

327069 – Controle de Sistemas Dinâmicos via LMIs

Modelagem de Incertezas

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de
Automação (PGEA)

Universidade de Brasília – UnB

1º Semestre 2018

Tópicos

- 1 Incertezas Paramétricas
- 2 Incertezas Estruturadas
- 3 Incertezas Não-estruturadas
- 4 Estabilidade
- 5 Controle

Tópicos

- 1 Incertezas Paramétricas
- 2 Incertezas Estruturadas
- 3 Incertezas Não-estruturadas
- 4 Estabilidade
- 5 Controle

Incertezas paramétricas

Considere o vetor de incertezas paramétricas

$$\delta \triangleq [\delta_1 \cdots \delta_p]'$$

↪ desconhecido (pode ser variante no tempo) mas limitado, i.e.,

$$\delta \in [\underline{\delta}_1 \ \overline{\delta}_1] \times \cdots \times [\underline{\delta}_p \ \overline{\delta}_p]$$

- Representação no espaço de estados

$$\dot{x} = A(\delta)x + B(\delta)u$$

$$y = C(\delta)x + D(\delta)u$$

- Transformada de Laplace

$$Y(s) = H(s, \delta)U(s)$$

- Exemplo

$$\dot{x} = A(\delta)x, \quad A(\delta) = \begin{bmatrix} -1 & 2\delta_1 \\ -\frac{1}{\delta_1+1} & -4 + 3\delta_2 \end{bmatrix}, \quad \delta_1 \in [-0.5 \ 1], \quad \delta_2 \in [-1 \ 1]$$

Incertezas paramétricas

Representação Afim

$$A(\delta) = A_0 + \delta_1 A_1 + \cdots + \delta_p A_p, \quad \delta_i \in [\underline{\delta}_i \ \overline{\delta}_i]; \quad i = 1, \dots, p$$

Exemplo

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} -1 & 2\delta_1 \\ -\frac{1}{\delta_1+1} & -4 + 3\delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \delta_1 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \delta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{\delta_1+1}, \text{ em que } \delta_1 \in [-0.5 \ 1], \delta_2 \in [-1 \ 1], \delta_3 \in [0.5 \ 2]$$

Representação Multi-afim

$$A(\delta) = A_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i A_i + \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j A_{ij} + \cdots; \quad \delta_i \in [\underline{\delta}_i \ \overline{\delta}_i]; \quad i = 1, \dots, p$$

Representação Polinomial

$$A(\delta) = A_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i A_i + \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j A_{ij} + \sum_{i=1}^p \delta_i^2 B_i + \sum_{i \neq j} \delta_i^2 \delta_j B_{ij} + \cdots; \quad \delta_i \in [\underline{\delta}_i \ \overline{\delta}_i]; \quad i = 1, \dots, p$$

Incertezas paramétricas

Representação Politópica

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_N A_N, \quad \alpha \in \mathcal{U}_N, A(\alpha) \in \mathcal{P}$$

- Simplex unitário

$$\mathcal{U}_N \triangleq \{\alpha = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N]' \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$$

- Conjunto politópico (convexo e fechado)

$$\mathcal{P} \triangleq \{A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha \in \mathcal{U}_N\}$$

↪ O politopo também pode ser representado por

$$\mathcal{P} = \text{co}\{A_1, A_2, \cdots, A_N\}$$

- Não há a necessidade de um modelo nominal

Incertezas paramétricas

Representação Politópica

- Pode ser obtida pela combinação convexa dos valores extremos das incertezas
 \rightsquigarrow matrizes do sistema construídas no vértice do **politopo**

$$\mathcal{B}_\delta = \{\delta_i : \delta_i \in [\underline{\delta}_i \ \overline{\delta}_i]; \ i = 1, \dots, p\}$$

- Problema: grande número de vértices (2^p , p o número de incertezas)
- Exemplo: o sistema¹

$$\dot{x} = A(\delta)x, \quad A(\delta) = \begin{bmatrix} -1 & 2\delta_1 \\ -\frac{\delta_1}{2} & -4 + 3\delta_2 \end{bmatrix}, \quad \delta_1 \in [-0.5 \ 1], \quad \delta_2 \in [-1 \ 1]$$

pode ser representado por

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4, \quad \alpha \in \mathcal{U}_4$$

com as matrizes A_i computadas de $A(\delta_1, \delta_2)$ nos extremos de δ_i , $i = 1, 2$, ou seja,

$$A_1 = A(-0.5, -1), \quad A_2 = A(-0.5, 1), \quad A_3 = A(1, -1), \quad A_4 = A(1, 1).$$

¹Um termo tipo $1/\delta_1$ teria que ser substituído por $\delta_3 \in [1/\overline{\delta}_1 \ 1/\underline{\delta}_1]$.

