

Representações Esparsas para Dados de Ressonância Magnética de Fluxo

Gabriel Lemes S. L. de Oliveira, João Luiz Azevedo de Carvalho (orientador)

Departamento de Engenharia Elétrica
UnB – Campus Darcy Ribeiro, Asa Norte
Brasília, DF – Brasil

Resumo – O objetivo estabelecido para este trabalho é encontrar um domínio transformado em que dados de uma ressonância magnética cardiovascular de fluxo adquiridos através da técnica *spiral Fourier velocity encoding* (FVE) sejam representados de forma esparsa, viabilizando uma abordagem via *compressed sensing* (CS) para a reconstrução visando reduzir o tempo de aquisição. Diversas transformações foram avaliadas quanto à concentração da energia do sinal em um número reduzido de coeficientes no domínio transformado e algumas das mais promissoras quanto a essa métrica de esparsidade são apresentadas como candidatas a uma representação eficiente para uma reconstrução via CS.

Palavras-chave – ressonância magnética de fluxo; *spiral FVE*; tempo de aquisição; representação esparsa; domínio esparso; esparsidade; *compressed sensing*; reconstrução esparsa; reconstrução não-linear

I. INTRODUÇÃO

Doenças cardiovasculares são responsáveis por uma parcela significativa das internações e óbitos no Brasil. No entanto, em grande parte das ocorrências, se o paciente for diagnosticado a tempo, podem-se determinar tratamentos mais simples, seguros e eficientes para a doença ou mesmo evitar o seu desenvolvimento. A visualização e a quantificação precisas do fluxo cardiovascular trazem informações valiosas para esses diagnósticos, o que justifica o interesse por técnicas não invasivas que permitam a medição do fluxo sanguíneo. A principal dessas técnicas é a ultrassonografia Doppler que, no entanto, se mostra inadequada quando há gordura, ar, osso ou cicatriz cirúrgica no caminho do feixe de ultrassom. Uma alternativa proeminente é a ressonância magnética nuclear (RMN), que oferece a perspectiva de avaliar todos os aspectos das doenças cardiovasculares, mostrando o potencial para um exame cardiovascular completo.

Uma parte importante da avaliação cardiovascular consistirá em exames capazes de medir a velocidade de pico em jatos de fluxo causados por estenose ou regurgitação aórtica. Até o momento, não existem técnicas de RMN capazes de fornecer essas informações com qualidade satisfatória. No entanto, a técnica de RMN denominada *spiral Fourier velocity encoding* (*spiral FVE*) [1], desenvolvida pelo orientador deste trabalho, pode vir a suprir essa necessidade. Essa técnica é capaz de oferecer dados equivalentes àqueles obtidos via ultrassonografia Doppler de onda pulsada em um curto período

de apnéia e oferece informação espacial completa dentro do plano de aquisição, o que permite a medição do fluxo em locais diferentes com uma única aquisição. Atualmente, porém, a técnica ainda necessita de longos tempos de aquisição, o que limita sua aplicabilidade.

O plano de trabalho estabelecido para o autor tem como objetivo encontrar representações esparsas para dados obtidos em exames cardiovasculares com RMN utilizando *spiral FVE*, de forma a possibilitar uma abordagem via *compressed sensing* (CS) para a reconstrução dos dados [2]. Essa abordagem permite que, sob certas circunstâncias, uma imagem seja reconstruída a partir de dados consideravelmente sub-amostrados no domínio da frequência sem degradação qualitativamente perceptível [3], possibilitando reduções drásticas no tempo de aquisição. Resultados promissores para algumas imagens de RMN com amostragem Cartesiana foram obtidos [4], justificando a expectativa por tempos de aquisição reduzidos em RMN com *spiral FVE* e motivando a busca pelo objetivo definido acima.

O estudo consiste na análise de dados de ressonância magnética de fluxo obtidos pelos orientador deste trabalho durante o seu doutorado. Os dados possuem cinco dimensões (três dimensões espaciais mais a velocidade e o tempo) e a idéia inicial era transformar esses dados ao longo de cada dimensão com uma lista de transformadas buscando todas as combinações possíveis e procurar pelas representações que oferecessem a maior esparsidade. No entanto, o número de dimensões resulta num volume muito grande de dados, de forma que essa abordagem não é praticável devido ao tempo consumido em cada transformação. Foi adotada então uma outra abordagem, que aumenta sistematicamente a esparsidade a cada dimensão transformada. Sendo assim, não se pode garantir que as representações encontradas aqui sejam ótimas quanto a esparsidade, no entanto, espera-se que elas possuam as qualidades necessária para habilitar a reconstrução de dados similares utilizando CS.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A ideia por trás da expectativa de se reduzir o tempo de aquisição sem degradar a qualidade da imagem através da redução do número de amostras, o que aparentemente viola o critério de Nyquist, é inspirada no sucesso de técnicas de compressão com perdas. Essas técnicas consistem, a grosso modo, em descartar a parte da informação presente no objeto a

ser comprimido que não contribui para a sua qualidade subjetiva. Questiona-se então sobre a possibilidade de se obter somente a informação relevante logo na aquisição, já que o resto da informação pode ser descartada em seguida sem prejuízo para a qualidade. A teoria de CS fornece uma resposta afirmativa sob certas condições. Felizmente, essas condições são satisfeitas em muitos dos casos de interesse e a teoria já foi aplicada com sucesso na redução de tempos de aquisição em RMN no contexto de algumas técnicas.

A. Compressed Sensing

A teoria, desenvolvida em [2] para o caso geral, trata do problema de encontrar um objeto $x \in \mathbb{R}^m$ (por exemplo, uma imagem com m pixels) dados $n < m$ fragmentos de informação que tomam a forma de combinações lineares dos componentes de x : $y_n = I_n(x) = \mathbf{I}_n x$. Assim, o problema tem a forma de um sistema linear indeterminado que tem, em geral, um número infinito de soluções.

