

RECONSTRUÇÃO MELHORADA DE DADOS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA USANDO APROXIMAÇÃO DE ORDEM BAIXA BASEADA EM DECOMPOSIÇÃO POR VALORES SINGULARES

Davi Marco Lyra-Leite, João Paulo C. Lustosa da Costa, e João L. A. Carvalho

Grupo de Processamento Digital de Sinais (GPDS)

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília, Brasília–DF, Brasil

E-mail: davi@ieee.org, joaopaulo.dacosta@ene.unb.br, e joaoluiz@pgea.unb.br

Abstract: The reconstruction of magnetic resonance imaging (MRI) data can be a computationally demanding task. Signal-to-noise ratio is also a concern, specially in high-resolution imaging. Data compression may be useful not only for reducing reconstruction complexity and memory requirements, but also for reducing noise, as it is capable of eliminating spurious components. This work proposes the use of SVD-based low-rank approximation for the reconstruction and denoising of MRI data. The Akaike information criterion is used to estimate the appropriate model order. The model order is used to remove noisy components and to reduce the amount of data to be stored and processed. The proposed method is evaluated using *in vivo* MRI data. We present images reconstructed using less than 20% of the original data size and with a similar quality in terms of visual inspection. A quantitative evaluation is also presented.

Palavras-chave: decomposição em valores singulares; aproximação por matriz de baixo posto; ressonância magnética; redução de ruído em imagens médicas.

Introdução

A ressonância magnética nuclear (RMN) de tecidos humanos vivos começou na década de 1970. Por ser uma técnica muito recente, a RMN é uma área muito profícua de pesquisa nos campos de engenharia biomédica e processamento de sinais [1]. O processo geral de aquisição e reconstrução de dados de RMN está ilustrado na Figura 1. A aquisição da imagem pode usar uma ou mais bobinas, diferentes sequências de pulsos e formatos de gradientes, sendo essa uma área de intensa pesquisa e trabalho. Os dados adquiridos correspondem à transformada de Fourier da imagem, $A(k_x, k_y)$, que também são chamados de dados no espaço- k . A imagem é obtida usando algoritmos de reconstrução, que normalmente se baseiam na transformada inversa de Fourier.

A decomposição em valores singulares (*singular value decomposition*, ou SVD) é uma técnica conhecida de compressão de dados [2], bem como de remoção de ruído [3]. Algumas aplicações já foram demonstradas para RMN em reconstrução de dados [4] e remoção de

ruído [3]. Em sistemas de aquisição com vários canais, a SVD pode ser utilizado para compressão dos dados das bobinas, a fim de trabalhar com menos matrizes durante a reconstrução [5]. Aproximações baseadas em redução de ordem a partir de SVD podem ser aplicadas tanto antes do processo de reconstrução das imagens — trabalhando com os dados no espaço- k — como depois da reconstrução — lidando com as imagens e visando reduzir a quantidade de memória necessária para o armazenamento.

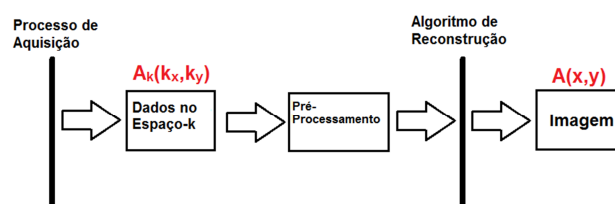


Figura 1: Processo de aquisição e reconstrução de dados de RMN.

Este artigo propõe o uso da seleção de ordem de modelo, bem como da aproximação por matriz de baixo posto, para reconstrução de dados de RMN, baseados no critério de informação de Akaike e decomposição por valores singulares. Usando a seleção de ordem de modelo, é possível calcular o número de componentes necessários para representar os dados de RMN. Então, uma aproximação de valores singulares de baixo posto é utilizada para reconstruir a imagem de RMN, a partir de um número menor de componentes. Com o intuito de validar essa técnica, as reconstruções no domínio da imagem e no espaço- k são avaliadas e comparadas por meio da razão sinal-erro (*signal-to-error ratio*, ou SER) e por inspeção visual. Os resultados aqui apresentados foram originalmente apresentados no *IEEE Workshop on Engineering Applications*, realizado em Bogotá, Colômbia, em maio de 2012 [6].

