

# 327069 – Controle de Sistemas Dinâmicos via LMIs

Observadores de Estado e Filtragem

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de  
Automação (PGEA)  
Universidade de Brasília

1º Semestre 2018

# Introdução - Filtros e Observadores

- Nem sempre os estados estão disponíveis para realimentação
- Estimação dos estados através de filtros dinâmicos

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u(t) + K_f y(t)$$

- Solução para o caso de sistemas LTI sem incertezas:

## Observador de Luenberger (1966): caso determinístico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- $K_f$  (ganho do observador)  $\rightsquigarrow$  dinâmica do erro converge para zero

## Filtro de Kalman (1960) e Kalman-Bucy (1961): caso estocástico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

- $K_f$  (ganho de Kalman)  $\rightsquigarrow$  minimiza a variância do erro de estimação

# Observador de ordem completa

- Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ .

- Suponha  $\text{posto}(C) = n_y$  (não há redundâncias nas variáveis medidas)

## Objetivo

Obter estimativa  $x_f(t)$  de  $x(t)$  através de um filtro dinâmico.

Considere um filtro de ordem completa ( $n_f = n$ )

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u(t) + K_f y(t), \quad x_f \in \mathbb{R}^{n_f}.\tag{2}$$

As matrizes  $A_f$ ,  $B_f$  e  $K_f$  devem ser determinadas tais que as seguintes condições sejam atendidas (observador de Luenberger):

- $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_f(t)) = 0$
- A dinâmica de  $e(t) = x(t) - x_f(t)$  deve depender apenas da condição inicial  $e(0) = x(0) - x_f(0)$ , ou seja, não depende de  $u(t)$  e  $y(t)$

# Observador de ordem completa

- Variável estimada:  $x_f(t)$
- Erro de estimação:  $e(t) = x(t) - x_f(t)$
- Dinâmica do erro de estimação:

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_f \\
 &= Ax + Bu - (A_f x_f + B_f u + K_f y) \\
 &= (A - K_f C)x + (B - B_f)u - A_f x_f \\
 &= (A - K_f C)(e + x_f) + (B - B_f)u - A_f x_f \\
 &= (A - K_f C)e + (B - B_f)u - (A - K_f C - A_f)x_f
 \end{aligned}$$

Para atender (ii),

$$A_f = A - K_f C, \quad B_f = B$$

que resulta em

$$\dot{e} = (A - K_f C)e, \quad (A - K_f C) \text{ estável} \rightsquigarrow \text{condição (i)}$$

## Observador de Luenberger de ordem completa

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_f &= (A - K_f C)x_f + Bu + K_f y \\
 \dot{x}_f &= Ax_f + Bu + K_f (y - Cx_f)
 \end{aligned} \tag{3}$$

# Observador de ordem completa

## Projeto do ganho do observador

- Projeto de  $K_f$  tal que  $A - K_f C$  estável (autovalores no semiplano esquerdo)
- Problema dual ao projeto de realimentação de estados ( $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow C'$  e  $K \rightarrow K_f'$ )

### Definição 1 (Detectabilidade)

O sistema linear invariante (1) é **detectável** se os modos não observáveis (quando existirem) são estáveis.

### Teorema 1

O sistema (1) é detectável se e somente se existem matrizes  $S = S' > 0$  e  $Y$  tais que

$$A'S + SA + C'Y' + YC < 0$$

E ainda, o ganho do observador (3) que torna a dinâmica do erro de estimação exponencialmente estável é dado por  $K_f = -S^{-1}Y$ .

# Observador de ordem reduzida

- Alguns estados são medidos ( $y(t)$ ) e outros não ( $w(t)$ )
- Mudança de variável

$$z(t) = Tx(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$$

em que  $R$  é arbitrariamente escolhida tal que  $\exists T^{-1}$  e  $w(t) = Rx(t)$  é a parte do vetor de estados a ser estimado.

