395480 – Controle Robusto
Tema: Análise e Controle via LMIs
Normas de Sinais e Sistemas

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação (PGEA)
Universidade de Brasília

1º Semestre 2018

Tópicos

Tópicos

Sinais

Sinais

Função mensurável (Lebesgue) que mapeia $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$,
$\mathbb{S} = \{f : f(t) \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in \mathbb{R}\}$

Espaço vetorial de sinais

Conjunto de sinais, $\mathbb{S}$, com suas operações usuais de some e multiplicação por escalar sob um corpo $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathbb{S}$

Notação:

- $u(t)$: valor do sinal no instante t
- u: sinal para todo t

Normas de Sinais

Definição 1 (Norma)

Seja V um espaço vetorial e um operador $\phi : V \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \infty$. Então ϕ é uma norma em V se satisfaz

i *Não negatividade:* $\phi(v) \geq 0$

ii *Homogeneidade: para* $\phi(v) < \infty$, $\phi(\alpha v) = |\alpha|\phi(v)$

iii *Desigualdade triangular:* $\phi(v + w) \leq \phi(v) + \phi(w)$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $v, w \in V$

- **Notação**: $||v||_x \triangleq \phi(v)$; $||v(t)||_x$ norma x do vetor $v(t) \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}_p[0, \infty)$ – Espaço de Lebesgue das funções mensuráveis

- Seja uma função $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$

$$||f||_{\mathcal{L}_{p,r}} \triangleq \begin{cases} \left(\int_{\infty}^{\infty} ||f(t)||_r^p dt\right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_t ||f(t)||_r < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

em que $||f(t)||_r = (\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t)|^r)^{1/r}(\max_i |f_i(t)|, \text{ se } r = \infty)$ é a norma vetorial-r do vetor $f(t)$. No geral $r = 2$ e, para facilidade de notação, $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_{p,2}$ $G\mathcal{H}_2$

Normas de Sinais

Norma L_∞ – norma de pico

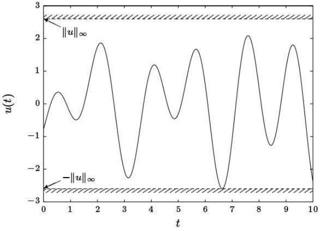
- Sinal escalar $u(t) \in \mathbb{R}$

$$||u||_\infty \triangleq \sup_{t\geq 0} |u(t)|$$

Norma L_∞ (sinal vetorial)

$$||u||_\infty \triangleq \max_{1\leq i\leq n} ||u_i||_\infty = \sup_{t\geq 0} \max_{1\leq i\leq n} |u_i(t)|, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^n$$

- Sinais persistentes ou transientes.
- Interpretação: valor de pico (menor valor do limitante superior de u)



Normas de Sinais

Norma RMS *(Root-Mean-Square)*

- Sinal escalar $u(t) \in \mathbb{R}$

$$||u||_{rms} \triangleq \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

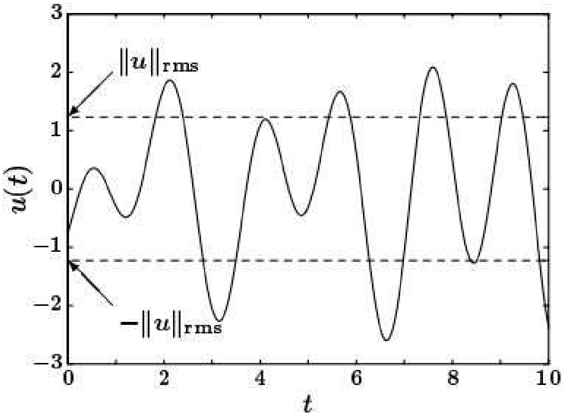
Norma RMS (sinal vetorial)

$$||u||_{rms} \triangleq \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)' u(t) dt \right)^{1/2}, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^n$$

- Obs.: $u(t)'u(t) =< u(t), u(t) >= ||u(t)||_2^2$ (norma Euclidiana)
- Sinais persistentes
- Medida de estado estacionário, não afetada por transientes
- Interpretação: potência em estado estacionário de um sinal (em circ. elétricos seria a potência média dissipada num resistor por uma tensão u)

