\mathcal{D}-$Estabilidade

Definição 2 ($\mathcal{D}-$estabilidade)

O sistema linear invariante no tempo $\dot{x} = Ax$ é D-estável sse todos os autovalores de A pertencem a sub-região $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ do plano complexo.

Definição 3 (Região LMI)

Uma sub-região $\mathcal{D}$ do plano complexo é denominada de uma região LMI se existem matrizes $L = L'$ e M tais que

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \quad L + sM + s^* M' < 0\}$$

em que $s = \sigma + j\omega$.

Exemplo de Regiões LMIs

1. Semi plano $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < \alpha\} \rightsquigarrow L = 2\alpha$ e $M = 1$;
2. Disco de raio r e centro em $(-c, 0) \rightsquigarrow L = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. Setor cônico com ângulo interno $2\theta \rightsquigarrow L = 0_{2\times 2}$ e $M = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

$\mathcal{D}-$Estabilidade

Teorema 2

O sistema $\dot{x} = Ax$ é $\mathcal{D}-$estável sse existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$L \otimes P + M \otimes (PA) + M' \otimes (A'P) < 0$$

Corolário 1

Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_\ell$ a intersecção de regiões LMIs dadas, o sistema $\dot{x} = Ax$ é $\mathcal{D}-$estável sse existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$L_i \otimes P + M_i \otimes (PA) + M_i' \otimes (A'P) < 0, \qquad i = 1, \ldots, \ell$$

em que $\mathcal{D}_i = \{s \in \mathbb{C} : \quad L_i + sM_i + s^* M_i' < 0\}$, $i = 1, \ldots, \ell$.

$\rightsquigarrow$ Para duas matrizes A e B, o produto de Kronecker é dado por

$$A \otimes B = [A_{ij}B]_{ij}.$$

$\mathcal{D}-$Estabilidade

- Seja o sistema politópico

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \tag{8}$$

em que

$$(A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (A_i, B_i).$$

Teorema 3

Para uma dada região LMI $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-$, se existir uma matriz simétrica definida positiva $W = W' > 0$ e uma matriz Z tais que as seguintes LMIs são factíveis

$$L \otimes W + M \otimes (A_i W + B_i Z) + M' \otimes (WA_i' + Z' B_i') < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

então o sistema (8) com o ganho de realimentação de estados $K = ZW^{-1}$ é $\mathcal{D}-$estável.