- Transformação de similaridade

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}z(t), \end{aligned}$$

em que

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = [I \quad 0]$$

# Observador de ordem reduzida

- Dinâmica das variáveis que deseja-se estimar

$$\dot{w}(t) = A_{22}w(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t)$$

- Representação genérica do filtro

$$\dot{\xi}(t) = A_f\xi(t) + E_fu(t) + B_fy(t)$$

$$w_f(t) = C_f\xi(t) + F_fu(t) + G_fy(t)$$

- Para garantir as condições (observador de Luenberger):

(i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - w_f(t)) = 0$

(ii) A dinâmica de  $e(t) = w(t) - w_f(t)$  depende apenas de  $e(0)$

escolhe-se  $F_f = 0$  e  $C_f = I$  e as demais matrizes do filtro devem satisfazer

$$A_f = A_{22} - G_f A_{12}, \quad E_f = B_2 - G_f B_1, \quad B_f = A_{21} - G_f A_{11} + A_f G_f$$

# Observador de ordem reduzida

- Observador de ordem mínima

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= A_f \xi + (B_2 - G_f B_1)u + (A_{21} - G_f A_{11} + A_f G_f)y \\ w_f &= \xi + G_f y \end{cases}$$

que fornece uma estimativa  $w_f$  e cuja dinâmica de erro de estimação  $e(t) = w(t) - w_f(t)$  é dada por

$$\dot{e} = (A_{22} - G_f A_{12})e$$

- $G_f$  é projetado tal que  $A_{22} - G_f A_{12}$  é estável
- Estimativa de  $x_f$  por meio dos estados medidos ( $y$ ) e observados ( $w_f$ )

$$x_f = T^{-1} \begin{bmatrix} y \\ w_f \end{bmatrix}$$

- Obs.: O projeto de filtros de ordem completa e reduzida será visto com mais detalhes na aula de Filtragem.



# Controle baseado em observador

- Deseja-se projetar um ganho  $K_f$  para o observador de estados e um ganho  $K$  de realimentação de estado estimado  $x_f$ ,  $u = -Kx_f$

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, & y &= Cx \\ \dot{x}_f &= Ax_f + Bu + K_f(y - Cx_f), \\ u &= -Kx_f \end{cases}$$

- Adotando  $e = x - x_f$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- Autovalores de  $\tilde{A} \rightsquigarrow$  raízes da equação característica

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - (A - BK)) \det(sI - (A - K_f C)) = 0$$

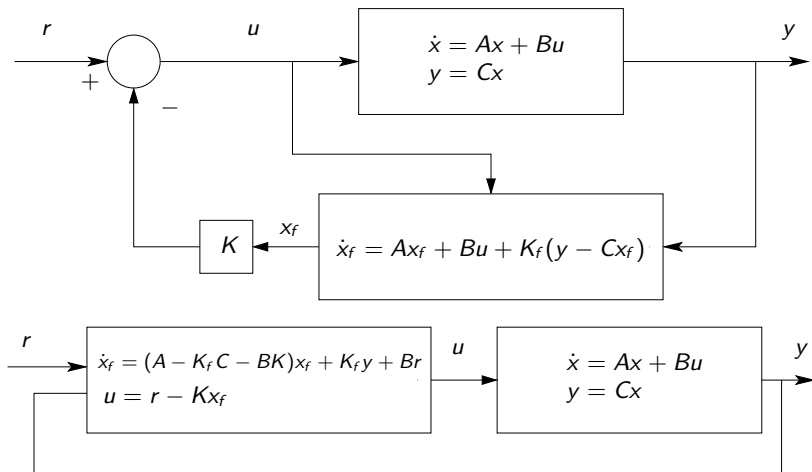
## Princípio da Separação

Obtenção do ganho de realimentação de estados e do estimador são independentes.

$\rightsquigarrow$  Escolher pólos de  $(A - K_f C)$  de 2 a 6 vezes mais rápidos que os de  $(A - BK)$ .