O resultado de interesse aqui da teoria de CS é que é possível determinar x a partir de y_n para n a partir de algum $n_0 < m$ se for conhecida uma base ortonormal em que x tem uma representação esparsa $h = \mathbf{H}x$ e se e o operador I_n for escolhido adequadamente. Talvez até mais importante, a teoria informa que é possível determinar um operador I_n quase-ótimo com facilidade se a transformada \mathbf{H} for conhecida e que nesse caso existe um método de reconstrução quase-ótimo que pode ser abordado via programação linear. O método consiste em resolver o seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \|\mathbf{H}x\|_1 \\ & \text{sujeito a } I_n(x) = y_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Nesse problema, a objetiva é a norma L_1 da representação $h = \mathbf{H}x$ do objeto x no domínio transformado em que a norma L_p é dada por

$$\|h\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |h_i|^p \right)^{1/p}.$$

É importante notar que a restrição força consistência com as n medidas em y_n enquanto a objetiva força uma solução que tenha uma representação esparsa no contra-domínio de \mathbf{H} . Intuitivamente, isso acontece porque norma L_1 favorece soluções com poucos coeficientes de energia mais alta ao invés de soluções com mais coeficientes relativamente menores.

B. Sub-amostragem no Domínio da Frequência

Os dados coletados em RMN são amostras da imagem desejada no domínio da frequência. Tomando como exemplo o caso de uma imagem $s = s(x, y)$, em geral, o que se deseja é uma reconstrução s_a a partir de amostras S_a de $S = S(k_x, k_y)$. Assim, do ponto de vista do sinal, o processo de RMN consiste na escolha de um operador de informação tal que $I_n(s) = S_a$ e sabe-se que, se $n = m$, em que m é o número de pixels em s_a , a imagem pode ser reconstruída com a resolução desejada se I_n tomar m amostras de $S(k_x, k_y)$ igualmente espaçadas e se m for escolhido adequadamente. Nesse caso, o operador I_n efetua simplesmente a transformada discreta de Fourier (DFT) e a reconstrução s_a pode ser obtida diretamente de S_a com a transformada discreta de Fourier inversa (IDFT).

A questão que nos interessa aqui é a seguinte: é possível escolher I_n com $n < m$ de forma que s_a represente s de forma aceitável? Ou seja, é possível estimar s com m pixels em s_a dadas $n < m$ amostras de S em S_a ? Sabemos que, se as n amostras em S_a estiverem igualmente espaçadas no plano k_x, k_y , a reconstrução s_{inc} a partir dos dados espectrais incompletos apresentará o fenômeno de *aliasing*. No entanto, os resultados em [3] mostram que, se as frequências em S_a forem escolhidas aleatoriamente com probabilidade uniforme, s_a pode ser encontrada *exatamente* a partir desses dados incompletos, para a maior parte dos esquemas de amostragem resultantes dessa amostragem aleatória, com probabilidade dominante para m grande, desde que se saiba *a priori* que a imagem é *esparsa* no próprio domínio da imagem. Mais precisamente, se soubermos *a priori* que somente $m_{nz} < m$ dos m pixels da imagem que queremos obter são não-nulos (note que não é necessário saber quais, nem os seus valores), é possível, com probabilidade pelo menos $1 - O(m^{-M})$, obter s_a exatamente a partir das $n < m$ amostras, desde que $n \cdot C_M \geq m_{nz} \cdot \log(m)$, como a solução de um problema de otimização convexa, a saber:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \|s_a\|_1 \\ & \text{sujeito a } I_n(s_a) = S_a. \end{aligned} \quad (2)$$

Aqui, M é um parâmetro controlando a probabilidade de sucesso desejada e C_M determina o n mínimo (valores numéricos para C_M são fornecidos em [3]).

Embora a restrição a imagens esparsas no domínio da própria imagem pareça severo demais para nossos propósitos, deve-se observar a semelhança entre (1) e (2). Nota-se que (2) é um caso particular de (1) com $\mathbf{H} = \mathbf{I}_m$ sendo a identidade $m \times m$ e com I_n assumindo uma forma particular em (2). Além disso, [3] fornece também um resultado semelhante para uma segunda classe de imagens, a saber, aquelas constantes por partes. Nesse caso, sob condições e observações semelhantes, s_a pode ser encontrada como a solução de

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \|s_a\|_{TV} \\ & \text{sujeito a } I_n(s_a) = S_a. \end{aligned} \quad (3)$$

em que

$$\|h(x, y)\|_{TV} = \sum_{x, y} \sqrt{|D_1 h|^2 + |D_2 h|^2}$$

é a norma da variação total e:

$$\begin{aligned} D_1 h(x, y) &= h(x, y) - h(x - 1, y) \\ D_2 h(x, y) &= h(x, y) - h(x, y - 1). \end{aligned}$$

Mais uma vez, nota-se que (3) é um caso particular de (1), agora com $\mathbf{H} = (D_1 + jD_2)$. Não se trata de uma coincidência, já que imagens constantes por partes possuem diferenças finitas esparsas. Em geral, se \mathbf{H} esparsifica s_a e as frequências amostradas por I_n em S_a forem escolhidas aleatoriamente, é verdade, no sentido probabilístico discutido em (2), sob circunstâncias e observações semelhantes, que s_a pode ser recuperado *exatamente* de S_a como a solução de (1) com $y_n = S_a$.