Formulação Matemática

Nesta seção são apresentados os fundamentos teóricos da reconstrução de imagens de RMN e da decomposição em valores singulares.

Ressonância magnética nuclear – O sinal de ressonância magnética adquirido em um dado instante no tempo t corresponde a uma amostra da transformada de Fourier $A(k_x, k_y)$ da imagem $A(x, y)$, a saber,

$$A(k_x, k_y) = \int_x \int_y A(x, y) e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy, (1)$$

em que as coordenadas de Fourier são dadas por

$$k_x = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G_x(\tau) d\tau, (2)$$

$$k_y = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G_y(\tau) d\tau, (3)$$

onde γ é a razão giromagnética (para os prótons de hidrogênio $\gamma = 42,57$ MHz/T), e $G_x(t)$ e $G_y(t)$ são os gradientes variantes no tempo ao longo dos eixos x e y , respectivamente.

A imagem $A(x, y)$ é reconstruída utilizando-se a transformada inversa bidimensional de Fourier ao longo de k_x e k_y . Os dados no espaço- k são valores digitais e reconstruídos no computador. Assim, a imagem de RMN reconstruída corresponde a uma matriz de dados em escala de cinza, A .

Decomposição em Valores Singulares – Considerando-se o sinal correspondente à imagem, que é usualmente uma matriz de tamanho M por N , é possível obter os seus valores e vetores singulares de acordo com:

$$A = USV^T, (4)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sigma_i u_i v_i^H, (5)$$

em que U é uma matriz M por M , S é uma matriz diagonal M por N e V é uma matriz N por N . Considerando que o posto da matriz A é r e que $M \geq N$, então $r \leq N$. A equação (4) descreve a decomposição de A [7,8].

As colunas de U são chamadas vetores singulares à esquerda, $\{u_k\}$, as linhas de V^T correspondem aos vetores singulares à direita, $\{v_k\}$ e os elementos da matriz S são chamados de valores singulares. Além disso, $s_K > 0$ para $1 \leq K \leq r$, enquanto que $s_i = 0$ para $(r + 1) \leq i \leq N$. Os valores singulares são organizados do maior para o menor. Com essa formulação, os valores singulares que apresentam os menores índices são aqueles que correspondem aos componentes mais importantes do sinal. Portanto, é possível aplicar um algoritmo para descobrir a ordem do modelo que representa esse sinal, possibilitando reduzir o número de componentes das matrizes U , S e V , mas obtendo os dados sem perdas de informação em relação ao conjunto original e, possivelmente, reduzindo o nível de ruído [8].

Modelo Proposto

O modelo proposto visa o uso de esquemas de decomposição baseados nas estatísticas do sinal para a redução dos elementos nas matrizes usadas na

reconstrução e, com isso, diminuir a quantidade de dados a se trabalhar e armazenar.

Na matriz de valores singulares, é possível identificar a ordem do modelo e com isso aplicar um algoritmo que trabalhe apenas com a informação relevante à caracterização do sinal e, dessa forma, propicie redução do nível de ruído. O número de componentes a serem utilizados para reconstrução do sinal foi definido a partir do critério de informação de Akaike (AIC) [9].

Critério de Informação de Akaike – O critério de informação de Akaike é usado para selecionar o número necessário de componentes que descreve um sinal sem perda de informação. Ele é um critério matemático baseado em teoria da informação, em que dentre um determinado conjunto de candidatos de modelos para os dados, o modelo preferencial será aquele que minimize o valor de AIC, dado por:

$$AIC = 2k - 2\ln(L), (6)$$

onde k é o número de parâmetros do modelo estatístico e L é o valor maximizado da função de verossimilhança para o modelo estimado [9,10].

Na análise proposta, o número AIC é calculado de acordo com [11]:

$$AIC = -N \cdot (M - m) \cdot \log\left(\frac{g(m)}{a(m)}\right) + m \cdot (2M - m), (7)$$

em que M e N correspondem ao tamanho da imagem, m é o número de componentes selecionados — logo o valor que deve ser encontrado de forma a minimizar a expressão —, $g(m)$ é a média geométrica dos m menores autovalores dos dados e $a(m)$ é a média aritmética dos m menores autovalores. Note que o quadrado dos valores singulares correspondem aos autovalores utilizados em na equação (7).