# Controle baseado em observador

## Sistema em malha fechada



**Figura:** Representações equivalentes do sistema em malha fechada do controle baseado em observador de estados.

# Controle baseado em observador

## Sistema em malha fechada

- Sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- Pode ser visto como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad u = [-K \quad K] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- Observe que, se o sistema é dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

o observador é dado por

$$\dot{x}_f = Ax_f + Bu + K_f(y - y_f)$$

$$y_f = Cx_f + Du$$

# Controle baseado em observador - caso robusto

- Considere o sistema incerto politópico, e filtro e controlador robustos

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u \\ y = C(\alpha)x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_f = A_f x_f + B_f u + K_f(y - C_f x_f) \\ u = -K x_f \end{cases} \quad (4)$$

- O sistema em malha fechada com  $e = x - x_f$  é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) - B(\alpha)K & B(\alpha)K \\ \Delta A(\alpha) - K_f \Delta C(\alpha) - \Delta B(\alpha)K & A_f - K_f C_f + \Delta B(\alpha)K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

em que  $\Delta A(\alpha) = A(\alpha) - A_f$ ,  $\Delta B(\alpha) = B(\alpha) - B_f$  e  $\Delta C(\alpha) = C(\alpha) - C_f$ .

- Considere  $A(\alpha) \mapsto A + \Delta A$ ,  $B(\alpha) \mapsto B + \Delta B$ ,  $C(\alpha) \mapsto C + \Delta C$ , com  $\Delta(\cdot)$  limitado em norma, e  $A_f \mapsto A$ ,  $B_f \mapsto B$ ,  $C_f \mapsto C$ . Então,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK + (\Delta A - \Delta BK) & BK + \Delta BK \\ \Delta A - K_f \Delta C - \Delta BK & A - K_f C + \Delta BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\Rightarrow$  Princípio da separação deixa de ser válido!

- Necessário projetar  $K_f$  e  $K$  simultaneamente. Há resultados para o caso  $\Delta B = 0$  [KZBB13], o caso  $\Delta B \neq 0$  é não trivial (ver estratégia em [ARHF17]). Para o caso LPV sujeito a leitura imprecisa dos parâmetros ver [HDM10].

# Controle baseado em observador - caso robusto

- Considere o sistema incerto

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + M_1 F_1(t) N_1)x + Bu \\ y = (C + M_2 F_2(t) N_2)x \end{cases} \quad \begin{array}{l} (A, B) \text{ estabilizável e } (A, C) \text{ detectável} \\ F_i(t)' F_i(t) \leq I, \quad i = 1, 2 \end{array} \quad (6)$$

- Controlador baseado em observador proposto

$$\dot{x}_f = Ax_f + Bu + L(y - Cx_f), \quad u = -Kx_f \quad (7)$$

## Teorema 2 ([KZBB13])

O sistema (6) é assintoticamente estável por (7) se, para um dado  $\epsilon_4 > 0$ , existirem matrizes  $Z = Z' > 0$ ,  $R = R' > 0$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{L}$ , escalares  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\epsilon_2 > 0$  e  $\epsilon_3 > 0$  tais que seja factível a LMI

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(Z, \hat{K}, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) & 0 \\ 0 & A^T R - C^T \hat{L} + RA - \hat{L}^T C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{K} \hat{B}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z N_1^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R M_1 & \hat{L}^T M_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{K} \hat{B}^T & 0 \\ 0 & I \\ N_1 Z & 0 \\ 0 & M_1^T \hat{R} \\ 0 & M_2^T \hat{L} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{\epsilon_4} Z & 0 \\ \epsilon_4 & -\epsilon_4 Z \\ 0 & -\epsilon_1 I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\epsilon_1 I & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 I \\ 0 & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0$$

$$\mathbb{P}(Z, \hat{K}, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = Z A^T - \hat{K} \hat{B}^T + AZ - B \hat{K}^T + \epsilon_1 M_1 M_1^T + \epsilon_2 N_1^T N_1 + \epsilon_3 N_2^T N_2$$

então  $K = \hat{K}' Z^{-1}$  e  $L = R^{-1} \hat{L}'$ .

# Controle baseado em observador - efeito de ruídos e distúrbios

- Considere o sistema sujeito a ruído de medida e distúrbios externos e a lei de controle baseada em observador

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = Cx + v \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_f = (A - K_f C)x_f + B_u u + K_f y \\ u = -Kx_f \end{cases} \quad (8)$$

$v$  é o vetor de ruído de medida e  $w$  o vetor de distúrbios externos.