Normas de Sinais

Norma RMS *(Root-Mean-Square)*



Normas de Sinais

Norma RMS – Sinais Estocásticos

- Sinais modelados como um processo estocástico estacionário
- Sinal escalar $u(t) \in \mathbb{R}$

$$||u||_{rms} \triangleq \left(E[u(t)^2]\right)^{1/2}$$

Norma RMS (sinal vetorial estocástico)

$$||u||_{rms} \triangleq \left(E[u(t)'u(t)]\right)^{1/2} = \left(E[||u(t)||^2]\right)^{1/2}, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^n$$

em que $E[x]$ é a esperança matemática (média) da variável aleatória x com função densidade de probabilidade (pdf) $f(x)$, dada por

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

e $E[x^2]$ é chamado de segundo momento

Normas de Sinais

Norma RMS – Sinais Estocásticos

Definição 2 (Matriz de Autocorrelação)

$$R_u(\tau) \triangleq E[u(t)u(t+\tau)']$$

Interpretações:

- Padrões de repetição
- Quanto um valor é capaz de influenciar seus vizinhos
- Obs.: $C_u \triangleq E[u(t)u(t)'] = R_u(0)$: matriz de covariância (sinal de média nula)

Definição 3 (Densidade espectral de potência)

$$S_u(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Interpretações:

- Transformada de Fourier de $R_u(t)$
- Distribuição da potência um função da frequência $w[rad/s]$
- Ruído branco: $R_u(\tau) = \delta(\tau)$, $S_u(j\omega) = 1$ ($S_u(j\omega) = I$).

Normas de Sinais

Norma RMS – Sinais Estocásticos

$$||u||_{rms}^2 = E[u(t)'u(t)] = E[Tr(u(t)'u(t))] = Tr(E[u(t)'u(t)]) = Tr(R_u(0))$$

Norma RMS (potência de um sinal estocástico)

$$||u||_{rms}^2 = Tr(R_u(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Tr\left(S_u(j\omega)\right) d\omega = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||_{rms}^2, \quad u(t) \in \mathbb{R}^n$$

Definições

- u é um sinal de potência se $\exists R_u(\tau) < \infty, \forall \tau$
- conjunto de sinais de potência finita $\mathcal{P} \triangleq \{u : ||u||_{rms}^2 = Tr(R_u(0)) < \infty\}$
- conjunto dos sinais de densidade espectral de potência finita

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \triangleq \{u : ||u||_{\infty}^2 \triangleq ||S_u(j\omega)||_{\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(S_u(j\omega)) < \infty\}$$

Normas de Sinais

Norma $\mathcal{L}_2$ - norma de energia

- Sinal escalar $u(t) \in \mathbb{R}$

$$||u||_2 \triangleq \left(\int_0^\infty u(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

Norma $\mathcal{L}_2$ (sinal vetorial)

$$||u||_2 \triangleq \left(\int_0^\infty ||u(t)||^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2 \right)^{1/2}, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^n$$

- Sinais transientes (decaem a zero com o tempo, $||u||_{rms} = 0$)
- Raiz quadrada da energia total.

Sinais discretos no tempo - norma ℓ_2

$$||u||_2 \triangleq \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||u(k)||^2 dt \right)^{1/2}, \qquad u(k) \in \mathbb{R}^n$$

Norma $\mathcal{L}_2$ - norma de energia

- Pelo Teorema de Parseval, a norma $\mathcal{L}_2$ pode ser computada como uma norma $\mathcal{L}_2$ no domínio da frequência

Norma $\mathcal{L}_2$ (domínio da frequência)

$$||u||_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(j\omega)U(j\omega)d\omega \right), \qquad U(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} \in \mathbb{R}^n$$

- A energia total do sinal no domínio do tempo é igual a energia total da forma de onda no domínio da frequência (energia da forma de onda da transformada de Fourier somada através de todas as suas componentes)

Tópicos

Espaços de Sinais

Espaços de Lebesgue $\mathcal{L}_2$

Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$

- Espaço dos sinais quadraticamente integráveis (energia finita)

$$\mathcal{L}_2(-\infty, \infty) = \{f \in \mathbb{S} : ||f||_2 \triangleq \left(\int_{-\infty}^{\infty} ||f(t)||^2 dt \right)^{1/2} < \infty\}$$