Incertezas paramétricas

Representação Multi-Simplex

• Um multi-simplex Λ é o produto Cartesiano de um número finito de simplexes, ou seja,

$$\Lambda = \mathcal{U}_{N_1} \times \cdots \times \mathcal{U}_{N_m}$$

↪ Exemplo: Seja $\Lambda = \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_2$, então se $\alpha \in \Lambda$ então $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, em que $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \mathcal{U}_2$ e $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) \in \mathcal{U}_3$

• No exemplo anterior, $A(\alpha) = A(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_2$, é obtido substituindo δ_i por $\delta_i(\alpha_i) = \alpha_{i1} \underline{\delta}_i + \alpha_{i2} \overline{\delta}_i$, $i = 1, 2$.

• Um polinômio é dito Λ -homogêneo se os monômios em Λ com coeficientes não-nulos têm o mesmo grau

↪ Exemplo:

$$P(\alpha) = \alpha_{11} \left(\alpha_{21}^2 P_{((1,0),(2,0))} + \alpha_{21} \alpha_{22} P_{((1,0),(1,1))} + \alpha_{22}^2 P_{((1,0),(0,2))} \right) \\ + \alpha_{12} \left(\alpha_{21}^2 P_{((0,1),(2,0))} + \alpha_{21} \alpha_{22} P_{((0,1),(1,1))} + \alpha_{22}^2 P_{((0,1),(0,2))} \right).$$

tem grau 1 nos componentes $\alpha_1 \in \mathcal{U}_2$, e grau 2 em $\alpha_2 \in \mathcal{U}_2$

Incertezas paramétricas

Representação Multi-Simplex

Um sistema incerto representado na forma afim (afim, multi-afim ou polinomial) pode ser representado na forma multi-simplex fazendo a transformação de variáveis

$$\delta_i = \alpha_{i1} 2\Delta\delta_i - \bar{\delta}_i, \quad \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Lambda_2, \quad i = 1, \dots, p$$

e introduzindo, em cada termo, a soma $(\alpha_{i1} + \dots + \alpha_{i2})^{\beta_i}$ sendo o grau β_i adequado para se obter um polinômio Λ -homogêneo

→ Exemplo: seja a matriz $A(\delta)$ com incertezas na forma afim

$$A(\delta) = A_0 + \delta_1 A_1 + \delta_2^2 A_2, \quad \delta_i \in [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i]$$

Encontre os coeficientes matriciais A_{k_1, k_2} , $k_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $k_2 = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ como função de A_0 , A_1 e A_2 , obtidos da representação multi-simplex

$$A(\alpha) = \alpha_{11} \left(\alpha_{21}^2 A_{((1,0),(2,0))} + \alpha_{21}\alpha_{22} A_{((1,0),(1,1))} + \alpha_{22}^2 A_{((1,0),(0,2))} \right) \\ + \alpha_{12} \left(\alpha_{21}^2 A_{((0,1),(2,0))} + \alpha_{21}\alpha_{22} A_{((0,1),(1,1))} + \alpha_{22}^2 A_{((0,1),(0,2))} \right).$$

Incerteza limitada em norma

- Modelo incerto no espaço de estados

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \quad \Delta(\cdot) \triangleq E_{(\cdot)}\Delta F_{(\cdot)}$$

↪ Δ é uma matriz desconhecida (bloco diagonal, $\text{diag}(\delta_i I_{n_i})$, $|\delta_i| \leq 1$)
satisfazendo $\|\Delta\| < 1$ ou $\Delta' \Delta < I$ e $E_{(\cdot)}$ e $F_{(\cdot)}$ são matrizes conhecidas que indicam as direções de entrada de Δ

↪ Exemplo: seja

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 - 1 \\ \delta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(\delta) = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 1 - \delta_2 \end{bmatrix}$$

em que $|\delta_1 - 0.5| \leq 0.3$ e $|\delta_2 - 0.5| \leq 0.3$ ($\delta_1 = \delta_2 = 0.5$ são os valores nominais)