C. Ressonância Magnética com Tempo de Aquisição Reduzido por Compressed Sensing

Conforme os resultados discutidos na subseção anterior, uma imagem pode ser recuperada de dados sub-amostrados na

frequência desde que se saiba *a priori* que a imagem tem uma representação esparsa em algum domínio transformado conhecido, o que nutre a esperança de se reduzir os tempos de aquisição em RMN via sub-amostragem. Resta saber se existe uma tal representação para imagens de RMN. Naturalmente, é improvável que esse tipo de imagem complexa tenha uma representação rigorosamente esparsa com alguma transformada simples. No entanto, como fica evidente no sucesso das diversas técnicas de compressão com perdas, isso não é necessário. Não é necessário que a energia esteja 100% em um número reduzido de coeficientes; basta que esteja fortemente concentrada nestes. Nesse caso, a imagem pode ser *aproximadamente* reconstruída de um número reduzido de coeficientes dado um critério de fidelidade, fazendo os demais coeficientes iguais a zero. Note-se que a reconstrução deixa de ser exata como prometido pela teoria de CS e parte da informação é efetivamente perdida, mas isso pode ser feito sem prejuízo para a qualidade da imagem, como ilustrado pelos padrões de compressão JPEG e JPEG-2000 (embora a *qualidade* seja naturalmente subjetiva, podem-se desenvolver *critérios de fidelidade* que preservem aspectos dessa qualidade num dado contexto). Assim, ao invés de nos perguntarmos se imagens de RMN têm uma representação *rigorosamente* esparsa, nos perguntamos se elas são esparsas num sentido mais brando, a saber, se elas são *compressíveis*, e se, nesse caso, o problema de otimização convexa em (1) encontra a aproximação desejada.

Os resultados encontrados em [4] são promissores e constituem a principal motivação para esta pesquisa. Nesse artigo, os autores fornecem como exemplo resultados impressionantes para dois tipos de imagens obtidas com RMN e traçam uma estratégia quase-ótima para esquemas de amostragem cartesiana. Em particular, nota-se que a escolha aleatória das frequências *não precisa ter probabilidade uniforme*. De fato, resultados melhores foram obtidos com densidades de probabilidade maiores em regiões que tendem a concentrar mais energia no domínio da frequência (se essas regiões forem conhecidas *a priori*). Nota-se também que esquemas de amostragem verdadeiramente aleatórios em todas as dimensões são impraticáveis, por limitações físicas e fisiológicas, e propõe-se um método para criar um esquema de amostragem com as qualidades desejadas que pode ser utilizado para medições futuras (de objetos semelhantes). Por fim, o principal resultado do artigo é que uma aproximação quase-ótima s_a para o objeto desejado pode ser encontrada (num sentido probabilístico semelhante ao da subseção anterior) de dados espectrais incompletos S_a se for conhecido um domínio transformado em que a imagem tenha uma representação *esparsa* (no sentido mais brando definido aqui). Nesse caso, a aproximação s_a será encontrada por (a notação é semelhante à das subseções anteriores):

$$\text{minimizar } \|\mathbf{H}s_a\|_1 \quad (4)$$

$$\text{sujeito a } \|I_n(s_a) - S_a\|_2 < \varepsilon,$$

em que ε é um parâmetro controlando a fidelidade aos dados observados.

III. METODOLOGIA

Como apontado na introdução, o número de dimensões dos dados de ressonância magnética de fluxo resulta num volume de dados que torna impraticável de se testar todas as combinações possíveis de transformadas e dimensões. Além disso, não é possível listar todas as transformadas com potencial para esparsificação dos dados. Sendo assim, a abordagem adotada aqui começa com uma lista parcial de transformadas bem conhecidas e avalia algumas das combinações possíveis quanto à esparsidade. Como isso foi feito exatamente é explicado nas subseções a seguir.

Dados de uma ressonância magnética de fluxo oriundos do doutoramento do orientador foram utilizados como referência. Esses dados, já reconstruídos, foram testados quanto à esparsidade sob diversas transformações. Acredita-se que esses dados são representativos de ressonâncias magnéticas de fluxo similares e que as representações encontradas aqui serão eficientes em esparsificar dados similares, possibilitando sua aquisição e reconstrução numa abordagem *compressed sensing*.

A. Medindo Esparsidade

Cada etapa do método adotado consiste em transformar os dados ao longo de uma das dimensões com diversas transformadas e comparar os resultados quanto à esparsidade. Essa comparação é feita observando quantos coeficientes são necessários no domínio transformado para se obter uma certa fração da energia do sinal.

Para efeito de ilustração, considere um sinal discreto bidimensional $s = s(x,y)$ (uma imagem digital com $N \times M$ pixels, por exemplo). A energia do sinal é dada por

$$E_s = \|s\|_2^2 = \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M |s(x,y)|^2.$$

Para utilizar esse conceito na avaliação da esparsidade desse sinal, primeiramente construímos um vetor $s' = s'(k)$ de dimensão $NM \times 1$ que consiste nos coeficientes de energia de s ordenados em ordem decrescente, ou seja,

$$s'(k) = |s(x_k, y_k)|^2, \quad s'(i) \geq s'(j) \quad \forall j \geq i,$$

de forma que todos os coeficientes de s estão representados por algum k . Em seguida, construímos um vetor $E_s' = E_s'(k)$ com as somas cumulativas de s' e normalizamos por E_s :

$$E_s'(k) = \sum_{j=1}^k s'(j) / E_s.$$

Note que

$$E_s'(NM) = 1 \quad \text{e} \quad E_s'(i) > E_s'(j) \quad \forall i > j$$

desde que $s'(j) > 0$. Se o sinal for esparso, a curva que representa E_s' apresentará um crescimento acentuado de início e se aproximará de 1 rapidamente com k relativamente pequeno. Visto de outra forma, um sinal esparso concentrará uma grande fração da energia (p), em uma fração k/NM relativamente pequena dos seus coeficientes, ou seja, a inequação

$$E_s'(k) \geq p/100 \quad (5)$$

terá uma solução com $k \ll NM$. Ambas as abordagens são utilizadas no método descrito na subseção seguinte. A figura 1 ilustra esses conceitos em duas dimensões. Dessa figura,