Espaço de Lebesgue $\ell_2(-\infty, \infty)$

- Espaço dos sinais quadraticamente somáveis (energia finita)

$$\ell_2(-\infty, \infty) = \{f \in \mathbb{S} : ||f||_2 \triangleq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} ||f(k)||^2 dt \right)^{1/2} < \infty\}$$

$\leadsto$ $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ ($\mathcal{L}_2$) é um espaço de Hilbert de funções matriciais no $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) com produto interno

$$< f, g > \triangleq \int_{\infty}^{\infty} Tr\left(f'(t)g(t)\right) dt \qquad \left(< f, g > \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} Tr\left(f^*(j\omega)g(j\omega)\right) d\omega \right)$$

Espaços de Sinais

Espaços de Lebesgue $\mathcal{L}_2$

- O espaço de Lebesgue também pode ser definido para sinais no domínio da frequência,

$$\mathbb{S}_f = \{f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^n, f^*(j\omega) = f'(-j\omega), w \in \mathbb{R}\}$$

Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_2$ (domínio da frequência)

$$\mathcal{L}_2 = \{f \in \mathbb{S}_f : ||f||_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega)f(j\omega)d\omega\right)^{1/2} < \infty\}$$

- Da identidade de Parseval

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2, \qquad f \in \mathcal{L}_2(-\infty,\infty), \quad \hat{f}(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Obs.: Transformada inversa de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\mathcal{L}_2(-\infty,\infty) \cong \mathcal{L}_2$$
$$\mathcal{L}_2[0,\infty) \cong \mathcal{H}_2$$

$\rightsquigarrow$ *A Transformada de Fourier é um isomorfismo no espaço de Hilbert entre $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$ e $\mathcal{L}_2$ ($\mathcal{F}$ é um mapeamento linear bijetivo que preserva o produto interno e a norma). V é um espaço de Hilbert se V for um espaço vetorial completo com a norma derivada do produto interno (é um espaço de Banach, esp. vet. normado e completo).*

Espaços de Sinais

Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$

- Espaço das funções de uma variável complexa que são analíticas no semiplano direito aberto e têm norma finita

Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$

$$\mathcal{H}_2 = \{f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^n, f^*(s) = f'(\bar{s}); f(s = \alpha + j\omega) \text{ é analítica em } \mathbb{R}(s) > 0;$$
$$||f||_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha + j\omega) f(\alpha + j\omega) d\omega \right)^{1/2} < \infty\}$$

Função Analítica

- Uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em séries de Taylor
- Todas as funções de transferência estáveis são analíticas no semiplano direito aberto

Espaços de Sinais

Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$

Teorema de Fatou

$$\forall f \in \mathcal{H}_2, \exists\ f_f(j\omega) \triangleq \lim_{\alpha \to 0} f(\alpha + j\omega)$$

em que

i $f_f \in \mathcal{L}_2$

ii $f \mapsto f_f$ é linear e injetiva (para cada elemento da imagem há apenas um elemento no domínio)

iii $||f_f||_2 = ||f||_2$

logo, $\mathcal{H}_2$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}_2$, i.e, $f \in \mathcal{H}_2 \mapsto f_f \in \mathcal{L}_2$, e portanto $\mathcal{H}_2$ é isomorfo a $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ por meio da Transformada de Laplace

- Norma H_2:

$$||f||_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega)f(j\omega)d\omega\right)^{1/2} < \infty\}$$

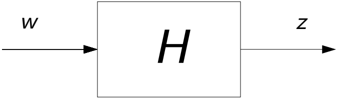
Tópicos

Normas de Sistemas

Sistema Linear Invariante (LTI)

- Um sistema é um mapeamento de um espaço de sinais (entradas) para outo espaço de sinais (saídas),

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S} \\ &: w \mapsto z = Hw \end{aligned}$$



- No domínio do tempo tem-se $z(t) = h(t) * w(t)$ e, no domínio da frequência, $z(s) = H(s)w(s)$, em que $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

Ganho induzido de um sistema

$$||H|| \triangleq \sup_{||w|| \neq 0} \frac{||Hw||}{||w||} = \sup_{||w|| \leq 1} ||Hw||$$

Interpretações:

- Fator máximo de escalonamento de um sinal, medido por uma determinada norma

Normas de Sistemas

Resposta RMS a entrada ruído

$$\underset{S_w(\omega)}{\xrightarrow{\;w\;}} \boxed{H} \xrightarrow{\;z\;} S_z(\omega) = H(j\omega)S_w(\omega)H^*(j\omega)$$

Então, para H estável,

$$||H||_{rms,w} \triangleq ||z||_{rms} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Tr\left(H(j\omega)S_w(\omega)H^*(j\omega)\right)d\omega\right)^{1/2}$$

pois

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= E[z(t)z'(t+\tau)] \\ &= E[h(t) * w(t)w'(t+\tau) * h(t)] \\ &= E[h(t) * R_w(\tau) * h(t)] \end{aligned}$$

e

$$S_z(j\omega) = \mathcal{F}\{R_u(\tau)\} = H(j\omega)S_w(\omega)H^*(j\omega)$$

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_2$: resposta RMS ao ruído branco

- Considere um ruído branco (média nula, covariância unitária – $S_w(\omega) = I$), ou seja, w é um sinal de densidade espectral de potência finita ($w \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$)

- Norma $\mathcal{H}_2$ (sistemas estáveis SISO): $||H||_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2}$

Norma $\mathcal{H}_2$ (sistemas estáveis MIMO)

$$||H||_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Tr\left(H(j\omega)H^*(j\omega)\right) d\omega\right)^{1/2}$$

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_2$: resposta RMS ao ruído branco

- Como $||H||_2 < \infty$ (para sistemas instáveis $||H||_2 = \infty$), $z \in \mathcal{P}$ (a saída é um sinal de potência finita)

- A norma $\mathcal{H}_2$ de uma função de transferência é a norma RMS da sua saída quando excitada por um ruído branco (variância da saída)

- Portanto, a norma $\mathcal{H}_2$ é um ganho induzido $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \mapsto \mathcal{P}$ (sinais de densidade espectral de potência finita para sinais de potência finita)

- $||H||_2 < \infty \iff H(\infty) = 0$ (função racional estritamente própria)

- Se a covariância Q de w não é unitária, é possível fazer uma transformação ($\tilde{w} = Q^{-1/2}w$, $\tilde{w}$ com covariância unitária e $Q^{1/2}$ incorporado ao sistema).

- Ruídos coloridos podem ser considerados como sendo a saída de um filtro $F(s)$ com ruído branco na entrada e $F(s)$ incluído no cálculo da norma.

- Em geral a norma $\mathcal{H}_2$ é usada quando há informação do conteúdo espectral da entrada.

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_2$: resposta $\mathcal{L}_2$ ao impulso

- Pelo Teorema de Parseval, no caso SISO

$$||H||_2 = \left(\int_0^\infty h(t)^2 dt\right)^{1/2} = ||h||_2$$

que é a norma $\mathcal{L}_2$ da resposta ao impulso h do sistema LTI. Então, a norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema é a norma $\mathcal{L}_2$ (energia) da sua resposta a entrada impulso unitário $\delta(t)$. Outros tipos de entradas transientes podem ser considerados como sendo gerados a partir da reposta ao impulso de um filtro $F(s)$ conhecido, incorporado ao cômputo da norma.

- E caso MIMO

$$||H||_2 = \left(Tr\left(\int_0^\infty h(t)h(t)'dt\right)\right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n_z}\sum_{j=1}^{n_w} ||H_{ij}||_2^2\right)^{1/2}$$

que é a soma dos quadrados das normas $\mathcal{H}_2$ de cada função de transferência que compõe a matriz de transferência $H(j\omega)$.

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_2$ (caso MIMO)

- Em termos dos valores singulares matriz de transferência $H(j\omega)$,

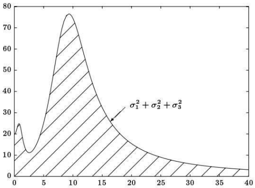
$$\sigma_i(H(j\omega)) \triangleq (\lambda_i(H^*(j\omega)H(j\omega)))^{1/2}$$

Então,

Norma $\mathcal{H}_2$ (MIMO)

$$||H||_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(H(j\omega))^2 d\omega\right)^{1/2}, \qquad n = \min\{n_z, n_w\}$$

$\leadsto$ Então, o quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ é a área total sob o gráfico do quadrado dos valores singulares, na escala de frequência linear.



Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_2$ Generalizada ($G\mathcal{H}_2$)

- Ganho induzido $w \in \mathcal{L}_2 \mapsto z \in \mathcal{L}_{\infty,2}$ (ganho *energia-pico*) norma $\mathcal{L}_{p,r}$

$$||H||_{(\mathcal{L}_\infty,\mathcal{L}_2)} \triangleq \sup_{w\in\mathcal{L}_2,||w||_2\neq 0} \frac{||Hw||_\infty}{||w||_2} = \lambda_{\max}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)H^*(j\omega)d\omega\right)^{1/2}$$

- O operador $\lambda_{\max}(\cdot)$ é substituído por $diag_{\max}(\cdot)$ se $w \in \mathcal{L}_2 \mapsto z \in \mathcal{L}_{\infty,\infty}$.
- Para saída escalar: $|z(t)| \leq ||H||_2 \cdot ||w||_2$, logo $||H||_{(\mathcal{L}_\infty,\mathcal{L}_2)} \leq ||H||_2$.
- Para o sistema descrito na forma espaço de estados $(A, B, C, 0)$

$\rightsquigarrow$ $||H||_{(\mathcal{L}_\infty,\mathcal{L}_2)} = \lambda_{\max}(CQC')$, $Q = Q' \geq 0 : AQ + QA' + BB' = 0$.

Ganho de Pico (Norma $\mathcal{L}_1$)

- Ganho induzido $w \in \mathcal{L}_\infty \mapsto z \in \mathcal{L}_\infty$ (ganho de *pico*)

$$||H||_{(\mathcal{L}_\infty,\mathcal{L}_\infty)} \triangleq \sup_{w\in\mathcal{L}_\infty,||w||_\infty\neq 0} \frac{||Hw||_\infty}{||w||_\infty} = \int_0^{\infty} |h(t)|dt = ||h(t)||_1$$

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_\infty$: ganho RMS ou norma induzida $\mathcal{L}_2$

$$
\begin{aligned}
||H||_{rms-gn} &\triangleq \sup_{||w||_{rms}\neq 0} \frac{||Hw||_{rms}}{||w||_{rms}}, && \text{(ganho RMS)}\\
&= \sup_{||w||_2\neq 0} \frac{||Hw||_2}{||w||_2}, && \text{(norma induzida } \mathcal{L}_2\text{)}\\
&= \sup_{\omega} |H(j\omega)|, && \text{para } H \text{ estável}
\end{aligned}
$$

⇝ Norma da magnitude máxima de $H(j\omega)$, ou seja, máxima resposta de pico a uma entrada senoidal de amplitude unitária

- Ao contrário da norma $\mathcal{H}_2$, apropriada quando se conhece pouco sobre as características espectrais da entrada w

- Na teoria controle, norma $\mathcal{H}_\infty$ tem papel central na análise de estabilidade de sistemas realimentados incertos (*small gain property*)

Norma $\mathcal{H}_\infty$ (SISO)

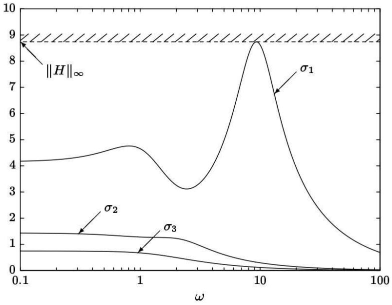
$$
||H||_\infty \triangleq ||H||_{rms-gn} = \sup_{\mathbb{R}\{s\}>0} |H(s)|
$$

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_\infty$: ganho RMS ou norma induzida $\mathcal{L}_2$

Norma $\mathcal{H}_\infty$ (MIMO)

$$||H||_\infty \triangleq ||H||_{rms-gn} = \sup_{\mathbb{R}\{s\}>0} \sigma_{\max}(H(s)) = \sup_{w>0} \sigma_{\max}(H(jw))$$



Outra interpretação:

- Entrada senoidal $\rightsquigarrow$ saída senoidal

$$w(t) = w_0 e^{j\omega t} \Rightarrow z(t) = z_0 e^{j\omega t},$$

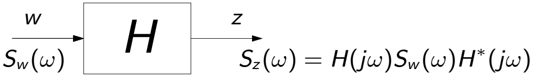
com $z_0 = H(j\omega)w_0$

$\rightsquigarrow$ Isso implica na relação de normas:

$$||z_0|| = H(j\omega)w_0 \leq \sigma_{\max}(H(j\omega))||w_0||$$

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_\infty$: sinais estocásticos