Depois de encontrar o valor de m que minimiza a equação (7), é possível encontrar a ordem do modelo a qual fornecerá o número mínimo de componentes que corretamente representam o sinal. Isso possibilita descartar as outras componentes, que passam a ser consideradas ruidosas.

Aplicação da Seleção de Ordem para a aproximação do Sinal por Valores Singulares – Após encontrar a ordem do modelo que descreve o sinal, é possível reduzir as matrizes dos valores singulares e dos vetores singulares, selecionando apenas os elementos que corretamente descrevem o sinal. Para uma matriz A de tamanho M por N , inicialmente descrita na equação (4) — em que $U_{M \times M}$, $S_{M \times N}$ e $V_{N \times N}$ —, então, se a ordem do modelo é dada por D ($1 \leq D \leq \min(M, N)$), é possível utilizar apenas os D valores singulares mais altos e os primeiros D vetores singulares à direita e à esquerda para representar o conjunto original de dados. Assim:

$$A = U_S S_S V_S^D, (8)$$

$$= \sum_{i=1}^D \sigma_i u_i v_i^H, (9)$$

em que U_S e V_S contêm as primeiras D colunas de U e linhas de V^T , respectivamente, e S_S é a matriz diagonal com os D maiores valores singulares. Esse processo é chamado de aproximação por matriz de baixo posto ou truncamento por baixa ordem.

Métodos

Foram avaliadas as reconstruções de dados obtidos a partir da seleção de ordem proposta, para conjuntos no domínio da imagem e da frequência. As imagens obtidas foram comparadas qualitativa e quantitativamente, por meio de inspeção visual e razão sinal-erro, respectivamente.

Os dados de RMN usados neste trabalho foram obtidos de <http://shorty.usc.edu/class/591/fall04/>, sendo a imagem apresentada na Figura 2 o resultado da reconstrução usando todos os componentes das suas matrizes de valores e vetores singulares. Para tanto, é necessário apenas aplicar uma transformada discreta bidimensional de Fourier inversa. Esse resultado foi usado como referência para as análises realizadas.

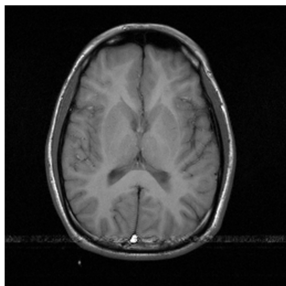


Figura 2: Imagem tomada como referência, obtida pela reconstrução usando todos os componentes da matriz de valores singulares.

Essa imagem corresponde a uma matriz complexa 256×256 que gera matrizes U , S e V de tamanho 256×256 . Com o intuito de verificar a validade do modelo proposto, ruído aleatório Gaussiano é adicionado ao conjunto original de dados que está no domínio da frequência. Cabe ressaltar que estes já são originalmente ruidosos, devido ao processo de aquisição e às heterogeneidades do canal. A seguir, a decomposição em valores singulares é aplicada, no domínio da imagem e no domínio da frequência. A adição de ruído proposta pode ser modelada como:

$$X_k(k_x, k_y) = A_k(k_x, k_y) + n(k_x, k_y), \quad (10)$$

em que $n(k_x, k_y)$ corresponde a ruído Gaussiano aditivo com variância $\sigma_n^2 = 9$.

O número de valores singulares usado para a reconstrução final é escolhido utilizando-se o critério de Akaike e inspeção visual.

Os resultados das reconstruções são analisados (i) sob a ótica qualitativa, em que se verificam visualmente as reconstruções e como elas se comportam com relação à referência (se há novos artefatos, se as principais características da imagem estão presentes, etc.), e (ii) quantitativamente, por meio da SER, calculada como:

$$\text{SER}(\text{dB}) = \frac{\sum_{k_x} \sum_{k_y} |X_k(k_x, k_y)|^2}{\sum_{k_x} \sum_{k_y} |X_k(k_x, k_y) - A_k(k_x, k_y)|^2}. \quad (11)$$

Quanto mais alto o valor da SER, melhor a qualidade da reconstrução.