Figura 1A - Imagem Original

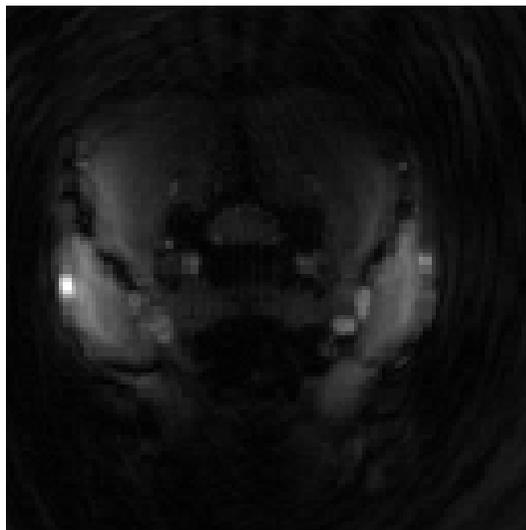


Figura 1B - Wavelets de Haar

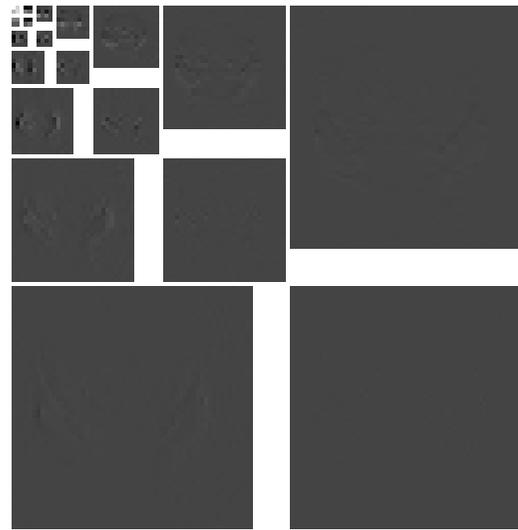
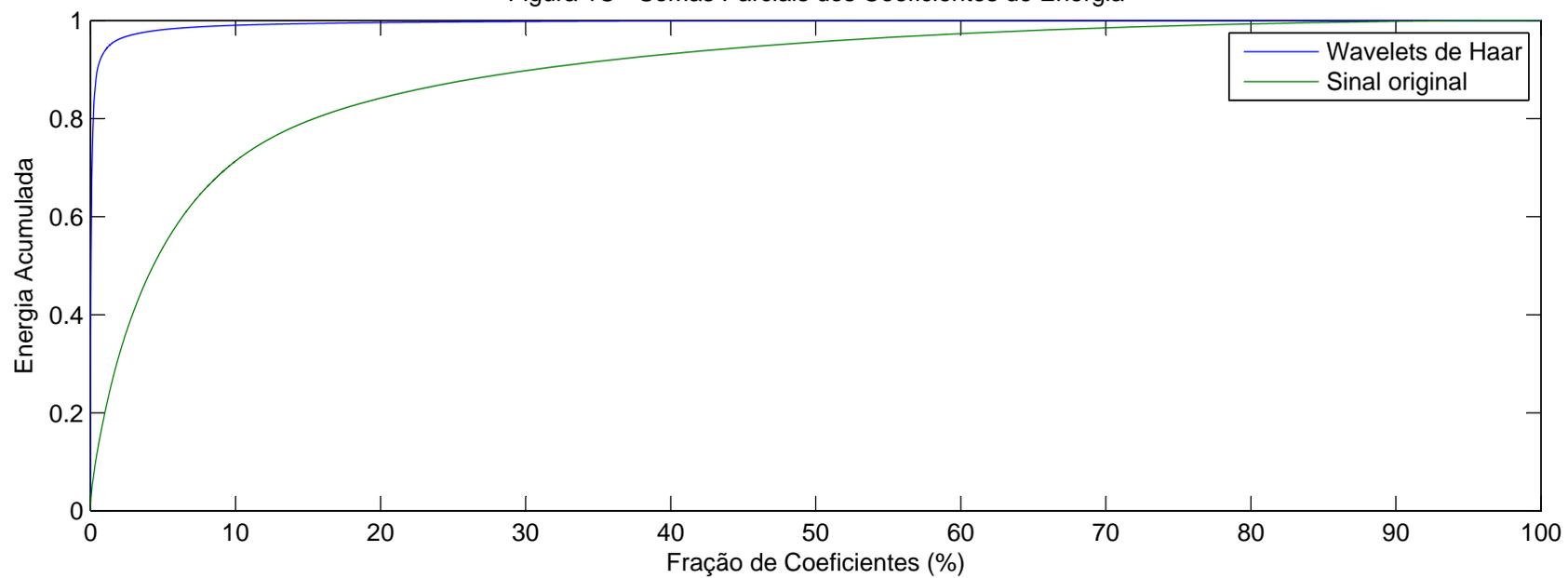


Figura 1C - Somas Parciais dos Coeficientes de Energia



concluímos que as wavelets de Haar fornecem uma representação mais esparsa para essa imagem teste que o próprio domínio da imagem. Note que 99% da energia da imagem transformada está contida em apenas 9.83% dos coeficientes da transformada de Haar, enquanto são necessários 75.83% dos coeficientes da imagem original para essa mesma concentração de energia.

B. Método

Os dados possuem cinco dimensões, a saber, $xyzvt$, de tamanhos $115 \times 115 \times 5 \times 32 \times 43$, respectivamente, num total de 90988000 coeficientes representando níveis de cinza. Para contornar o problema gerado pelo volume de dados, foi adotada uma abordagem que pretende aumentar a esparsidade dos dados sistematicamente a cada etapa.

Primeiramente, foram escolhidas algumas transformadas a serem testadas ao longo de cada dimensão, listadas a seguir:

- Identidade;
- Transformada discreta de Fourier (DFT);
- Transformada discreta de cosseno (DCT);
- Diferenças finitas;
- Wavelets (diversas).