- O sistema em malha fechada tem a seguinte representação

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w w \\ B_w w - K_f v \end{bmatrix}, \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + v$$

- Observe que a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = (A - K_f C)e + B_w w - K_f v$$

↪ Aumento de  $K_f$  ↪ melhor da taxa de convergência do erro mas amplifica ruído  $v$ ;

↪ Observadores com ganhos elevados devem ser evitados na prática e podem causar saturação do sinal de controle  $u = -Kx_f = -K(x - e)$ ;

↪ Distúrbio externo  $w$  ↪ pode causar erro de estimação em regime permanente; se disponível para leitura pode ser incorporado ao observador.

# Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas estocásticos

## Variáveis estocásticas

- Processo estocástico  $\rightsquigarrow$  variáveis no tempo (sinais) estocásticos,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$
- Estatísticas de uma variável estocástica são definidas a partir da *função densidade de probabilidade* (FDP)  $\rightsquigarrow$  probabilidade da variável se encontrar em um certo intervalo num dado instante
- Estatísticas de 1ª ordem (um instante de tempo):  $\mu(t) = \mathcal{E}\{x(t)\}$  (**média**),  $\sigma^2(t) = \mathcal{E}\{(x - \mu)^2\} = \mathcal{E}\{x(t)'x(t)\} - \mathcal{E}\{x(t)\}'\mathcal{E}\{x(t)\}$  (**variância**),  $\mathcal{E}\{x(t)'x(t)\}$  (**média quadrática**); se  $\mathcal{E}\{x(t)\} = 0$  (média nula)  $\rightsquigarrow$   $\mathcal{E}\{x(t)'x(t)\}$  é a variância
- Estatísticas de 2ª ordem (dois instantes de tempo):  $R(t, \tau) = \mathcal{E}\{x(t)x(\tau)'\}$  (**matriz de correlação** (simétrica))
- Elementos da diagonal principal de  $R(t, \tau)$ ,  $\mathcal{E}\{x_i(t)x_i(\tau)\}$ , são as funções autocorrelação e os demais,  $\mathcal{E}\{x_i(t)x_j(\tau)\}$ , correlação cruzada
- **Matriz de covariância**:  $R(t, t) > 0$  ( $\geq 0$ ). Se  $x(t)$  possui média nula,

$$\mathcal{E}\{x(t)'x(t)\} = \mathcal{E}\{\mathbf{Tr}(x(t)x(t)')\} = \mathbf{Tr}(\mathcal{E}\{x(t)x(t)'\}) = \mathbf{Tr}(R(t, t))$$

# Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas estocásticos

## Variáveis estocásticas

- Um variável estocástica  $w(t)$  é chamada de **ruído branco** se possui **média nula** e se sua matriz de correlação for dada por

$$R(\tau) = \mathcal{E}\{w(t)w(t+\tau)'\} = W\delta(\tau)$$

em que  $W > 0$  ( $W \geq 0$ ) e  $\delta(\tau)$  é o impulso unitário<sup>1</sup>

- Variância da saída  $z(t)$  de um sistema linear invariante estável à um ruído branco com **covariância unitária** ( $W = I$ ),

$$\mathcal{E}\{z(t)'z(t)\} = \mathcal{E}\{\mathbf{Tr}(z(t)z(t)')\} = \int_0^\infty \mathbf{Tr}(h(\tau)h(\tau)')d\tau = \|h(t)\|_2^2,$$

em que  $\mathcal{E}\{z(t)\} = 0$  e

$$z(t) = \int_{-\infty}^\infty h(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

---

<sup>1</sup>Ruído branco é um sinal não correlacionado no tempo. A transformada de Fourier de  $R(\tau)$  é  $S_w(j\omega) = W$ , também conhecido como espectro de potência do sinal pois seu módulo indica a potência do sinal numa dada frequência.



# Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas estocásticos

## Norma $\mathcal{H}_2$ e variância de processos estocásticos

- Norma  $\mathcal{H}_2$

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H(j\omega)H^*(j\omega))d\omega$$

- Assuma que entrada externa é um ruído Gaussiano com densidade espectral  $S_w(j\omega)$ ,

$$\mathcal{E}\{w'w\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(S_w(j\omega))d\omega$$

- Seja o processo  $z(s) = H(s)w(s)$ , então  $S_z(j\omega) = H(j\omega)S_w(j\omega)H^*(j\omega)$  e a variância (potência) do sinal de saída é

$$\mathcal{E}\{z'z\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H(j\omega)S_w(j\omega)H^*(j\omega))d\omega \leq \|S_w\|_{\infty} \|H\|_2^2$$

Se  $S_w(j\omega) = I$  ( $\mathcal{E}\{ww'\} = I\delta$ ), então

$$\mathcal{E}\{z'z\} = \|H\|_2^2$$

# Filtro de Kalman-Bucy

- Considere os sistema estocástico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + v\end{aligned}\quad (9)$$

$v$  e  $w$  são processo de ruído branco com média nula e variâncias

$$\mathcal{E}\{vv'\} = V\delta(t); \quad \mathcal{E}\{ww'\} = W\delta(t); \quad \mathcal{E}\{vw'\} = 0; \quad \text{e} \quad P_0 = \mathcal{E}\{x_0 x_0'\};$$

**Problema:** Encontrar um estimador de estados que minimiza a variância do erro de estimação.

## Teorema 3 (Kalman-Bucy, 1961)

*O estimador ótimo tem a forma do observador linear*

$$\dot{x}_f = Ax_f + B_u u + K_f(y - Cx_f) \quad (10)$$

em que  $K_f(t) = P(t)C'V^{-1}$  e  $P(t) = \mathcal{E}\{ee'\}$ ,  $e = x - x_f$ , satisfaz

$$\dot{P} = AP + PA' - PC'V^{-1}CP + B_w WB_w', \quad P(0) = P_0 \quad (11)$$

- $K_f$  é escolhido tal que  $\dot{P}$  decresce ao máximo
- Filtro recursivo: a cada instante resolve-se (11)
- Em regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ) (11) torna-se uma ARE ( $K_f(t) \rightarrow K_f$ )

## Filtro $\mathcal{H}_2$ de variância mínima

• Reescrevendo o sistema (9) de forma mais geral em que deseja-se estimar  $z$  e considerando ruídos com covariância unitária  $\hat{w}$  e  $\hat{v}$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = Cx + D_w v \\ z = C_z x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + \tilde{B}_w \tilde{w} \\ y = Cx + \tilde{D}_w \tilde{w} \\ z = C_z x \end{cases} \quad (12)$$

$\tilde{B}_w = [B_w W^{1/2} \ 0]$ ,  $\tilde{D}_w = [0 \ D_w V^{1/2}]$ ,  $\tilde{w}' = [\hat{w} \ \hat{v}]'$ ,  $\hat{w} = W^{-1/2} w$  e  $\hat{v} = V^{-1/2} v$

• Considerando o estimador

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= Ax_f + B_u u + K_f(y - Cx_f) \\ z_f &= C_z x_f \end{aligned} \quad (13)$$

a dinâmica  $x_e = x - x_f$  é dada por  $\dot{x}_e = Ax + \tilde{B}_w \tilde{w} - Ax_f - K_f(Cx + \tilde{D}_w \tilde{w} - Cx_f)$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = (A - K_f C)x_e + (\tilde{B}_w - K_f \tilde{D}_w) \tilde{w} \\ e = C_z x_e \end{cases} \quad \text{em que } e = z - z_f \text{ (erro de estimação)}$$