Resultados

Depois de se aplicar a decomposição em valores singulares no domínio da frequência e da imagem, obtém-se os perfis dos valores singulares. A Figura 3 apresenta o perfil de valores singulares para a análise no domínio da frequência. Os dois perfis são similares, variando apenas no valor de amplitude, devido ao uso de transformada não ortonormal. De acordo com esses perfis, os valores singulares mais importantes são os 50 primeiros. Então, por essa análise simples, é possível verificar que a matriz de valores singulares, inicialmente de tamanho 256×256 , pode ser reduzida para 50×50 , sem perdas significativas de informação. Essa redução significa lidar com menos de um quinto dos dados da matriz S original. Conseqüentemente, U e V também podem ser reduzidas, o que implicará em menos operações matemáticas e um menor uso de memória de armazenamento.

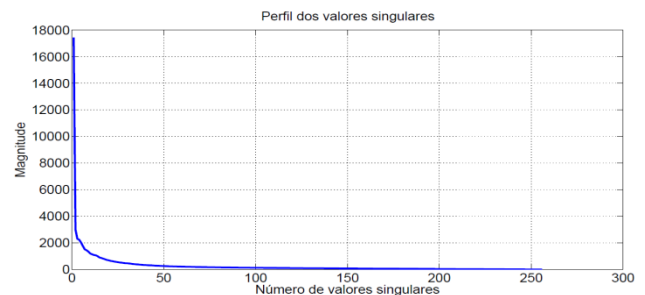


Figura 3: Perfil dos valores singulares para a decomposição no domínio da frequência (espaço- k).

O erro quadrático médio (EQM) em função do número de componentes para SVD no domínio da frequência, é apresentado na Figura 4. Com 50 componentes, o EQM é próximo a -11 dB, o que é um bom limite a ser utilizado nas reconstruções.

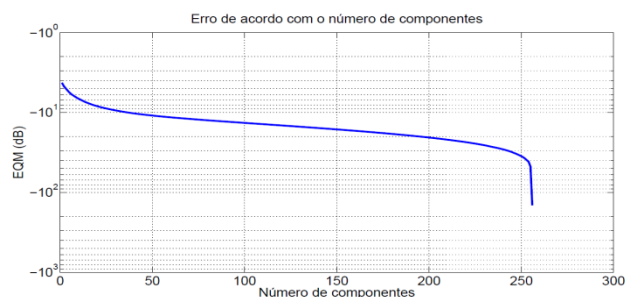


Figura 4: Erro quadrático médio em função do número de componentes, para análise no espaço- k .

Ao se aplicar o critério da seleção de Akaike no domínio da frequência, o critério indica o menor

número de componentes a ser utilizado como sendo 30. Então, as matrizes U , S e V ficam com tamanhos 256×30 , 30×30 e 256×30 , respectivamente. A imagem reconstruída utilizando esses 30 componentes pode ser vista na Figura 5(a), enquanto o erro da reconstrução é apresentado na Figura 5(b). Embora a imagem de erro apresente elementos coerentes com a imagem do cérebro, a SER dessa reconstrução é 18,8 dB, o que é um valor alto e indica que o processo foi realizado corretamente.

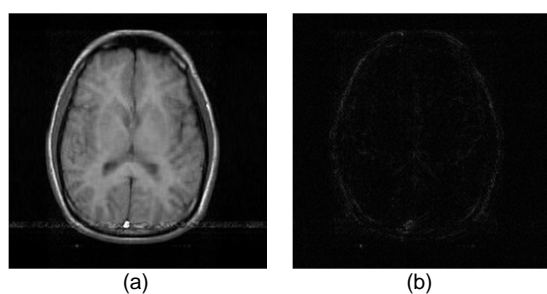


Figura 5: Resultados obtidos utilizando a abordagem AIC/SVD proposta e apenas 30 componentes, para o domínio da frequência: (a) imagem reconstruída; (b) erro residual, com relação à imagem de referência, apresentada na Figura 2.

Aplicando o mesmo processo para os dados no domínio da imagem, o AIC retorna como número suficiente de componentes, o mesmo número obtido na análise anterior: 30. A imagem usando o truncamento com 30 componentes da SVD é apresentada na Figura 6. Como esperado, os dois resultados são bem similares, sendo que a maior diferença entre dois pixels das imagens obtidas em ambas reconstruções é 10^{-14} , o que pode ser considerado erro de quantização. Desse modo, os dois resultados podem ser considerados idênticos.

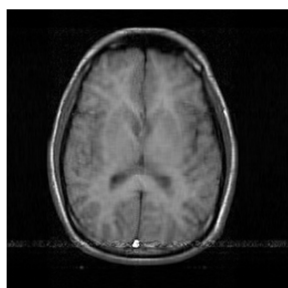


Figura 6: Imagem reconstruída utilizando a abordagem AIC/SVD proposta, para o domínio da imagem.