↪ Então

$$\left. \begin{aligned} A + \Delta A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}}_{E_A} \Delta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F_A} \\ B + \Delta B &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_B + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}}_{E_B} \Delta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{F_B} \end{aligned} \right| \Rightarrow \left. \begin{aligned} &\|\Delta\| < 1 : \\ &\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1 - 0.5}{0.3} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2 - 0.5}{0.3} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \left| \frac{\delta_1 - 0.5}{0.3} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\delta_2 - 0.5}{0.3} \right| \leq 1 \end{aligned} \right.$$

Tópicos

- 1 Incertezas Paramétricas
- 2 Incertezas Estruturadas**
- 3 Incertezas Não-estruturadas
- 4 Estabilidade
- 5 Controle

Incertezas Estruturadas

Δ bloco diagonal, $\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{n_1}, \dots, \delta_p I_{n_p})$; $\therefore |\delta_i| \leq 1 \Rightarrow \|\Delta\| \leq 1$

Exemplo 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 - 1 \\ \delta_2 & 0 \end{bmatrix} x = (A + E_A \Delta F_A) x \iff \begin{cases} \dot{x} = Ax + E_A w \\ z = F_A x \\ w = \Delta z \end{cases}$$

Exemplo 2 [Scherer & Weiland, *LMI in Control*, Lecture Note, 2005]

\rightsquigarrow Condição: **entradas de $A(\delta)$ racionais em δ e denominador não-nulo para $\delta = 0$**

$$\dot{x} = A(\delta)x = \begin{bmatrix} -1 & 2\delta_1 \\ -\frac{1}{2+\delta_1} & -4 + 3\delta_2 \end{bmatrix} x, \quad |\delta_i| \leq r, \quad r > 0 \iff \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \\ w = \Delta z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -0.5 & -4 & -0.5 & -2 & 1.5 \\ -0.5 & -4 & -0.5 & -2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

LFT: $A(\delta) = A + B\Delta(I - D\Delta)^{-1}C$, $\det(I - D\Delta) \neq 0$, $\forall \Delta$ (bem posta)

Tópicos

- 1 Incertezas Paramétricas
- 2 Incertezas Estruturadas
- 3 Incertezas Não-estruturadas**
- 4 Estabilidade
- 5 Controle

Incertezas Não-estruturadas

- Matriz de perturbação Δ completa (sem estruturas particulares)
- $\Delta \in \mathbb{RH}_\infty$ (função racional, própria e estável, $\|\Delta\|_\infty \leq \infty$)
- Fator de incerteza na representação de funções de transferência

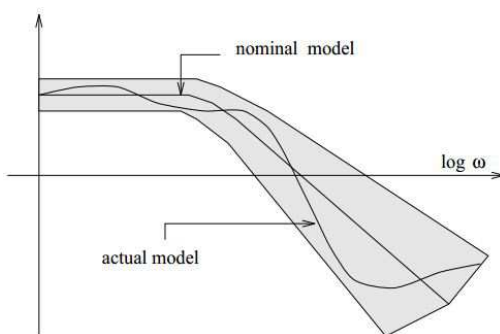


Figura: Comportamento típico de planta sujeita a incerteza multiplicativa [Zhou et. al. (1996)].

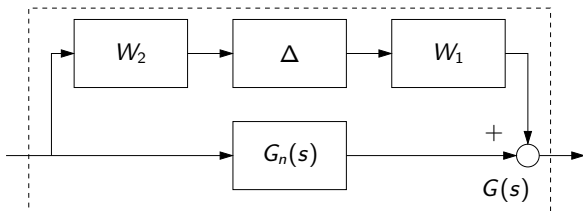
Incertezas Aditivas

- ↪ Seja $G_n(s)$ o modelo nominal e
- ↪ $W_1(s)$ e $W_2(s)$ funções de ponderação na frequência (redimensionam Δ)

Incertezas Aditivas

$$G(s) = G_n(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)$$

- ↪ Erros aditivos na planta; dinâmicas em altas frequências não modeladas

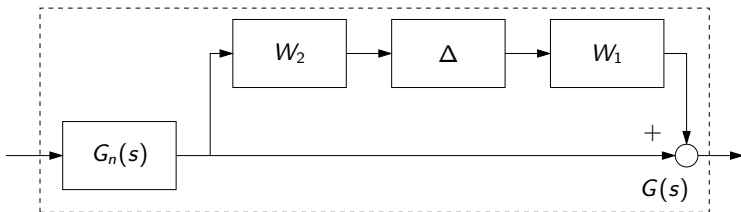


Incertezas Multiplicativas

Incertezas Multiplicativas

$$G(s) = (I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))G_n(s)$$

↪ Incerteza multiplicativa na saída: erros de saída (sensor); dinâmicas em altas frequências não modeladas; zeros incertos no semi-plano direito