As diversas transformadas wavelets utilizadas diferem entre si em diversos aspectos, mas particularmente importantes são os tamanhos dos filtros de decomposição e de reconstrução. Especificamente, wavelets com filtros mais longos não foram testadas em dimensões com poucos coeficientes onde não se poderiam obter decomposições razoáveis. Por exemplo, *coiflets* foram testadas ao longo das dimensões x e y , com 115 coeficientes de comprimento cada, mas não em z , que tem apenas 5 coeficientes de comprimento.

Em seguida, os dados foram transformados ao longo de uma única dada dimensão (com exceção de x e y , que foram testadas simultaneamente com transformadas bidimensionais) com as diversas transformadas adequadas e testados quanto à esparsidade para cada combinação dimensão-transformada na forma do menor k que satisfaz a inequação (5) para um dado p . A tabela a seguir, para a dimensão z e $p = 95\%$ ilustra um resultado típico dessa etapa.

Teste em z Dados originais $p = 95$	
'Identidade'	5,52990394337715
'DFT'	3,20169692706731
'DCT'	2,83535081549215
'Dif. Finitas'	13,1170242229745
'Haar Wavelets'	2,10442114815768

Dessa tabela, entende-se por exemplo que, para os dados originais transformados em z pelas wavelets de Haar, 95% da energia do sinal transformado encontra-se em 2,10% dos coeficientes resultantes.

Desse primeiro resultado (junto com outros similares para v , t e xy), são eleitas algumas das transformadas mais promissoras para gerar novos conjuntos de dados para serem

testados nas etapas seguintes, ao longo de outras dimensões. Observe nessa tabela o resultado para diferenças finitas ao longo de z . Esse resultado sugere que o sinal transformado é mais denso (menos esparsa) que o original. Resultados como esse não foram testados nas etapas subsequentes, mas, em princípio, é possível que eles levem à esparsidade ótima para essa lista de transformadas. Assim, não podemos garantir que o resultado final será ótimo quanto à esparsidade. No entanto, escolhendo apenas as transformadas mais promissoras a cada dimensão testada, geramos representações sistematicamente mais esparsas a cada passo e contornamos o problema inviável de testar todas as possíveis combinações. Com isso, chegamos a algumas representações satisfatórias, com uma quantidade mais razoável de testes.

C. Implementação e Nota Sobre a Nomenclatura

As rotinas utilizadas na realização dos testes efetuados em cada etapa foram implementadas no ambiente MATLAB de programação. Diversas funções especializadas foram desenvolvidas para gerar os resultados em forma de gráficos e tabelas apresentados no anexo.

As operações com wavelets foram realizadas utilizando diversas funções da *Wavelet Toolbox* para o MATLAB. A nomenclatura utilizada neste relatório para se referir às várias transformadas wavelet utilizadas, como "Daubechies 2" ou "Biorthogonal 3.1", deriva da nomenclatura utilizada nessa *toolbox* para se referir às famílias de wavelets.

IV. RESULTADOS

Seguindo a abordagem delineada na seção anterior, construímos as tabelas 1 a 13, que são apresentadas em anexo, ao final deste relatório. A cada etapa do processo, as transformações mais promissoras foram escolhidas para dar continuidade aos testes. Trechos das respectivas tabelas referentes a essas transformações são repetidas aqui para referência rápida.

Inicialmente, testamos as transformadas escolhidas ao longo de cada dimensão dos dados originais independentemente, com exceção das dimensões x e y que foram testadas em conjunto com transformadas bidimensionais. Essa primeira etapa gerou os resultados listados nas tabelas 1 a 4. Observando esses resultados, escolhemos as transformadas wavelet Daubechies 2 e Biorthogonal 3.1 ao longo das dimensões x e y . Em seguida, dois novos conjuntos de dados foram gerados para a etapa seguinte transformando os dados originais ao longo de x e y com essas wavelets.

Teste em xy Dados originais $p = 99$	
'Daubechies 2'	3,03003816387587
'Biorthogonal 3.1'	0,504998085450856

Para a próxima etapa, cada um dos dois novos conjuntos de dados foi testado ao longo de t , e os resultados estão listados nas tabelas 5 e 6. Com base neles, quatro transformadas foram escolhidas para gerar quatro novas representações conforme os resultados mostrados abaixo.

Teste em t	
Dados transformados em xy: 'bio3.1'	
p = 99	
'Haar Wavelets'	0,197525590299747
'Biorthogonal 3.1'	0,210292606723740

Teste em t	
Dados transformados em xy: 'db2'	
p = 99	
'DCT'	0,354482547414882
'Haar Wavelets'	0,247224685208124

Em seguida, cada uma dessas quatro representações foram testadas ao longo de z para gerar os resultados nas tabelas 7 a 10. Três novas representações foram escolhidas e os respectivos resultados estão destacados abaixo.

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'bior3.1'	
Dados transformados em t: 'haar'	
p = 99	
'Haar Wavelets'	0,138986533107411

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'haar'	
p = 99	
'Haar Wavelets'	0,106854777966330

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'DCT'	
p = 99	
'Haar Wavelets'	0,138001173242978

Por fim, essas representações foram testadas ao longo de v para gerar os resultados finais nas tabelas 11 a 13. Os dois melhores resultados estão destacados abaixo para referência.

Teste em v	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'haar'	
Dados transformados em z: 'haar'	
p = 99	
'Identidade'	0,106854777966330

Teste em v	
Dados transformados em xy: 'bio3.1'	
Dados transformados em t: 'haar'	
Dados transformados em z: 'haar'	
p = 99	
'Biorthogonal 3.1'	0,0788117405920413

Esses foram os dois melhores resultados encontrados seguindo a abordagem proposta. Em princípio, essa abordagem poderia ser estendida e continuada para encontrar representações ainda mais esparsas. No entanto, acreditamos que as representações encontradas são satisfatórias quanto à esparsidade. A figura 2 mostra os gráficos das somas parciais da energia no domínio transformado em função do número de coeficientes, junto com o respectivo gráfico dos dados originais para comparação.

V. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

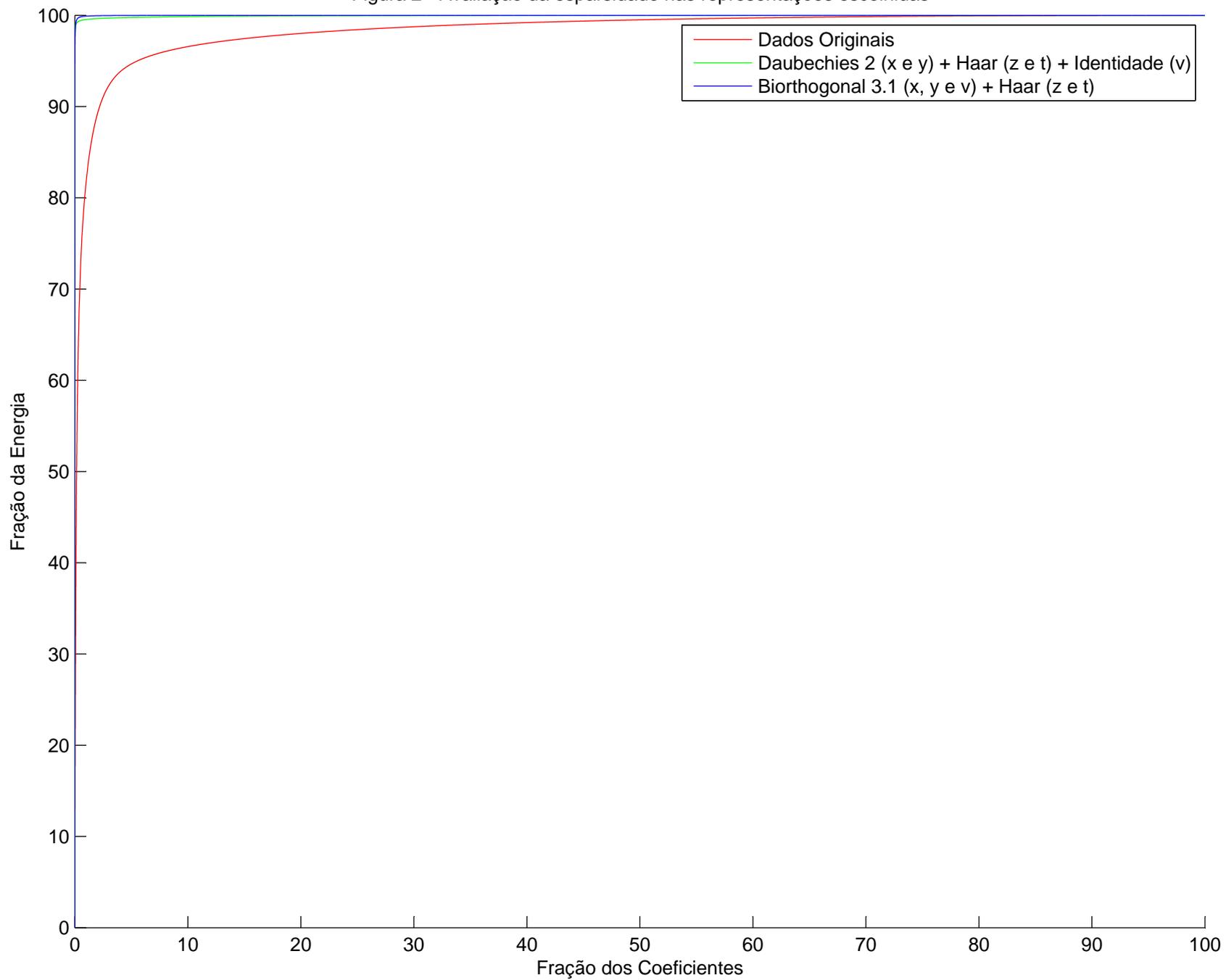
Este trabalho resultou em duas representações esparsas para os dados de ressonância magnética de fluxo que foram utilizados como referência. Como já observado, não se podemos garantir que essas representações sejam ótimas quanto à esparsidade. No entanto, observando os gráficos na figura 2, acreditamos que atingimos um resultado satisfatório.

Os resultados encontrados neste trabalho servirão como ponto de partida para a próxima etapa da pesquisa. As representações propostas para os dados de referência utilizados devem ser testados ainda em dados de outros exames de ressonância magnética de fluxo similares (outros indivíduos, normais e patológicos) para atestar a sua eficiência quanto à capacidade de esparsificar dados dessa natureza. Por fim, o teste final quanto à utilidade dessas representações será concluído com uma reconstrução bem sucedida via *compressed sensing*.

REFERÊNCIAS

- [1] Carvalho JLA, Nayak KS. Rapid quantitation of cardiovascular flow using slice-selective Fourier velocity encoding with spiral readouts. *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 57, 639–646, 2007.
- [2] Donoho D. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, 1289–1306, 2006.
- [3] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, 489–509, 2006.
- [4] Lustig M, Donoho D, Pauly JM. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 58, 1182–1195, 2007.

