327069 – Controle de Sistemas Dinâmicos via LMIs

Resultados Recentes em Realimentação Estática de Saída

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação (PGEA)

Universidade de Brasília – UnB

1^o Semestre 2018

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos: Caso $\mathcal{H}_2$

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2 u + B_1 w \\ z &= Cx + D_2 u \\ y &= C_2 x \end{aligned} \tag{1}$$

e um ganho de realimentação de saída

$$u = Ly$$

que fornece o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 L C_2)x + B_1 w = \bar{A}x + B_1 w \\ z &= (C + D_2 L C_2)x = \bar{C}x \end{aligned}$$

e

$$H(s) = (C + D_2 L C_2)(sI - (A + B_2 L C_2))^{-1} B_1 = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} B_1$$

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos: Caso $\mathcal{H}_2$

Teorema 1 (AOP10, AOP12)

Seja K um dado ganho estabilizante de realimentação de estados. Se existirem matrizes $P = P' > 0$, F, G, J, H, Q e X tais que as LMIs

$$\min_{\mu} \mathbf{Tr}(X) < \mu^2 \tag{2}$$

$$B_1' P B_1 - X < 0 \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B_2'F' + FB_2K & \star & \star & \star \\ P - F' + GA + GB_2K & -G - G' & \star & \star \\ B_2'F' + JC_2 - HK & B_2'G' & -H - H' & \star \\ Q'(C + D_2K) & 0 & Q'D_2 & I - Q - Q' \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

sejam factíveis, então existe um ganho de realimentação de saída $L = H^{-1}J$ que estabiliza o sistema (1) com $||H(s)||_2 < \mu$.

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos: Caso $\mathcal{H}_2$

Demonstração

Multiplicando (4) à esquerda por T e à direita por T', sendo

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & S' & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad S = H^{-1}JC_2 - K$$

e, considerando que se $I - Q - Q' < 0$, então $(I - Q)'(I - Q) > 0$, tem-se que (4) implica em

$$\begin{bmatrix} \bar{A}'F' + F\bar{A} & \star & \star \\ P - F' + G\bar{A} & -G - G' & \star \\ Q'\bar{C} & 0 & -Q'Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

A multiplicação de (5) à esquerda por M e à direita por M', sendo

$$M = \begin{bmatrix} I & \bar{A}' & 0 \\ 0 & 0 & (Q^{-1})' \end{bmatrix}$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} \bar{A}'P + P\bar{A} & \bar{C}' \\ \bar{C} & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos

Teorema 2 (DY13)

Se existir uma matriz simétrica $Q(\alpha) > 0$ e matrizes G, F, um escalar $\tau > 0$, satisfazendo as seguintes desigualdades

$$\begin{bmatrix} He\left(A(\alpha)Q(\alpha) + B_2(\alpha)FTC_2(\alpha)\right) & \star \\ C_2(\alpha)Q(\alpha) - GTC_2(\alpha) + \tau F'B_2(\alpha)' & -\tau G - \tau G' \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

sendo

$$T = \begin{cases} I, & C_{2i}, i = 1, 2, \dots, N \text{ não são posto linha completo} \\ (C_{2i_0}C_{2i_0}')^{-1}, & \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ tq. } C_{2i_0} \text{ é posto linha completo} \end{cases}$$

então o ganho de realimentação de saída

$$L = FG^{-1}$$

estabiliza robustamente o sistema contínuo (1) com $w = 0$ e incertezas politópicas em todas as matrizes.

Obs.: Para uma matriz M, defini-se $He(M) \triangleq M + M'$.

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos

Demonstração.

Defina $\bar{x} = Q(\alpha)^{-1}x$. Pré- e pós-multiplique (7) por $[\bar{x}' \quad \bar{x}'B_2(\alpha)L]$ e seu transposto, substituindo $F = LG$, obtém-se

$$2x'P(\alpha)(A(\alpha) + B_2(\alpha)LC_2(\alpha))x < 0, \qquad P(\alpha) = Q(\alpha)^{-1}$$

o que garante $\dot{V} < 0$, para $V = x'P(\alpha)x$. $\square$

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos: $\mathcal{H}_\infty$

Teorema 3 (DY13)

Para um dado escalar γ, se existir uma matriz simétrica $Q(\alpha) > 0$ e matrizes G, F, um escalar $\tau > 0$, satisfazendo as seguintes desigualdades

$$\begin{bmatrix} He\left(\tilde{A}(\alpha)\tilde{Q}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)FT\tilde{C}_2(\alpha)\right) & \star & \star & \star \\ \tilde{C}_2(\alpha)\tilde{Q}(\alpha) - GT\tilde{C}_2(\alpha) + \tau F'\tilde{B}_2(\alpha)' & -\tau G - \tau G' & \star & \star \\ \tilde{B}_1' & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ \tilde{C}\tilde{Q}(\alpha) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

em que T é definido como anteriormente e

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix}, \; \tilde{B}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} B_2(\alpha) \\ D_2(\alpha) \end{bmatrix}, \; \tilde{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{C}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} C_1(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} Q(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

então o ganho de realimentação de saída $L = FG^{-1}$ estabiliza robustamente o sistema contínuo (1) com incertezas politópicas em todas as matrizes.

