327069 – Controle de Sistemas Dinâmicos via LMIs

Sistemas Fuzzy Takagi–Sugeno

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação (PGEA)
Universidade de Brasília

1º Semestre 2018

Representação de sistemas não-lineares por modelos Takagi–Sugeno

Motivação

Estudo de sistemas não-lineares

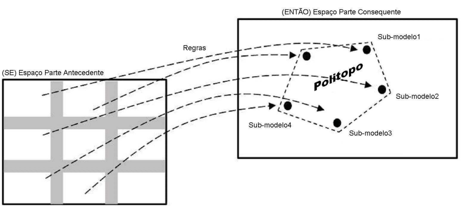
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{1}$$

- A técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto é a linearização da planta em um ponto de operação de interesse, porém, em regiões do espaço de estado distantes deste ponto, este modelo de projeto não é, em geral, adequado;
- Alternativa: representação da planta não-linear em modelos fuzzy;
- O modelo global é a combinação convexa dos modelos lineares invariantes locais;
- O conhecimento heurístico do processo pode ser considerado na escolha de funções de pertinência.

Representação de sistemas não-lineares por modelos Takagi–Sugeno

Motivação

Representação por modelos Takagi–Sugeno (T–S)



- É possível aproximar qualquer sistema não-linear suave com modelos Takagi-Sugeno tendo modelos lineares como regras locais?

Modelos Fuzzy Takagi–Sugeno

Regra de Modelo i:
SE $z_1(t)$ é $\mathcal{M}_{i1}$ e ... e $z_p(t)$ é $\mathcal{M}_{ip}$,
ENTÃO

$$\left\{ \; \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i(t)u(t), \quad i = 1, 2, \ldots, r \right.$$

em que $\mathcal{M}_{ij}$ é o $ij-$ésimo conjunto fuzzy, r é o número de regras de modelo $z_1(t)$, ..., $z_p(t)$ são variáveis premissas que podem ser funções das variáveis de estado, de distúrbios externos ou do tempo.

- Modelo Global (média ponderada dos modelos fuzzy locais):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i\big(z(t)\big)\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i\big(z(t)\big)} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \end{aligned} \tag{2}$$

sendo

$$w_i\big(z(t)\big) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}\big(z(t)\big), \quad \alpha_i\big(z(t)\big) = \frac{w_i\big(z(t)\big)}{\sum_{i=1}^{r} w_i\big(z(t)\big)}, \tag{3}$$

Modelos Fuzzy Takagi–Sugeno

- O termo $M_{ij}\big(z(t)\big)$ é o grau de pertinência de $z_j(t)$ em $\mathcal{M}_{ij}$, ou seja, expressa o quanto a variável premissa $z_j(t)$ pertence ao conjunto fuzzy $\mathcal{M}_{ij}$ no tempo t. Esta é a principal diferença entre a teoria de conjuntos fuzzy e a teoria de conjuntos convencionais, que apenas pode dizer se determinado elemento pertence ou não a certo conjunto. Cada conjunto fuzzy pode ser associado a uma função pertinência $M_{ij}(z_j(t))$. As funções de pertinência podem ser triangulares, trapezoidais, gaussianas, ou qualquer outro formato. O peso associado a cada $i-$ésima regra calculado das funções de pertinência é dado por $w_i(z(t))$.

E desde que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} w_i\big(z(t)\big) > 0, \\ w_i\big(z(t)\big) \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \end{cases}$$

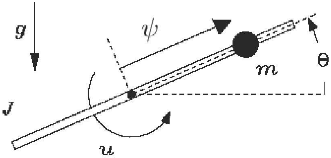
tem-se

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_i\big(z(t)\big) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\big(z(t)\big) = 1, \quad i = 1, \ldots, r. \end{cases}$$

Exemplo: sistema bola-trave

Representação do sistema bola-trave:

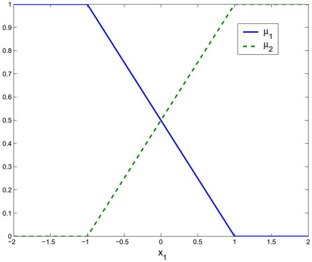
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 x_4^2 - g\,\mathrm{sen}(x_3)) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u, \end{cases}$$