$$G(s) = G_n(s)(I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))$$

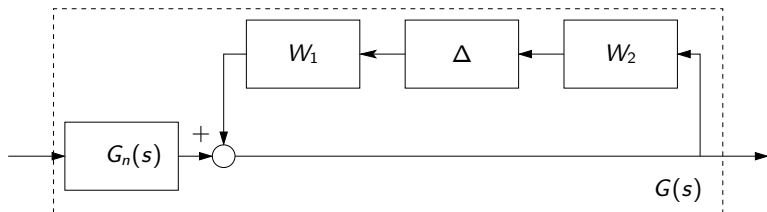
↪ Incerteza multiplicativa na entrada: erros de entrada (atuador); dinâmicas em altas frequências não modeladas (atrasos de transporte etc); zeros incertos no semi-plano direito

Incertezas Multiplicativas

Incertezas Multiplicativas

$$G(s) = (I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))^{-1}G_n(s)$$

↪ Incerteza multiplicativa inversa na saída: erros em baixas frequências (variações de parâmetros com condições de operação, desgaste etc)



$$G(s) = G_n(s)(I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))^{-1}$$

↪ Incerteza multiplicativa inversa na entrada: erros em baixas frequências

● Outras estruturas de incertezas podem ser vistas em [Zhou et. al. (1996)]

Incertezas Aditivas e Multiplicativas – Exemplo

- Exemplo: considere a planta incerta

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad \underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau}$$

escolhendo $\tau = \tau_n(1 + d\Delta)$ com

$$\tau_n = \frac{\bar{\tau} + \underline{\tau}}{2}, \quad d = \frac{\bar{\tau} - \underline{\tau}}{\bar{\tau} + \underline{\tau}}, \quad |\Delta| \leq 1$$

Tem-se

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{\tau_n(1 + d\Delta)s + 1} = \frac{K}{\tau_n s + d\Delta s + 1} \\ &= \frac{K}{\tau_n s + 1} \frac{1}{1 + \frac{d\tau_n s}{1 + \tau_n s} \Delta} \\ &= G_n(s)(1 + W_1(s)\Delta)^{-1} \end{aligned}$$

↪ Incerteza do tipo multiplicativa inversa na entrada

Incertezas Aditivas e Multiplicativas – Exemplo

- Exemplo: considere a planta com atraso incerto no tempo

$$G(s) = G_n(s)e^{-Ts}, \quad T_1 \leq T \leq T_2$$

escrevendo o sistema incerto como

$$G(s) = G_n(s)(1 + W_1\Delta), \quad |\Delta| \leq 1$$

Tem-se

$$G(s)/G_n(s) - 1 = W_1\Delta$$

$$|G(s)/G_n(s) - 1| = |W_1|$$

$$|G_n(s)e^{-Ts}/G_n(s) - 1| = |W_1|$$

Portanto,

$$|W_1| = |e^{-Tj\omega} - 1|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

- Para $0.1 \leq T \leq 1s \rightsquigarrow$ possível

escolha: $W_1(s) = \frac{2.5s}{1.2s + 1}$

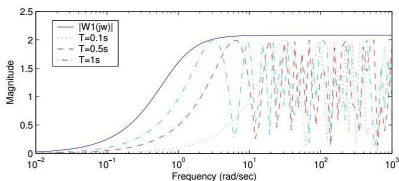


Figura: Fonte – Notas de aula Prof. Reinaldo Palhares (UFMG).

Tópicos

- 1 Incertezas Paramétricas
- 2 Incertezas Estruturadas
- 3 Incertezas Não-estruturadas
- 4 Estabilidade**
- 5 Controle

Fundamentos da Robustez

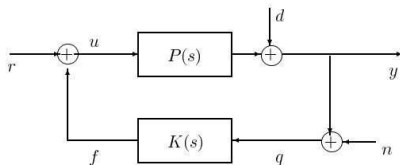


Figura: Malha de realimentação.

$$u = (I - KP)^{-1}r + (I - KP)^{-1}Kn + (I - KP)^{-1}Kd$$

Definição 1 (Interconexão bem posta *well-posed*)

Um conexão de realimentação é dita bem posta se todas as matrizes de função de transferência são bem definidas e próprias.

$$\exists (I - K(s)P(s))^{-1} \iff \det(I - K(s)P(s)) \neq 0 \iff (I - K(s)P(s)) \text{ não-singular}$$