## Filtro $\mathcal{H}_2$ de variância mínima

- **Objetivo:** Minimização de  $J = \mathcal{E}\{e'e\}$ ,  $e = z - z_f$
- Projeto de filtro ótimo

$$\min \mathcal{E}\{e'e\} = \|H_{\tilde{w}e}(s)\|_2^2 < \text{Tr}((\tilde{B}_w - K_f \tilde{D}_w)' P (\tilde{B}_w - K_f \tilde{D}_w))$$

em que  $P > 0$  e  $K_f$  são soluções de

$$(A - K_f C)' P + P(A - K_f C) + C_z' C_z < 0$$

### Problema LMI

Considere o sistema (12) com o par  $(A, C)$  detectável. Se existirem matrizes  $P = P' > 0$ ,  $X$  e  $Z$  tais que as LMIs

$$\min \text{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & \tilde{B}_w' P - \tilde{D}_w' Z' \\ P \tilde{B}_w - Z \tilde{D}_w & P \end{bmatrix} > 0$$

$$A' P + P A - C' Z' - Z C + C_z' C_z < 0$$

sejam satisfeitas, então  $K_f = P^{-1} Z$  garante erro de estimação exponencialmente estável e cuja variância de estimação  $\rho = \text{Tr}(X)$  é minimizada.

- Covariâncias dos ruídos  $\rightsquigarrow$  parâmetros de projeto (problema dual ao LQR)

# Filtro de variância mínima para ruídos não brancos (coloridos)

- Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$y = Cx + v$$

- Ruído de processo  $w$  não-branco:**

↪ Considerar uma realização de espaço de estado do filtro ( $A_w$  estável) com entrada  $w_e$  (branco, cov. unitária) e saída  $w$  (não-branco)

$$\dot{x}_w = A_w x_w + B_w W^{1/2} w_e$$

$$w = C_w x_w$$

↪ incorporar a dinâmica num sistema aumentado com vetor de estados

$x'_a = [x \ x_w]'$ , entrada  $w_e$  e saída  $y = [C \ 0]x_a + v$

- Ruído de medição  $v$  não-branco:**

↪ Considerar uma realização de filtro ( $A_v$  estável) com entrada  $v_e$  (branco, cov. unitária) e saída  $v$  (não-branco),  $\dot{v} = A_v v + V^{1/2} v_e$ ;

↪ incorporar a dinâmica num sistema aumentado com vetor de estados

$x'_a = [x \ v]'$ , entrada  $[w' \ v_e]'$  e saída  $y_1 = \dot{y} - A_v y$  (Linear optimal control, H2 and H-inf methods, by Jeffrey B. Burl, Addison Wesley Longman, Inc. Menlo Park, CA, 1999).

# Filtro $\mathcal{H}_\infty$

- Considere o sistema (12), i.e.,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A & B_u & B_w \\ C & 0 & D_w \\ C_z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w \in \mathcal{L}_2 \text{ (energia limitada e estatísticas desconhecidas)}$$

- **Objetivo:** Minimização de  $\|H_{we}(s)\|_\infty$ , sendo  $e = z - z_f$

- O filtro é dado na forma (13)

## Problema LMI

Considere o sistema (12) com o par  $(A, C)$  detectável. Se existirem matrizes  $P = P' > 0$  e  $Z$  tais que as LMIs

$$\begin{bmatrix} A'P + PA - C'Z' - ZC & PB_w - ZD_w & C'_z \\ B'_wP - D'_wZ' & -\gamma I & 0 \\ C_z & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} > 0$$

sejam satisfeitas, então  $K_f = P^{-1}Z$  garante erro de estimação exponencialmente estável e que  $\|H_{we}(s)\|_\infty$  seja menor que  $\gamma$  para todo sinal de perturbação  $w \in \mathcal{L}_2$

# Filtros robustos de sistemas com ruído

Considere o sistema incerto

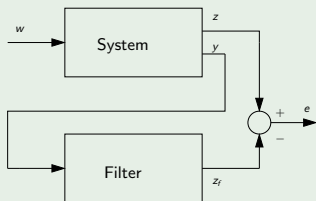
$$\begin{cases} \dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)w \\ z = C_1(\alpha)x + D_{11}(\alpha)w \\ y = C_2(\alpha)x + D_{21}(\alpha)w \end{cases}$$

## Problema

Projetar um filtro robusto linear estável dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_f = A_f x_f + B_f y \\ z_f = C_f x_f + D_f y \end{cases} \quad (14)$$

tal que a dinâmica do erro de estimação  $e = z - z_f$  é assintoticamente estável e a **norma  $\mathcal{H}_2$**  (limitante superior da **variância de  $e$** ) ou a **norma  $\mathcal{H}_\infty$**  da função de transferência  $H_{we}(s)$  seja **minimizada**.