Sistema fuzzy construído:

Regra do Modelo 1:
SE $x_1(t)$ está em torno -1,
ENTÃO $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1(t)u(t)$

Regra do Modelo 2:
SE $x_1(t)$ está em torno 1,
ENTÃO $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2(t)u(t)$



Construção de Modelos Lineares Locais

Teorema 1 (Aproximador universal)

Qualquer sistema não-linear suave $\dot{x} = f(x)$ *satisfazendo* $f(0) = 0$ *e* $f \in \mathbb{C}_n^2$, *pode ser aproximado, com qualquer grau de precisão, por um modelo fuzzy T-S da forma* $\dot{x} = \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) A_i x$.

- Para um sistema não-linear $\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) + G\big(x(t)\big)u(t)$. Então, deseja-se

$$\begin{cases} f(x) + G(x)u \approx Ax + Bu \\ f(x_0) + G(x_0)u = Ax_0 + Bu \end{cases}$$

para qualquer u.

Portanto $G(x_0) = B$ e

$$a_i = \nabla f_i(x_0) + \frac{f_i(x_0) - x_0^T \nabla f_i(x_0)}{|x_0|^2} x_0, \quad x_0 \neq 0.$$

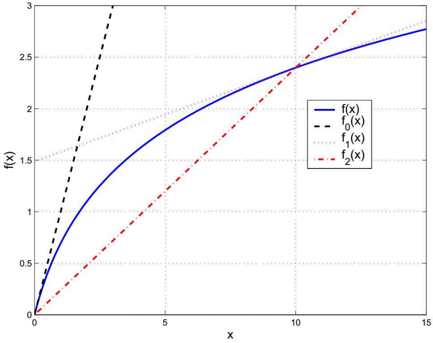
Exemplo de Modelagem Fuzzy

Considere a função não-linear $f(x) = \log(x+1)$. Sejam os modelos locais fuzzy

a. $f_0(x) = a_0 x$, na origem

b. $f_1(x) = a_1 x + d_1$, em $x = 10$

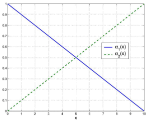
c. $f_2(x) = a_2 x$, em $x = 10$



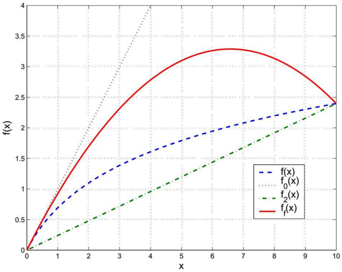
Exemplo de Modelagem Fuzzy

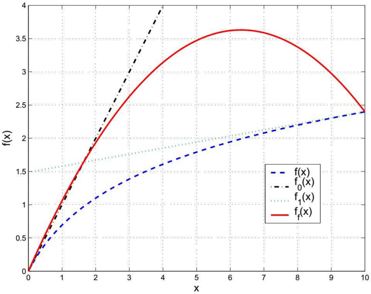
Considere o sistema fuzzy e a função de pertinência

$$\dot{x} = f_f(x) = \alpha_1 f_0 + \alpha_2 f_2 = a_f x$$



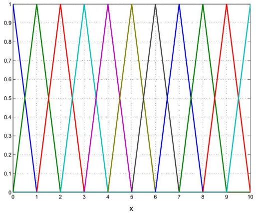
Modelos globais utilizando os modelos locais linear (esquerda) e afim (direita).