Figura 2 - Avaliação da esparsidade nas representações escolhidas



ANEXO

TABELA 1

Teste em xy Dados originais p = 99	
'Identidade'	35,0144084934277
'DFT'	11,8035477205785
'DCT'	9,08783246142349
'Dif. Finitas'	61,3352540994417
'Haar Wavelets'	4,62693762682882
'Daubechies 2'	3,03003816387587
'Daubechies 3'	4,06372325156576
'Daubechies 4'	3,59824091541150
'Daubechies 5'	6,44597377870688
'Daubechies 6'	6,55206500404990
'Daubechies 7'	6,75102245913204
'Daubechies 8'	11,5903974519187
'Daubechies 9'	11,0545413580305
'Daubechies 10'	10,7238153334768
'Daubechies 11'	10,1294966960305
'Daubechies 12'	10,0645938743775
'Daubechies 13'	9,81732771074099
'Daubechies 14'	9,98961861198709
'Coiflets 1'	3,87595034319318
'Coiflets 2'	6,42097174719491
'Coiflets 3'	11,7228177405482
'Coiflets 4'	11,7943357723635
'Biorthogonal 1.3'	3,63032142878817
'Biorthogonal 1.5'	6,52559726730959
'Biorthogonal 2.2'	3,48658747329708
'Biorthogonal 2.4'	6,54148109812263
'Biorthogonal 2.6'	6,96285774666732
'Biorthogonal 2.8'	11,8143870673610
'Biorthogonal 3.1'	0,504998085450856
'Biorthogonal 3.3'	3,73584638511357
'Biorthogonal 3.5'	8,43473711840178
'Biorthogonal 3.7'	12,2130071017099
'Biorthogonal 3.9'	13,1379206707323
'Biorthogonal 4.4'	6,48594788841876
'Biorthogonal 5.5'	7,38709716837169
'Biorthogonal 6.8'	11,6204177515933
'Reverse Biorthogonal 1.3'	4,19070055711997
'Reverse Biorthogonal 1.5'	6,28743815700761
'Reverse Biorthogonal 2.2'	6,45809879776181
'Reverse Biorthogonal 2.4'	7,84994282024394
'Reverse Biorthogonal 2.6'	8,01203537024423
'Reverse Biorthogonal 2.8'	13,7500249689797
'Reverse Biorthogonal 3.1'	7,91241354738152
'Reverse Biorthogonal 3.3'	8,97688049185617
'Reverse Biorthogonal 3.5'	11,5525291872018
'Reverse Biorthogonal 3.7'	17,8604216830748
'Reverse Biorthogonal 3.9'	17,5292056204987
'Reverse Biorthogonal 4.4'	6,29610329797639
'Reverse Biorthogonal 5.5'	6,16887189370222
'Reverse Biorthogonal 6.8'	12,1391203986577

TABELA 2

Teste em z Dados originais p = 95	
'Identidade'	5,52990394337715
'DFT'	3,20169692706731
'DCT'	2,83535081549215
'Dif. Finitas'	13,1170242229745
'Haar Wavelets'	2,10442114815768

TABELA 3

Teste em v Dados originais p = 95	
'Identidade'	5,52990394337715
'DFT'	40,8110234316613
'DCT'	31,9628423528377
'Dif. Finitas'	3,48932386688355
'Haar Wavelets'	10,2012419220117
'Daubechies 2'	8,01022078989283
'Daubechies 3'	8,56915988921616
'Daubechies 4'	9,96185401737958
'Coiflets 1'	9,09241570316965
'Biorthogonal 1.3'	6,20273530575461
'Biorthogonal 2.2'	8,47720402690465
'Biorthogonal 3.1'	6,97616794775981
'Biorthogonal 3.3'	6,08663218104463
'Reverse Biorthogonal 1.3'	7,57014463445729
'Reverse Biorthogonal 2.2'	10,7747096320394
'Reverse Biorthogonal 3.1'	11,1933728088122
'Reverse Biorthogonal 3.3'	10,5879823957250

TABELA 4

Teste em t Dados originais p = 95	
'Identidade'	5,52990394337715
'DFT'	0,199397722776630
'DCT'	0,193561788367697
'Dif. Finitas'	27,5740636127841
'Haar Wavelets'	0,296125791074217
'Daubechies 2'	0,870501308710193
'Daubechies 3'	0,915263806373211
'Daubechies 4'	1,60932162637217
'Daubechies 5'	1,62708254568368
'Coiflets 1'	0,911174216851202
'Biorthogonal 1.3'	0,917189609775857
'Biorthogonal 1.5'	1,72776465028355
'Biorthogonal 2.2'	0,936478868485012
'Biorthogonal 2.4'	1,69148393194707
'Biorthogonal 3.1'	1,34167151374146
'Biorthogonal 3.3'	1,78827231121281
'Biorthogonal 4.4'	1,65069234404537
'Reverse Biorthogonal 1.3'	0,904347826086957
'Reverse Biorthogonal 1.5'	1,68121376811594
'Reverse Biorthogonal 2.2'	0,950162874696192
'Reverse Biorthogonal 2.4'	1,69316398865785
'Reverse Biorthogonal 3.1'	1,20849752799186
'Reverse Biorthogonal 3.3'	1,83890408914536
'Reverse Biorthogonal 4.4'	1,66812696912413

TABELA 5

Teste em t Dados transformados em xy: 'bio3.1' p = 99	
'Identidade'	0,504998085450856
'DFT'	0,283536982575220
'DCT'	0,234467723561347
'Dif. Finitas'	0,611863293246964
'Haar Wavelets'	0,197525590299747
'Daubechies 2'	0,253298082835386
'Daubechies 3'	0,251275052704008
'Daubechies 4'	0,306205494606914
'Daubechies 5'	0,308346001002027

'Coiflets 1'	0,249034064845450
'Biorthogonal 1.3'	0,237686538029846
'Biorthogonal 1.5'	0,333202386645715
'Biorthogonal 2.2'	0,247477039596326
'Biorthogonal 2.4'	0,313118438432284
'Biorthogonal 3.1'	0,210292606723740
'Biorthogonal 3.3'	0,307359143914305
'Biorthogonal 4.4'	0,318219665915147
'Reverse Biorthogonal 1.3'	0,243613451478152
'Reverse Biorthogonal 1.5'	0,325785395458997
'Reverse Biorthogonal 2.2'	0,272552618608419
'Reverse Biorthogonal 2.4'	0,338031757418415
'Reverse Biorthogonal 3.1'	0,343344185704301
'Reverse Biorthogonal 3.3'	0,373386838689263
'Reverse Biorthogonal 4.4'	0,322560833276400