• Observe que (14) é um caso mais geral de (4) quando não há sinal de entrada ( $u = 0$ ), sujeito às entradas exógenas  $w$  e a variável estimada  $z$  é uma combinação dos estados.

# Filtros robustos de sistemas com ruído

## Problema

$$\min \mu \quad \text{s.a.} \quad \sup \mathcal{E}\{e'e\} \leq \mu, \quad e = z - z_f$$

- Considere o sistema incerto e o filtro robusto

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\alpha)x + B_w(\alpha)w, & x(0) = x_0 \\ y = C(\alpha)x + D(\alpha)w \\ z = C_z(\alpha)x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_f = A_f x_f + K_f y \\ z_f = C_f x_f \end{cases}$$

- Sistema aumentado

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a w \\ e = C_a x_a, \end{cases} \quad x_a(0) = 0$$

em que

$$A_a = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ K_f C(\alpha) & A_f \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_w(\alpha) \\ K_f D(\alpha) \end{bmatrix}, \quad C_a = [C_z(\alpha) \quad -C_f] \quad \text{e} \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix}$$

- Assumindo-se  $w$  ruído branco de média nula e variância  $\mathcal{E}\{ww'\} = I\delta$

$\rightsquigarrow$  problema  $\mathcal{H}_2$  para minimização da variância do erro de estimação quando  $t \rightarrow \infty$



# Filtros robustos de sistemas com ruído

## Gramiano de Controlabilidade

$$\begin{cases} \min \operatorname{Tr}(C_a W C_a') \\ A_a W + W A_a' + B_a B_a' < 0, & W > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}\{ee'\} < \operatorname{Tr}(C_a W C_a')$$

## Gramiano de Observabilidade

$$\begin{cases} \min \operatorname{Tr}(B_a' P B_a) \\ A_a' P + P A_a + C_a' C_a < 0, & P > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}\{ee'\} < \operatorname{Tr}(B_a' P B_a)$$

- Condições não convexas: transformação de variáveis  $\rightsquigarrow$  busca de filtros robustos ótimos como um problema de otimização convexa
- Gramiano de Controlabilidade  $\rightsquigarrow$  Souza e Trofino (1993)
- Gramiano de Observabilidade  $\rightsquigarrow$  Geromel e Oliveira (1994)
- Escolhas particulares de variáveis recuperam o ganho ótimo do filtro de Kalman
- Recuperam ganho de Kalman e  $\mathcal{E}\{ee'\}$  ótimo para caso sem incertezas

# Controle baseado em observador (com ruído)

- Deseja-se projetar um ganho  $K_f$  para o observador de estados e um ganho  $K$  de realimentação de estado estimado  $x_f$ ,  $u = Kx_f$

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d, \\ \dot{x}_f &= (A - K_f C)x_f + B_u u + K_f y, \\ u &= Kx_f \end{cases} \quad y = Cx + v$$

- Adotando  $e = x - x_f$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + B_u K & -B_u K \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d d \\ B_d d + K_f v \end{bmatrix}, \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + v$$

- Autovalores de  $\tilde{A} \rightsquigarrow$  **Princípio da Separação**
- Erro de estimação não será nulo ( $\approx$  referência indesejadas)

# Controle baseado em observador (com ruído)

## Sistema em malha fechada

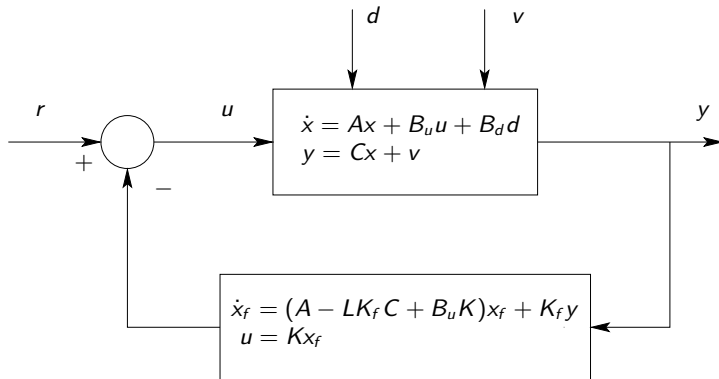


Figura: Representação do sistema em malha fechada do controle baseado em observador de estados.