Fundamentos da Robustez

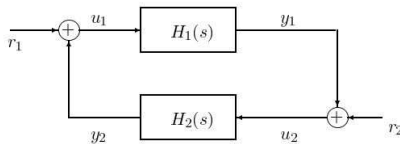


Figura: Malha de realimentação – caso geral.

$$H_1(s) \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad H_2(s) \triangleq \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

A conexão de realimentação é bem posta (sinais internos unicamente determinados pelos estados e entradas) se

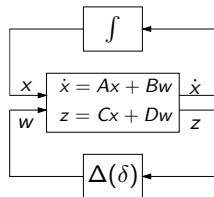
$$\begin{bmatrix} I & -D_2 \\ -D_1 & I \end{bmatrix} \text{ não-singular} \iff (I - D_1 D_2) \text{ ou } (I - H_1(\infty)H_2(\infty)) \text{ não-singular}$$

e internamente estável sse $\begin{bmatrix} I & -H_2(s) \\ -H_1(s) & I \end{bmatrix}^{-1}$ for estável.

Fundamentos da Robustez

- Seja o sistema incerto $\dot{x} = F(\delta)x$ representado por

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx + Dw \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} w &= \Delta(\delta)z, \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta \\ \Delta(\delta) &= \text{diag}(\delta_1 I_{n_1}, \dots, \delta_p I_{n_p}) \end{aligned}$$



Então,

$$F(\delta) = A + B\Delta(\delta)(I - D\Delta(\delta))^{-1}C \triangleq \mathcal{F}_\ell \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \Delta(\delta) \right) \quad \text{▶ Ver LFT}$$

A interconexão acima é dita bem posta se $I - D\Delta(\delta)$ é não singular $\forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$.

Estabilidade Robusta

Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. A interconexão acima é bem posta e $\dot{x} = F(\delta)x$ é Hurwitz $\forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$ sse $\det(I - G(j\omega)\Delta(\delta)) \neq 0$, $\forall \omega \in [0, \infty)$ e $\forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$

Fundamentos da Robustez

Linhas da demonstração

Suponha a interconexão bem posta. Então $F(\delta)$ é Hurwitz $\forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$ sse

$$\det(sl - F(\delta)) \neq 0, \quad \forall \operatorname{Re}(s) \geq 0, \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta$$

$$\det(sl - A - B\Delta(\delta)(I - D\Delta(\delta))^{-1}C) \neq 0$$

\iff (for. determ. de Schur & conexão bem posta), (ver aula c. básicos, p. 22/49)

$$\det \left(\begin{bmatrix} sl - A & -B\Delta(\delta) \\ -C & I - D\Delta(\delta) \end{bmatrix} \right) \neq 0$$

\iff (for. determ. de Schur & A Hurwitz)

$$\det(I - [C(sl - A)^{-1}B + D]\Delta(\delta)) = \det(I - G(s)\Delta(\delta)) \neq 0$$

\iff (isomorfia)

$$\det(I - G(j\omega)\Delta(\delta)) \neq 0$$

- Estabilidade robusta \rightsquigarrow teste de não singularidade
- Condição pode ser estendida para incertezas dinâmicas $\Delta(s)$

Teorema de Ganho Pequeno

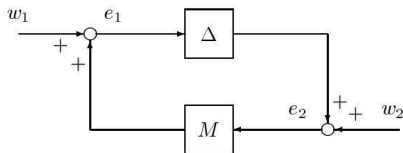
Theorem 5.1 (Teorema do Ganho Pequeno (*Small Gain Theorem*))

Considere o sistema interconectado mostrado abaixo, com $M(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ e $\gamma > 0$. Então o sistema interconectado é bem posto (well-posed) e internamente estável para todo $\Delta(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ com $\|\Delta(s)\|_\infty \leq \gamma$ sse $\|M(s)\|_\infty \leq 1/\gamma$

Corolário

São equivalentes:

- i $\|M(s)\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}(M(j\omega)) \leq \gamma$
 - ii O sistema é bem posto e internamente estável $\forall \Delta \in \mathcal{H}_\infty$ ($\forall \Delta \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$) com $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$;
 - iii O sistema é bem posto e internamente estável $\forall \Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}$ com $\|\Delta\| \leq 1/\gamma$;
- ↪ Na prática assume-se $\gamma = 1$; Δ pode ser não linear ou variante no tempo