Realimentação Estática de Saída de Sistemas Contínuos

Teorema 4 (dOGB02)

Se existir uma matriz simétrica definida positiva W e matrizes

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \end{bmatrix},$$

tais que a seguinte LMI é satisfeita

$$\begin{bmatrix} He\left(\bar{A}G + \bar{B}Z\right) & \star \\ W - G + \mu\left(\bar{A}X + \bar{B}Z\right)' & -\mu(G + G') \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

em que

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \qquad \bar{B} = TB, \qquad \bar{C} = CT^{-1} = [I \quad 0]$$

então $\bar{K} = ZG^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11}G_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ *e*

$$L = Z_{11}G_{11}^{-1}$$

é uma ganho de realimentação estática de saída estabilizante.

Demonstração: ver [dOGB02], [DY07h], [ADB01] e [dOGB99].

Real. Dinâmica como um Problema de Real. Estática de Saída

O objetivo é projetar o controlador dinâmico de saída de ordem $n_c \leq n$ para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + E(\alpha)w(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) = C(\alpha)x(t) + F(\alpha)w(t) + D(\alpha)u(t) \\ \zeta(t) = C_\zeta(\alpha)x(t) + F_\zeta(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{10}$$

Para $n_c < n$, o controlador é denominado ser de ordem reduzida. O controlador é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c(\alpha)x_c(t) + B_c(\alpha)\zeta(t) \\ u(t) = C_c(\alpha)x_c(t) + D_c(\alpha)\zeta(t) \end{cases} \tag{11}$$

em que $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estados do controlador, $A_c(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, $C_c(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ e $D_c(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times p}$

Real. Dinâmica como um Problema de Real. Estática de Saída

Aplicando o controlador (11) ao sistema (10), o sistema em malha fechada pode ser descrito como

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}_{cl}(\alpha)\xi(t) + \tilde{E}_{cl}(\alpha)w(t) \\ y(t) = \tilde{C}_{cl}(\alpha)\xi(t) + \tilde{F}_{cl}(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{12}$$

em que $\xi(t) = [x(t)' \quad x_c(t)']'$ é o estado aumentado e

$$\tilde{A}_{cl}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) + B(\alpha)D_c(\alpha)C_\zeta(\alpha) & B(\alpha)C_c(\alpha) \\ B_c(\alpha)C_\zeta(\alpha) & A_c(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}_{cl}(\alpha) = \begin{bmatrix} E(\alpha) + B(\alpha)D_c(\alpha)F_\zeta(\alpha) \\ B_c(\alpha)F_\zeta(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{cl}(\alpha) = \begin{bmatrix} C(\alpha) + D(\alpha)D_c(\alpha)C_\zeta(\alpha) & D(\alpha)C_c(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}_{cl}(\alpha) = \begin{bmatrix} F(\alpha) + D(\alpha)D_c(\alpha)F_\zeta(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Real. Dinâmica como um Problema de Real. Estática de Saída

Denotando

$$L(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A_c(\alpha) & B_c(\alpha) \\ C_c(\alpha) & D_c(\alpha) \end{bmatrix},$$

as matrizes do controlador podem ser obtidas a partir do seguinte problema de realimentação estática de saída: determinar uma lei de controle de realimentação de saída $\tilde{u}(t) = L(\alpha)\tilde{\zeta}(t)$ com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema aumentado

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}(\alpha)\xi(t) + \tilde{E}(\alpha)w(t) + \tilde{B}(\alpha)\tilde{u}(t) \\ y(t) = \tilde{C}(\alpha)\xi(t) + F(\alpha)w(t) + \tilde{D}(\alpha)\tilde{u}(t) \\ \tilde{\zeta}(t) = \tilde{C}_\zeta(\alpha)\xi(t) + \tilde{F}_\zeta(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{13}$$

com

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}(\alpha) = \begin{bmatrix} E(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & B(\alpha) \\ I_{n_c} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \tilde{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & D(\alpha) \end{bmatrix}, \end{matrix}$$

$$\tilde{C}_\zeta(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C_\zeta(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_\zeta(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_\zeta(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \tilde{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}.$$