- Para sistemas SISO e H estável,

$$||z||_{rms}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_w(\omega)d\omega \leq \sup_w |H(j\omega)|^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_w(\omega)d\omega = ||H||_\infty^2 ||w||_{rms}^2$$

- Para todo $||w||_{rms} \neq 0$,

$$\frac{||Hw||_2}{||w||_2} \leq ||H||_\infty$$

- Para w ruído branco ($S_w(j\omega) = 1$), $S_z(\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)$. Se $H \in \mathcal{L}_\infty \triangleq \{H : ||H||_\infty \triangleq \sup_w \sigma_{\max}(H(j\omega)) < \infty\}$ então $||S_z(\omega)||_\infty = ||H||_\infty < \infty$ e, portanto, $z \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ (z tem densidade espectral de potência finita)

$\rightsquigarrow$ a norma $\mathcal{L}_\infty$ é o ganho induzido $\mathcal{S}_\mathcal{P} \mapsto \mathcal{S}_\mathcal{P}$

Normas de Sistemas

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Norma $\mathcal{H}_\infty$: ganho induzido $\mathcal{L}_2$

$$||H(s)||_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow ||z||_2 \leq \gamma ||w||_2, \quad w \in \mathcal{L}_2$$
$$\Leftrightarrow z'(t)z(t) \leq \gamma^2 w'(t)w(t)$$

$\rightsquigarrow$ A norma $\mathcal{H}_\infty$ é caracterizada pelo menor valor de γ

Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ é o ganho induzido $\mathcal{L}_2 \mapsto \mathcal{L}_2$

Em resumo...

As seguintes associações são verdadeiras

$$||H(s)||_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow ||Hw||_{rms} \leq \gamma, \qquad \forall ||w||_{rms} < 1$$

e

$$||H(s)||_2 \leq \gamma \Leftrightarrow ||Hw||_{rms} \leq \gamma, \qquad w \text{ ruído branco}$$

Normas de Sistemas

Input $u(t)$	Output $z(t)$	Signal Norms	Induced Norms
$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_2$	$\|u\|_2^2 = \int_0^\infty \|u\|^2\, dt$	$\|G\|_\infty$
$\mathcal{S}_\mathcal{P}$	$\mathcal{S}_\mathcal{P}$	$\|u\|_\mathcal{S}^2 = \|S_{uu}\|_\infty$	$\|G\|_\infty$
$\mathcal{S}_\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\|u\|_\mathcal{P}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \text{Trace}\{S_{uu}(j\omega)\}d\omega$	$\|G\|_2$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\|u\|_\mathcal{P}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \text{Trace}\{S_{uu}(j\omega)\}d\omega$	$\|G\|_\infty$
$\mathcal{L}_\infty$	$\mathcal{L}_\infty$	$\|u\|_\infty = \sup_t \max_i \|u_i(t)\|$	$\max_i \|g_i\|_1$
		$\|u\|_\infty = \sup_t \|u(t)\|$	$\leq \int_0^\infty \|g(t)\|\, dt$

Figura: Resumo de ganhos induzidos de sistemas [Zhou & Doyle].

Tópicos

Normas de Sistemas

Estabilidade de sistemas

Estabilidade $\mathcal{L}_2$

Um sistema $H(j\omega)$ é estável se

$$w \in \mathcal{L}_2[0,\infty) \implies z = Hw \in \mathcal{L}_2[0,\infty) \qquad \text{domínio do tempo}$$

ou $H(s)$ é tal que

$$w \in \mathcal{L}_2 \implies z = Hw \in \mathcal{L}_2 \qquad \text{domínio da frequência}$$

Condição suficiente

$$\sup_w \sigma_{\max}(H(j\omega)) < \infty \iff H(j\omega) \text{ não tem pólos no eixo imaginário}$$