Na Figura 7, são apresentadas as reconstruções nos dois domínios, utilizando-se apenas 10 componentes. Vê-se que ambos processos apresentam resultados ruins, e o processo de remoção de ruído não é muito eficiente. Nesse caso, dados significativos são interpretados como ruído e são removidos no truncamento. Com isso, a imagem de erro é muito coerente com a imagem original, o que indica que importantes componentes foram descartadas.

Os resultados apresentados na Tabela 1 mostram que o método se comporta quantitativamente bem, visto que, mesmo para pequenos números de componentes, a SER é superior a 10dB. Ao se comparar os resultados do truncamento no domínio da imagem e no espaço- k em termos da razão sinal-erro, pode-se concluir que as duas abordagens são idênticas. Logo, é equivalente implementar o algoritmo no domínio da imagem ou no espaço- k , isto é, antes da reconstrução. Esse é um resultado importante, pois permite que os dados sejam reconstruídos a partir de um conjunto de dados menor, implicando assim em um menor custo computacional, sem diferenças na qualidade da reconstrução.

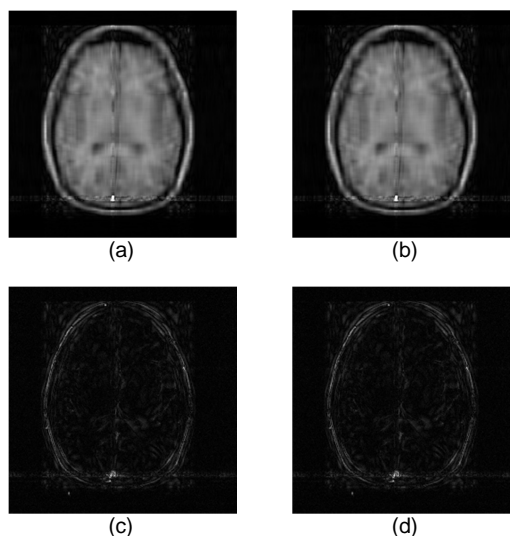


Figura 7: Imagens obtidas utilizando apenas 10 componentes das matrizes da SVD: (a) reconstrução dos dados com o processamento no espaço- k ; (b) reconstrução com o processamento no domínio da imagem; (c) erro entre a reconstrução no espaço- k e a imagem de referência; e (d) erro entre o resultado do processamento no domínio da imagem e a referência.

Tabela 1: Razões sinal-erro (em dB) para reconstruções no domínio da frequência (DF) e domínio da imagem (DI), além do erro quadrático médio para diferentes números de componentes.

Número de componentes	SER _{DF} (dB)	SER _{DI} (dB)	EQM (dB)
10	13,4	13,4	-6,7
31	19,0	19,0	-9,5
55	22,4	22,4	-11,2
79	24,9	24,9	-12,5
88	25,8	25,8	-12,9
97	26,7	26,7	-13,3
109	27,9	27,9	-13,9
118	28,8	28,8	-14,4
124	29,4	29,4	-14,7
130	30,1	30,1	-15,0

Usando o AIC para selecionar o número de componentes (30), a SER é de 18,8 dB, o que é um resultado aceitável. Entretanto, quando o esforço

computacional não é um problema, pode-se aumentar a SER usando-se um número maior de componentes, como, por exemplo, 128 (isto é, 50% dos dados originais). Isso resultaria em matrizes maiores, entretanto a SER subiria para 29,8 dB.

Realizando uma análise qualitativa, é possível identificar o ponto aproximado em que a reconstrução se torna visualmente similar à referência e aquele em que ela começa a representar corretamente a imagem desejada. Na análise realizada nesse experimento, essas imagens correspondem àsquelas reconstruídas com 10 e 28 componentes, respectivamente. Eles estão indicados na Figura 8 pelos pontos vermelho e verde.

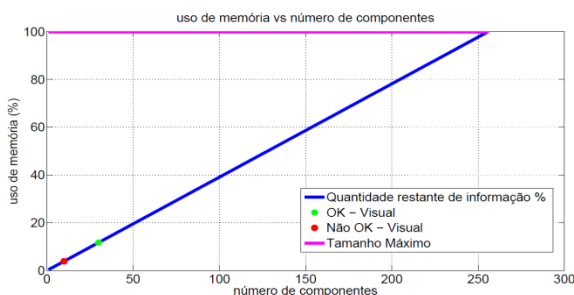


Figura 8: Quantidade de memória de armazenamento para os dados reconstruídos de acordo com o número de componentes utilizados no processo.