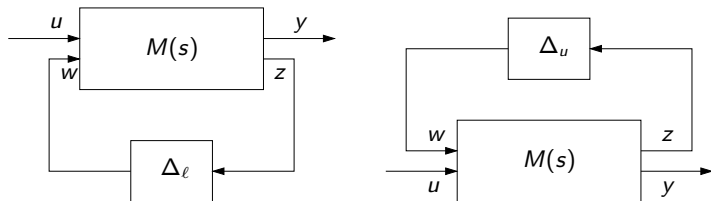
Definição 2 (Raio de estabilidade)

$$\gamma(M(s)) \triangleq \frac{1}{\|H(s)\|_\infty} = \frac{1}{\sup_w \bar{\sigma}(M(j\omega))}$$

LFT

- Representação por LFT (*Linear Fractional Transformation*)

- Planta nominal conectada por bloco de incerteza $w = \Delta z$, $\|\Delta\| \leq \gamma$



- Particionamento de $M(s)$ (figura à direita)

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \\ w &= \Delta_u z \end{aligned}$$

- T_{yu} (upper): $\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21} \Delta_u (I - M_{11} \Delta_u)^{-1} M_{12}$
- T_{yu} (lower): $\mathcal{F}_\ell(M, \Delta_\ell) = M_{11} + M_{12} \Delta_\ell (I - M_{22} \Delta_\ell)^{-1} M_{21}$

LFT

Representando Incerteza aditiva via LFT

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & W_2(s) \\ W_1(s) & G(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta) = G(s) + W_1(s)\Delta W_2(s)$$

Representando Incerteza multiplicativa via LFT

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & G(s) \\ W_1(s) & G(s) \end{bmatrix}$$

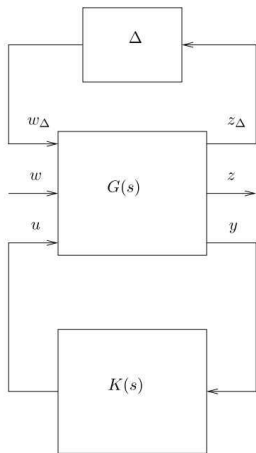
$$\mathcal{F}_u(M, \Delta) = G(s) + W_1(s)\Delta G(s)$$

Tópicos

- 1 Incertezas Paramétricas
- 2 Incertezas Estruturadas
- 3 Incertezas Não-estruturadas
- 4 Estabilidade
- 5 Controle**

O Problema de Controle

Problema geral de controle robusto



$$G(s) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w_\Delta + B_2 u + B_w w \\ z_\Delta = C_1 x + D_{11} w_\Delta + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w_\Delta \\ z = C_z x + D_z u \end{cases}$$

Problema de Controle Ótimo \mathcal{H}_∞

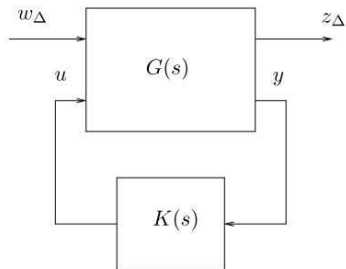
Achar uma família de controladores admissíveis $K(s)$ tal que $\|T_{z_\Delta w_\Delta}(s)\|_\infty$ é minimizado.

Problema de Controle Sub-ótimo \mathcal{H}_∞

Dado $\gamma > 0$, achar uma família de controladores admissíveis $K(s)$, se existir algum, tal que $\|T_{z_\Delta w_\Delta}(s)\|_\infty < \gamma$.

O Problema de Controle

Controle \mathcal{H}_∞



$$G(s) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w_\Delta + B_2 u + B_w w \\ z_\Delta = C_1 x + D_{11} w_\Delta + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w_\Delta \end{cases}$$

$$\|\Delta\|_\infty < 1 \quad \text{ou} \quad \|\Delta\| < 1$$

- Projeto de controlador por realimentação de saída ou de estados tal que

- Matriz do sistema em malha fechada é Hurwitz
- Função transferência de w_Δ para z_Δ tem norma \mathcal{H}_∞ menor do que um

O Problema de Controle

Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados

- Sistema nominal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_2u + B_1w_\Delta \\ z_\Delta &= C_1x + D_{12}u\end{aligned}$$

- Realimentação de estados

$$u = Kx$$

Problema de controle robusto via realimentação de estados

- $A + B_2K$ Hurwitz
- $\|T_{z_\Delta w_\Delta}(s)\|_\infty < 1$, ou seja,

$$\|(C_1 + D_{12}K)[sI - A - B_2K]^{-1}B_1\|_\infty < 1$$