TABELA 6

Teste em t	
Dados transformados em xy: 'db2'	
p = 99	
'Identidade'	3,03003816387587
'DFT'	0,414820636138744
'DCT'	0,354482547414882
'Dif. Finitas'	51,1336454604530
'Haar Wavelets'	0,247224685208124
'Daubechies 2'	0,589292940440717
'Daubechies 3'	0,550497638079622
'Daubechies 4'	0,944085914211641
'Daubechies 5'	0,948128031700485
'Coiflets 1'	0,565432727969237
'Biorthogonal 1.3'	0,620136011721762
'Biorthogonal 1.5'	1,19173157067705
'Biorthogonal 2.2'	0,738772643203623
'Biorthogonal 2.4'	1,23311001229760
'Biorthogonal 3.1'	3,41513997719163
'Biorthogonal 3.3'	1,91319028681220
'Biorthogonal 4.4'	1,00442443237458
'Reverse Biorthogonal 1.3'	0,558644189383070
'Reverse Biorthogonal 1.5'	1,04856485277038
'Reverse Biorthogonal 2.2'	0,641185590089694
'Reverse Biorthogonal 2.4'	1,08618711712327
'Reverse Biorthogonal 3.1'	2,14000281163122
'Reverse Biorthogonal 3.3'	1,86309344020021
'Reverse Biorthogonal 4.4'	1,05874595773269

TABELA 7

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'bior3.1'	
Dados transformados em t: 'haar'	
p = 99	
'Identidade'	0,197525590299747
'DFT'	0,236564535676413
'DCT'	0,199343125373161
'Dif. Finitas'	0,216980084716814
'Haar Wavelets'	0,138986533107411

TABELA 8

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'bior3.1'	
Dados transformados em t: 'bior3.1'	
p = 99	
'Identidade'	0,210292606723740
'DFT'	0,252481855781712
'DCT'	0,212003891612930
'Dif. Finitas'	0,206743579232819
'Haar Wavelets'	0,154559361267959

TABELA 9

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'haar'	
p = 99	
'Identidade'	0,247224685208124
'DFT'	0,292497831582262
'DCT'	0,238670759926452
'Dif. Finitas'	16,1537328345973
'Haar Wavelets'	0,106854777966330

TABELA 10

Teste em z	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'DCT'	
p = 99	
'Identidade'	0,354482547414882
'DFT'	0,433290871652121
'DCT'	0,353045642533814
'Dif. Finitas'	22,7641501864501
'Haar Wavelets'	0,138001173242978

TABELA 11

Teste em v	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'haar'	
Dados transformados em z: 'haar'	
p = 99	
'Identidade'	0,106854777966330
'DFT'	0,595518562674274
'DCT'	0,455140964126902
'Dif. Finitas'	0,212497512260472
'Haar Wavelets'	0,162317047709858
'Daubechies 2'	0,173938025600430
'Daubechies 3'	0,159014295007505
'Daubechies 4'	0,201287066022356
'Coiflets 1'	0,151173406796441
'Biorthogonal 1.3'	0,134503960651068
'Biorthogonal 2.2'	0,165311617754207
'Biorthogonal 3.1'	0,131440672089593
'Biorthogonal 3.3'	0,141364428415410
'Reverse Biorthogonal 1.3'	0,154662607354713
'Reverse Biorthogonal 2.2'	0,194256387602761
'Reverse Biorthogonal 3.1'	0,129889626133511
'Reverse Biorthogonal 3.3'	0,236216555669045

TABELA 12

Teste em v	
Dados transformados em xy: 'db2'	
Dados transformados em t: 'DCT'	
Dados transformados em z: 'haar'	
p = 99	
'Identidade'	0,138001173242978
'DFT'	0,604017131526462
'DCT'	0,462336097229590
'Dif. Finitas'	0,424150091119829
'Haar Wavelets'	0,178173935484574
'Daubechies 2'	0,245054026089980
'Daubechies 3'	0,218192779096891
'Daubechies 4'	0,308615788913410
'Coiflets 1'	0,207001688934224
'Biorthogonal 1.3'	0,182139219839950
'Biorthogonal 2.2'	0,255173538502185
'Biorthogonal 3.1'	0,180496591789413
'Biorthogonal 3.3'	0,217631894252628
'Reverse Biorthogonal 1.3'	0,214421559888845

'Reverse Biorthogonal 2.2'	0,285758092232923
'Reverse Biorthogonal 3.1'	0,140190753497903
'Reverse Biorthogonal 3.3'	0,403580856304203

TABELA 13

Teste em v Dados transformados em xy: 'bio3.1' Dados transformados em t: 'haar' Dados transformados em z: 'haar' p = 99	
'Identidade'	0,138986533107411
'DFT'	0,260346052524934
'DCT'	0,210193435804863

'Dif. Finitas'	0,144461947026955
'Haar Wavelets'	0,150087208796562
'Daubechies 2'	0,151203315162430
'Daubechies 3'	0,150006450087989
'Daubechies 4'	0,159309157856615
'Coiflets 1'	0,147800901909014
'Biorthogonal 1.3'	0,136162100046806
'Biorthogonal 2.2'	0,142240883628107
'Biorthogonal 3.1'	0,0788117405920413
'Biorthogonal 3.3'	0,124815803545408
'Reverse Biorthogonal 1.3'	0,144453857895226
'Reverse Biorthogonal 2.2'	0,156433198942355
'Reverse Biorthogonal 3.1'	0,127536671464953
'Reverse Biorthogonal 3.3'	0,152118347044250