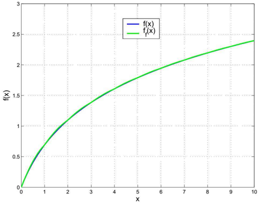




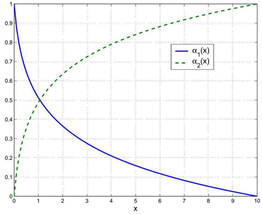
Exemplo de Modelagem Fuzzy

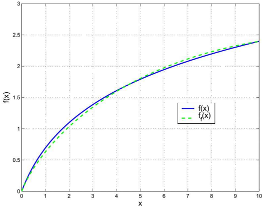
Obtém-se, modificando o número de modelos





ou a função de pertinência





Representação de sistemas não-lineares por modelos Takagi–Sugeno

Condição de Setor

- Condição de setor $\rightsquigarrow$ descrição exata em uma região compacta do espaço de estados $\Omega(x)$.

- Seja um sistema não-linear

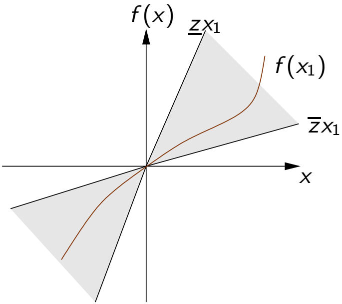
$$\dot{x} = f(x,u) = \xi(x,u)x + \gamma(x,u)u. \qquad (4)$$

Resolvendo

$$\begin{cases} z_j(x,u) = \underline{z_j}\alpha_{j1}(x,u) + \overline{z_j}\alpha_{j2}(x,u) \\ 1 = \alpha_{j1}(x,u) + \alpha_{j2}(x,u) \end{cases} \qquad (5)$$

obtém-se $\quad \dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u \qquad (6)$
válido em $\Omega(x)$.

- Preço a ser pago pela representação exata em $\Omega(x) \rightsquigarrow$ número de vértices igual a 2^ℓ, em que ℓ é o número de termos não lineares em (4).



Exemplo: representação exata de sistemas contínuos

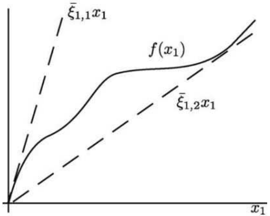
Exemplo

Considere o seguinte sistema não-linear

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\sin(x_1^2)x_1 + u \tag{7}$$

- Região de interesse

$\Omega(x) = \{x : |x_1| \leq 0.5\} \rightsquigarrow$
$0 \leq \sin(x_1^2) \leq \sin(0.5^2)$



Modelo fuzzy T–S

$$\dot{x} = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(x_1)(A_i, B_i) \tag{8}$$

$$\alpha_1(x_1) = \frac{\sin(x_1^2)}{\sin(0.5^2)}, \qquad \alpha_2(x_1) = 1 - \alpha_1(x_1) \tag{9}$$

Exemplo: representação exata de sistemas discretos

Exemplo

Considere o seguinte sistema não-linear

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) - x_1(t)x_2(t) + (5 + x_1(t))u(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) - 0.5x_2(t) + 2x_1(t)u(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Problema

Encontrar uma lei de controle por realimentação de estados que estabilize sistemas não-lineares discreto no tempo e maximize a região de operação

$$x_i(t) \in [-\beta_i \quad \beta_i], \qquad \beta_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

Modelo fuzzy T–S

$$x(t+1) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(x_1)(A_i, B_i) \tag{12}$$

$$\alpha_1(x_i) = \frac{\beta_i + x_i(t)}{2\beta_i}, \qquad \alpha_2(x_i) = 1 - \alpha_1(x_i) \tag{13}$$

Limitação da taxa de variação

Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (var. limitadas)

$$V(x,\alpha) = x'P(\alpha)x \quad \rightsquigarrow \quad \dot{P}(\alpha) \ ? \tag{14}$$

- Limitantes superiores $\rightsquigarrow$ hiper-retângulo $\mathcal{P}$

$$-b_i \leq \dot{\alpha}_i \leq b_i$$

- Do fato de α pertencer ao simplex unitário $\rightsquigarrow$ hiperplano $\mathcal{H}$

$$\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \cdots + \dot{\alpha}_N = 0$$

- Região em que $\dot{\alpha}$ pode assumir valores $\rightsquigarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$

- Aplicação imediata nas condições de análise de estabilidade mas não no problema de síntese de controladores (b_i depende do sinal de controle).