Espaço Lebesgue $\mathcal{L}_\infty$

$$\mathcal{L}_\infty \triangleq \{H : ||H||_\infty \triangleq \sup_w \sigma_{\max}(H(j\omega)) < \infty\}$$

em que $||H||_\infty$ é a norma $\mathcal{L}_\infty$

Normas de Sistemas

Estabilidade de sistemas

$$||Hw||_2 \leq ||H||_\infty ||w||_2, \ \forall w \in \mathcal{L}_2,$$

ou seja, $H \in \mathcal{L}_\infty \implies z = Hw \in \mathcal{L}_2$

- Demostração

$$\begin{aligned}
||Hw||_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (H(j\omega)w(j\omega))^*(H(j\omega)w(j\omega))d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ||H(j\omega)w(j\omega)||^2 d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\max}(H(j\omega))^2 ||w(j\omega)||^2 d\omega \\
&\leq \sup_w \sigma_{\max}(H(j\omega))^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ||w(j\omega)||^2 d\omega \\
&\leq ||H||_\infty^2 ||w||_2^2
\end{aligned}$$

Assim, para $w \in \mathcal{L}_2$, $||Hw||_2^2 < \infty \Leftrightarrow H \in \mathcal{L}_\infty$

Normas de Sistemas

Estabilidade de sistemas

Estabilidade $\mathcal{H}_2$

Uma função de transferência $H(s)$ é estável se

$$w \in \mathcal{H}_2 \implies z = Hw \in \mathcal{H}_2 \qquad \text{domínio da frequência}$$

pois $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ é isomorfo a $\mathcal{H}_2$

Condição necesária

Como $z \in \mathcal{H}_2$ requer z analítica no semi-plano direito aberto é necessário H analítica no semi-plano direito aberto (pólos de H no semi-plano esquerdo para H racional – estabilidade interna)

Condição suficiente

$$\sup_{\alpha>0} \sup_{w} \sigma_{\max}(H(\alpha + j\omega)) < \infty$$

Normas de Sistemas

Estabilidade de sistemas

Espaço Hardy $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{H}_\infty \triangleq \{H : \; H \text{ analítica em } \mathbb{R}(s) > 0; ||H||_\infty \triangleq \sup_{\alpha>0} \sup_{w} \sigma_{\max}(H(\alpha + j\omega)) < \infty\}$$

$\rightsquigarrow$ Portanto, H é estável $\Leftrightarrow$ $H \in \mathcal{H}_\infty$

- Tem-se $||H_f||_\infty = ||H||_\infty$ $(\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{L}_\infty)$ e, portanto,

$$||H||_\infty = \sup_{w} \sigma_{\max}(H(j\omega))$$

- Observe que $|| \cdot ||_\infty$ denota as normas $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{L}_\infty$

Tópicos

Propriedades de ganhos

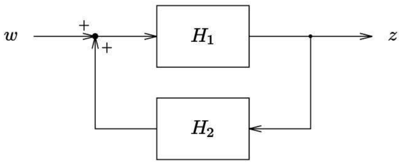
Associação em Cascata

Conexão em cascata

$$||H_2 H_1|| \leq ||H_2|| \cdot ||H_1||$$

Propriedades de ganhos

Associação em Realimentação



Conexão em *Feedback*

Função de transferência de w para z

$$G = (I - H_1 H_2)^{-1} H_1 = H_1 (I - H_2 H_1)^{-1}$$

assumindo $\det(I - H_1 H_2) \neq 0$ (realimentação *bem posta*)

Condição de ganho pequeno (*small gain condition*)

$$||H_1||_\infty \cdot ||H_2||_\infty < 1 \implies ||G||_\infty \leq \frac{||H_1||_\infty}{1 - ||H_1||_\infty \cdot ||H_2||_\infty} \quad \text{e } G \text{ bem posta}$$

Teorema do pequeno ganho (*small gain theorem*)

$$||H_1||_\infty \cdot ||H_2||_\infty < 1 \implies G \;\; \text{é} \;\; \mathcal{L}_2 - \text{estável}$$

⇝ Também poderiam ser obtidos para outras normas induzidas

Bibliografia

Referências

- M. Green and D. J.N. Limebeer. Linear Robust Control. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- Stephen Boyd and Craig Barratt. Linear Controller Design: Limits of Performance. Prentice-Hall, 1991.
- Geir E. Dullerud and Fernando Paganini. A Course in Robust Control Theory - A Convex Approach. Springer, 2010.
- K. Zhou and J. C. Doyle. Essentials of Robust Control. Prentice Hall, New York, 1998.