## Controle baseado em observador (com ruído)

- $K_f$  elevado  $\rightsquigarrow$  acelera convergência de  $e$  mas amplifica ruído de medida ( $K_f v$ )  $\rightsquigarrow$  sinal de controle pode saturar ( $u = K(x - e)$ )
- Observador de ordem completa:  $H_{de}(s)$  e  $H_{ve}(s)$  estritamente próprias  $\rightsquigarrow$  atenuação do ruído em altas frequências de no mínimo 20 dB/década
- Observador de ordem reduzida:  $H_{ve}(s)$  própria  $\rightsquigarrow$  aumento da banda passante do sistema  $\rightsquigarrow$  ampliações de  $v$  em altas frequências  $\rightsquigarrow$  deterioração de desempenho ou instabilidade (aplicação prática limitada)
- Se distúrbio  $d(t)$  é conhecido em tempo real (medição)  $\rightsquigarrow$  pode ser incorporado ao observador como feito com o sinal de rastreamento

# Controle baseado em observador (com ruído)

## Projeto via minimização de norma $\mathcal{H}_2$

• Deseja-se projetar um ganho  $K_f$  para o observador de estados e um ganho  $K$  de realimentação de estado estimado  $x_f$ ,  $u = Kx_f$

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w, & y &= Cx + D_w w, & z &= C_z x \\ \dot{x}_f &= Ax_f + B_u u + K_f(y - Cx_f), & z_f &= C_z x_f \\ u &= Kx_f \end{cases}$$

↪  $z$  é uma variável adicionada de desempenho do sistema + observador

• Adotando  $e = x - x_f$  e  $z_e = z - z_f$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_u K & -B_u K \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w w \\ B_w w - K_f D_w w \end{bmatrix} w, \quad \begin{bmatrix} z \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z & 0 \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

### Procedimento de Projeto:

- 1 Projeto de  $K$  que minimiza norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H_{wz}$  do sist. em MF com  $u = Kx$ :
- 2 Projeto de  $K_f$  que minimiza norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H_{wz_e}$  da dinâmica do erro:

$$H_{wz} = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u K & B_w \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right]$$

$$H_{wz_e} = \left[ \begin{array}{c|c} A - K_f C & B_w - K_f D_w \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right]$$

# Controle baseado em observador (com ruído)

## Projeto via minimização de norma $\mathcal{H}_2$

- Observe que também é possível considerar a variável de desempenho como

$$\begin{aligned} z &= C_z x + D_z u \\ z_f &= C_z x_f + D_z u \end{aligned}$$

- Nesse caso, considerando  $z_e = z - z_f$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} z \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z + D_z K & -D_z K \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

### Procedimento de Projeto:

- Projeto de  $K$  que minimiza norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H_{wz}$  do sist. em MF com  $u = Kx$ :
- Projeto de  $K_f$  que minimiza norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H_{wz_e}$  da dinâmica do erro:

$$H_{wz} = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u K & B_w \\ \hline C_z + D_z K & 0 \end{array} \right]$$

$$H_{wz_e} = \left[ \begin{array}{c|c} A - K_f C & B_w - K_f D_w \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right]$$



Zemouche A., Rajamani R., Kheloufi H., and Bedouhene F.

Robust observer-based stabilization of lipschitz nonlinear uncertain systems via lmis - discussions and new design procedure.

*International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(11):1915–1939, 2017.



W. P. M. H. Heemels, J. Daafouz, and G. Millerioux.

Observer-based control of discrete-time lpv systems with uncertain parameters .

*IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(9):2130–2135, Sept 2010.



Houria Kheloufi, Ali Zemouche, Fazia Bedouhene, and Mohamed Boutayeb.

On LMI conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties.

*Automatica*, 49(12):3700 – 3704, 2013.