Por fim, também se verificou a quantidade de memória requerida para armazenamento dos dados utilizando a reconstrução proposta, visto que essa abordagem é comumente utilizada para compressão de dados. Usando o AIC, o processo de reconstrução usa 11,7% da memória usada para a reconstrução com o conjunto completo de dados. Entretanto, como citado anteriormente, a reconstrução usando a metodologia proposta se mostra similar à imagem de referência, obtida sem descartar componentes. Portanto, além de reduzir as componentes ruidosas, o uso da decomposição por valores singulares e seleção da ordem do modelo reduz a quantidade de memória necessária para o armazenamento, mostrando-se uma abordagem interessante para ser aplicada com dados de RMN em alta-resolução, de múltiplos canais ou de várias dimensões.

Conclusão

Os resultados sugerem que o truncamento baseado nos valores singulares funciona para dados de RMN e pode melhorar a reconstrução ao reduzir o nível de ruído observado e diminuir a demanda computacional do processo. Além disso, menos memória é necessária para realizar os processamentos e o armazenamento dos dados. Os resultados ainda mostraram que é indiferente realizar o processo no domínio da imagem ou no

espaço- k , visto que os resultados apresentados são idênticos tanto para a análise qualitativa como para quantitativa. Desse modo, é viável e recomendado utilizar o processo ainda no espaço- k , isto é, antes da reconstrução, possibilitando assim reduzir o custo computacional deste procedimento.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional para Desenvolvimento Tecnológico e Científico (Edital MCT/CNPq N° 014/2010 - Universal). Lyra-Leite recebeu uma bolsa de iniciação científica ProIC/DPP/UnB do CNPq.

Referências

- [1] Larkman, D. J., Nunes, R. G. (2007) "Parallel magnetic resonance imaging", In: *Physics in Medicine and Biology*, 52:R15-R55.
- [2] Chen, W., Duan, W. (2009) "Computational aspects of mathematical models in image compression", Dissertação de Mestrado, Chalmers University of Technology, Göteborg, Suécia.
- [3] Patel, V., Shi, Y., Thompson, P. H., Toga, A. W. (2011), "MRI reconstruction using SVD in the least square sense", In: *Proceedings of the 8th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2011)*, Chicago, Estados Unidos, 30 Mar. - 02 Apr.
- [4] Yaacoub, F., Abche, A., Karam, E., Hamam, Y. (2008), "MRI reconstruction using SVD in the least square sense", In: *Proceedings of the 21st IEEE International Symposium on Computer-Based Medical Systems*, Jyväskylä, Finlândia, 17-19 Jun.
- [5] Buehrer, M., Pruessmann, K., Boesiger, P., Kozlerke, S. (2007) "Array compression for MRI with large coil arrays", In: *Magnetic Resonance in Medicine*, 57(6): 1131-1139.
- [6] Lyra-Leite, D. M., da Costa, J. P. C. L., Carvalho, J. L. A. (2012), "Improved MRI reconstruction and denoising using SVD-based low-rank approximation", In: *Proceedings of the 2012 IEEE Workshop on Engineering Applications*, Bogotá, 02-04 Maio
- [7] Haykin, S. (1993), *Adaptive Filter Theory*, New Jersey: Prentice-Hall International.
- [8] Wall, M. E., Rechtsteiner, A., Rocha, L. M. (2003) "Singular value decomposition and principal component analysis", In: *A Practical Approach to Microarray Data Analysis* Ed.: D. P. Berrar, W. Dubitzky, M. Granzow, Norwell: Kluwer, p. 91-109.
- [9] Bozdogan, H. (2000) "Akaike's Information Criterion and Recent Developments on Information Complexity", In: *Journal of Mathematical Psychology*, 44: 62-91.
- [10] Burnhamand, K. P., Anderson, D. R. (2004) "Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection", In: *Sociological Methods and Research*, 33: 261-304.
- [11] Wax, M., Kailath, T. (1985) "Detection of signals by information theoretic criterion", In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33: 387-392.